

2010

UNIVERSIDADE
SANTA CECÍLIA

ESTÁTICA NAS ESTRUTURAS

José Carlos Morilla

1. Estruturas	3
1.1. Barras	3
1.1.1. Classificação das barras	4
2. Esforços que atuam nas estruturas	4
2.1. Esforços Externos.....	5
2.2. Esforços Internos.....	5
2.3. Esforços de ação que atuam nas estruturas.	5
2.3.1. Força Concentrada.	5
2.1.2. Força distribuída.	6
2.1.2.1. Força Linearmente Distribuída (Carregamento)	6
2.1.3. Momentos.....	7
2.2. Esforços de reação que atuam nas estruturas – Apoios e suas reações.....	8
2.2.1. Apoio simples móvel.	8
2.2.2. Apoio simples fíxo.	8
2.2.3. Engastamento.	9
2.2.4. Engastamento Deslizante.	9
3. Equilíbrio de uma estrutura	10
3.1. Exemplos.....	10
3.2. Exercícios.....	14
4. Esforços Internos Solicitantes.	16
4.1. Exemplo.	17
4.2. Classificação dos Esforços Internos Solicitantes.	19
4.3. Exemplos.....	20
4.4. Exercícios.....	24
5. Linhas de Estado.	26
5.1. Exemplo.	26
5.2. Equilíbrio de um Trecho Reto.....	33
5.3. Exemplos.....	34
5.4. Exercícios.....	41
6. Articulação	43
6.1. Exemplos.....	44
6.2. Exercícios.....	48

1. Estruturas

Chamamos de estrutura à parte de um corpo que suporta os esforços nele aplicados. Por exemplo, em um edifício, a estrutura é o conjunto de vigas, colunas e lajes. A figura 1 mostra a estrutura de um teto.

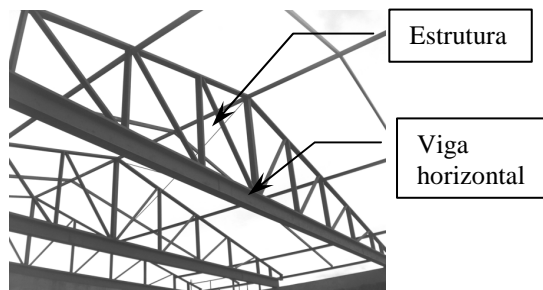


Figura 1- Estrutura Metálica de uma cobertura

Em função da forma geométrica, os corpos que compõem a estrutura, podem ser classificados em **barras**; **blocos** ou **placas**.

Considerando que um corpo qualquer possui três dimensões, dizemos que um corpo é uma barra quando uma de suas dimensões é muito maior do que as outras. Por exemplo, o eixo de um equipamento de transmissão é uma barra na medida em que seu comprimento é muito maior que seu diâmetro; a viga de uma construção civil, também, é uma barra, na medida em que seu comprimento é muito maior que sua altura e largura. Na figura 1 está destacada a viga horizontal que é uma barra.

Considera-se um bloco aquele corpo que possui todas as dimensões com a mesma ordem de grandeza. A figura 2 mostra um bloco de concreto, usado na construção civil. Note-se que neste elemento todas as dimensões (altura, largura e comprimento) possuem a mesma ordem de grandeza.

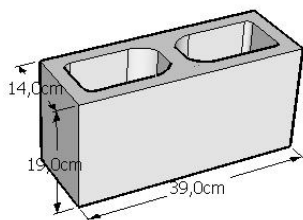


Figura 2 – Bloco de concreto para construção civil

Uma placa é um elemento estrutural onde uma de suas dimensões é muito menor do que as

outras. Em geral, esta dimensão é tratada como espessura da placa. Por exemplo, as chapas de alumínio comercial, como as mostradas na figura 3, em geral são comercializadas com dois metros de comprimento, um metro de largura e alguns milímetros de espessura.



Figura 3 – Chapas de alumínio

O estudo da estática das estruturas se inicia pelo estudo das estruturas constituídas por barras. Assim, se faz necessário definir os elementos de uma barra.

1.1. Barras

Uma barra é definida como um sólido formado no deslocamento, feito no espaço, por uma figura plana de área A . Isto pode ser observado na figura 4.

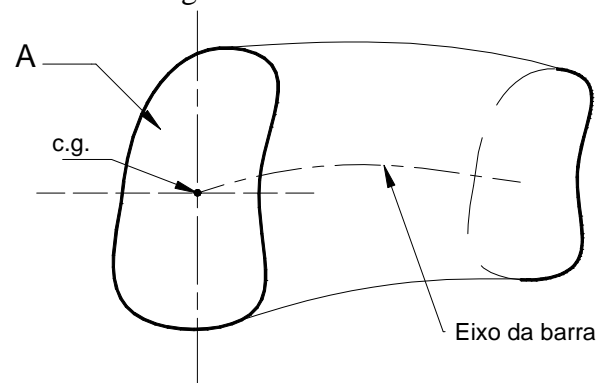


Figura 4 – Barra

Na figura 4, as posições sucessivas, ocupadas pelo centro de gravidade da figura plana geradora constituem o **Eixo** da barra.

Note-se, ainda na figura 4 que a figura plana varia de forma e tamanho durante o deslocamento. Para se determinar a forma e tamanho da figura plana, em uma dada posição do eixo da barra, devemos fazer um corte na barra por meio de um plano normal ao eixo nesta posição. À figura plana encontrada neste corte se

dá o nome de **Seção Transversal**. Isto pode ser observado na figura 5.

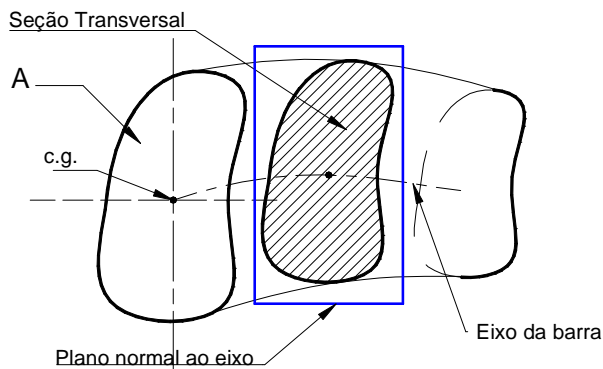


Figura 5 – Seção Transversal em uma barra

OBS:- Note-se que a barra é um sólido não se inclui aqui o material com o qual é possível fabricar esta barra.

1.1.1. Classificação das barras

De acordo com a forma do eixo e da seção transversal, as barras são classificadas em:

- Barra Prismática**:- aquela que possui eixo reto e seção transversal constante.
- Barra Reta**:- aquela que possui eixo reto e seção transversal variável.
- Barra Qualquer**:- aquela que possui eixo qualquer

As barras mostradas na figura 6 são barras prismáticas, pois, além de possuírem eixo reto a seção transversal é constante na medida em que o diâmetro é constante.



Figura 6 – Barras Prismáticas

Com relação à figura 7, esta mostra um equipamento constituído por uma esfera, um corpo e uma barra qualquer. Note-se que, embora a seção transversal da barra seja constante (o diâmetro da barra é constante) o

eixo da barra não é reto. Nesta situação a barra é dita qualquer.

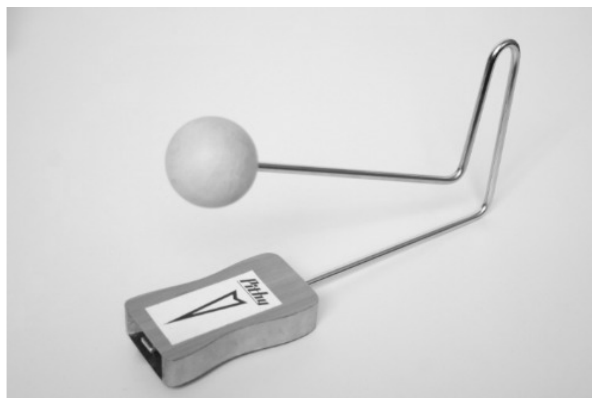


Figura 7 – Equipamento com um corpo, uma esfera e uma barra qualquer.

A figura 8, por sua vez, mostra uma barra reta. Observe-se aqui que o eixo é reto e a seção varia ao longo deste eixo



Figura 8 – Barra Reta

No presente estudo, as barras serão representadas pelo seu eixo. A fim de diferenciar este eixo das demais linhas que aparecerão na representação gráfica, este será representado por uma linha mais grossa que as demais.

A figura 9 mostra uma barra sendo representada por seu eixo.

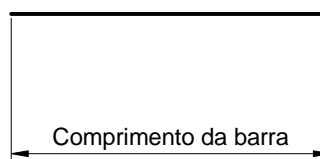


Figura 9 – Representação de uma barra

2. Esforços que atuam nas estruturas

Como dito, na página 2, a estrutura é a parte de um corpo que deve suportar os esforços nele aplicados. Sendo assim, é possível classificar os esforços que atuam em uma estrutura em **Esforços Externos** e **Esforços Internos**.

Os esforços externos são aqueles que são aplicados por outros agentes. Os esforços

internos são aqueles que aparecem nos pontos internos dos sólidos da estrutura, oriundos da existência dos externos.

2.1. Esforços Externos

Os esforços externos podem ser divididos em esforços de **ação** e esforços de **reação**.

Na figura 10, uma pessoa sentada em uma cadeira corresponde a um esforço de ação para esta cadeira, representado pela força F . Note-se que se esta cadeira não estivesse apoiada no piso, ela sofreria um deslocamento vertical no sentido da força.

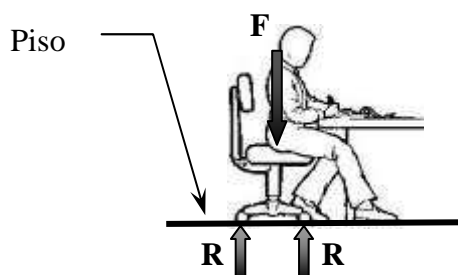


Figura 10 – Esforços Externos em uma cadeira

O que mantém a cadeira em sua posição de repouso são as forças R que ao piso aplica na cadeira. Estas forças são os esforços de reação que o piso exerce na cadeira. Cada uma destas forças possui sentido e valor tal que a cadeira é mantida parada. Nesta situação se diz que a cadeira está em **equilíbrio estático**.

Para que a cadeira permaneça em equilíbrio estático, a cada valor de F ocorrem valores de R para que esta situação não se modifique.

Pode ser possível afirmar que os esforços de ação são os esforços aplicados por agentes externos á estrutura que possuem “existência própria” (o peso da pessoa é o mesmo quer ela esteja sentada na cadeira, ou não), já os esforços de reação são aqueles aplicados na estrutura e que dependem da aplicação dos esforços de ação. Para que uma estrutura suporte estes esforços é necessário que eles formem um sistema em equilíbrio.

2.2. Esforços Internos.

Tomando, ainda, como exemplo a figura 10, o crescimento da força F e conseqüente crescimento das reações R , pode causar algum dano na cadeira. Para que este dano ocorra é necessário que pontos do material, da parte afetada, sejam afetados. Pode-se concluir então que nestes pontos estão atuando esforços que solicitam a estrutura e esta não os suporta.

De uma forma geral é possível dizer que quando uma estrutura está sob a ação de esforços externos em equilíbrio, nos seus pontos internos atuam **esforços internos solicitantes**. Os máximos valores que os esforços solicitantes podem ter sem que ocorra algum dano à estrutura são denominados **esforços internos resistentes**.

Observe-se que enquanto os esforços solicitantes dependem das cargas aplicadas na estruturas e das reações que as mantém em equilíbrio, os esforços resistentes são características dos materiais com que estas estruturas são construídas.

2.3. Esforços de ação que atuam nas estruturas.

Os esforços de ação que atuam nas estruturas podem ser classificados em **forças** ou **momentos**.

Com relação às forças estas podem ser concentradas ou distribuídas.

2.3.1. Força Concentrada.

Diz-se que uma é força concentrada quando se considera que ela é aplicada em um único ponto. Uma força deste tipo é representada por um vetor cujo tamanho representa a intensidade da força; a direção representa a direção da força e o sentido, o sentido da força. A figura 11 mostra a representação de uma força concentrada de 5 kN aplicada no ponto A de uma barra de três metros.

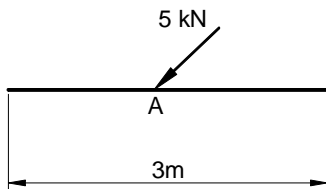


Figura 11- Força Concentrada aplicada em uma barra.

- 1.
- 2.
- 2.1.
- 2.1.1.
- 2.1.2. Força distribuída.

Uma força é distribuída quando sua aplicação em um corpo é feita em mais do que um ponto.

Com relação à distribuição, as forças distribuídas podem ser classificadas em:

- **Forças Distribuídas Volumetricamente:** que são aquelas distribuídas pelo volume de um corpo. Por exemplo, temos a força peso.
- **Forças Distribuídas Superficialmente:** que são aquelas distribuídas pela superfície de um corpo. Por exemplo, temos a pressão.
- **Forças Distribuídas Linearmente:** que são aquelas distribuídas ao longo de uma linha. Embora, da mesma maneira que a força concentrada, este tipo de força é uma aproximação. Por exemplo, consideremos uma força distribuída aplicada na parte superior de uma viga retangular, como mostra a figura 12.

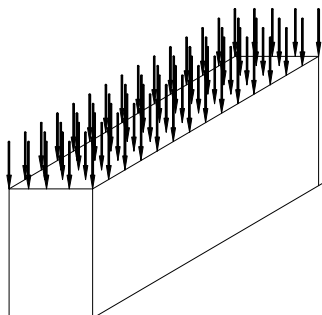


Figura 12 – Força distribuída aplicada em uma barra.

Como, a largura onde está aplicada a carga é muito pequena, quando comparada com o comprimento, se pode considerar que a carga

está distribuída apenas ao longo do comprimento da viga, como mostra a figura 13

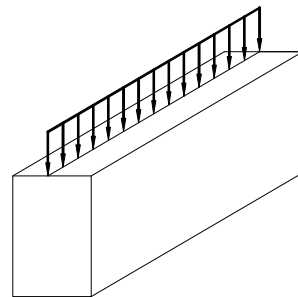


Figura 13- Força distribuída linearmente.

Como, no presente curso, se faz uso deste tipo de distribuição, o próximo tópico tratará deste assunto.

2.1.2.1. Força Linearmente Distribuída (Carregamento)

Seja uma força linearmente distribuída onde a função de distribuição é $q(x)$.

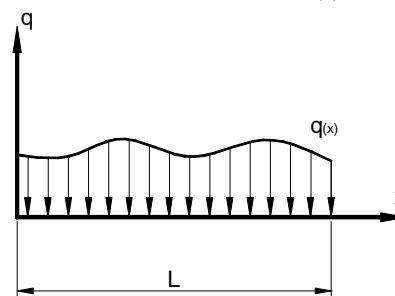


Figura 14 – Força distribuída ao longo de um comprimento

Pode-se dizer que a força total da distribuição (F) nada mais é do que a soma de todas as forças ao longo da distribuição. Desta forma, a força total de distribuição é a integral da função $q(x)$ ao longo de L.

$$F = \int_0^L q(x) dx \quad (1)$$

A posição equivalente desta força, com relação à distribuição, é o centro de gravidade da distribuição

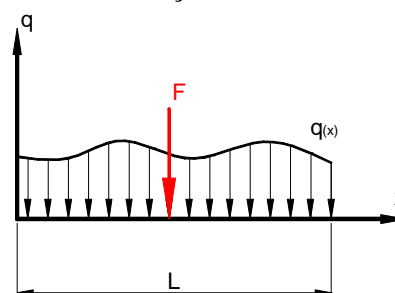


Figura 15 – Força resultante de uma força distribuída.

Quando se recorda que a integral da expressão (1), também, representa a área sob o gráfico da função $q(x)$, se pode afirmar que a força resultante de um carregamento é numericamente igual à área delimitada pela distribuição. A posição relativa desta força é o centro de gravidade da figura formada na distribuição.

Para compreender esta afirmação, toma-se, por exemplo, uma distribuição uniforme, como a mostrada na figura 16.

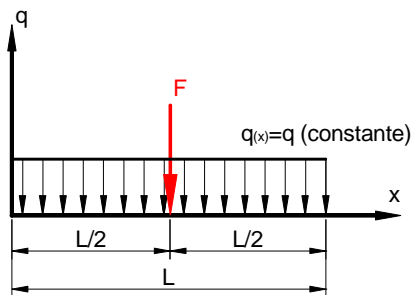


Figura 16 – Força resultante de uma força uniformemente distribuída.

Usando a expressão (1), se encontra:

$$F = \int_0^L q(x) dx = q \int_0^L dx \Rightarrow \boxed{F = q \times L} \quad (2)$$

Note-se que o resultado $q \times L$ nada mais é do que a área formada pelo retângulo delimitado pelo gráfico da distribuição. A posição da força é na metade do comprimento L , pois, é nesta abscissa que se encontra o centro de gravidade do retângulo.

Tal raciocínio pode ser aplicado para outros casos bastante corriqueiros.

Quando a distribuição é uniformemente variável, se encontra:

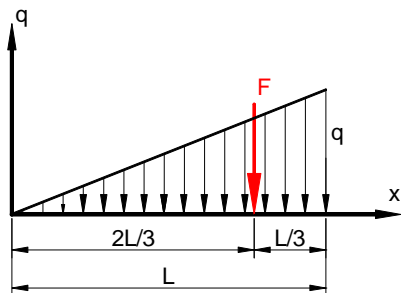


Figura 17 – Força resultante de uma força uniformemente variável.

Usando a expressão (1), se encontra:

$$\boxed{F = \frac{q \times L}{2}} \quad (3)$$

Quando a distribuição é uniformemente variável, e seu valor inicial é diferente de zero, se encontra uma figura semelhante a um trapézio, como mostra a figura 18.

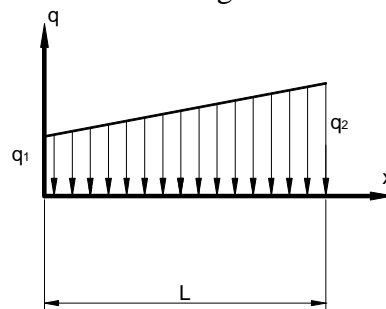


Figura 18 – Força uniformemente variável com carga inicial diferente de zero.

Nesta situação é possível considerar a distribuição como sendo a superposição entre duas e determinar duas forças, como mostra a figura 19.

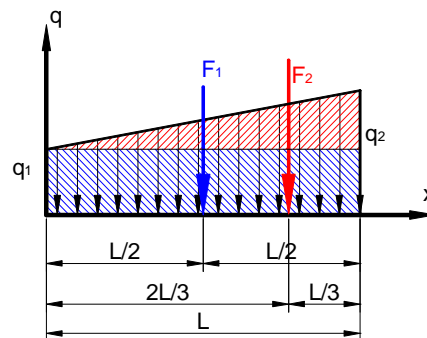


Figura 19 – Forças resultantes de uma carga uniformemente variável com carga inicial diferente de zero.

Assim determina-se F_1 e F_2 , cujos valores são:

$$\boxed{F_1 = q_1 \times L} \quad \boxed{F_2 = \frac{(q_2 - q_1) \times L}{2}}$$

Pelas expressões apresentadas, se pode notar que a equação dimensional de q é unidade de força por unidade de comprimento.

2.1.3. Momentos.

Um momento, não será aqui representado, pelo seu vetor. Trabalhando em um plano, a representação será feita de maneira a permitir verificar o ponto de aplicação, seu valor e seu sentido. A figura 20 mostra um momento

de valor igual a 10 kNm, com sentido anti-horário atuando no ponto P.



Figura 20 – Momento anti-horário no ponto p.

2.2. Esforços de reação que atuam nas estruturas – Apoios e suas reações.

Os esforços de reação que atuam nas estruturas dependem da forma com que esta é apoiada.

Um apoio oferece reação na direção em que ele faz restrição ao deslocamento. Assim, em função do comportamento, para as estruturas planas, objeto deste estudo, os apoios podem ser classificados em:

- Apoio simples móvel;
- Apoio simples fixo;
- Engastamento e
- Engastamento deslizante.

2.

- 1.
- 2.

2.2.1. Apoio simples móvel.

Um apoio simples móvel é aquele que oferece apenas uma força como reação. Sua representação gráfica é a mostrada pela figura 21.

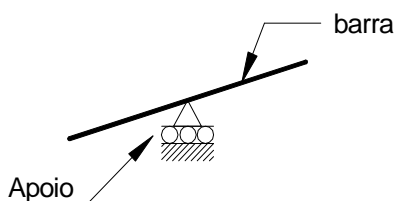


Figura 21 – apoio simples móvel

A reação que este apoio oferece é uma força que tem direção perpendicular à linha de solo. Note-se que a representação gráfica deste apoio indica que somente nesta direção é que este tipo de apoio oferece restrição ao deslocamento.

Caso o movimento seja paralelo ao solo, ou de rotação, este tipo de apoio não oferecerá nenhum tipo de restrição.

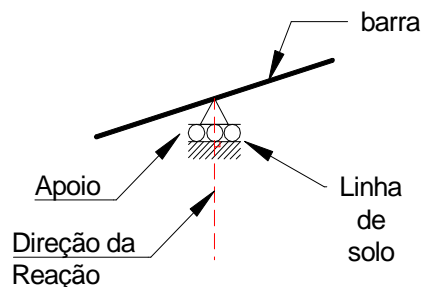


Figura 22 – Reação do apoio móvel

No mecanismo biela-manivela da figura 23, característico dos motores de combustão interna, em uma situação de repouso, o pistão funciona para a biela como um apoio simples móvel.

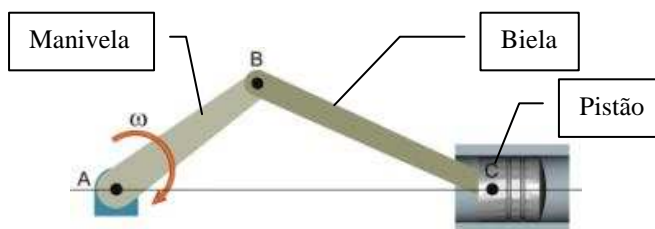


Figura 23 – Mecanismo Biela - Manivela

2.2.2. Apoio simples fixo.

Um apoio simples fixo é aquele que oferece uma força de direção qualquer como reação. Sua representação gráfica é a mostrada pela figura 24.

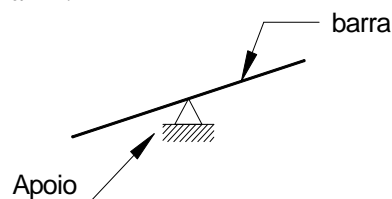


Figura 24 – Apoio fixo

Um exemplo deste tipo de apoio é uma dobradiça. Por exemplo, em uma porta, uma dobradiça permite, apenas, que a porta gire em torno da parede (a parede para a porta é o solo).

Na figura 23, a manivela está apoiada no ponto A. Este apoio é na verdade um apoio simples fixo; o único movimento que ele permite é o movimento de rotação em torno dele. Qualquer movimento de translação sofre restrição.

Em uma gangorra, como a mostrada na figura 25, o apoio da barra é feito de maneira que o comportamento é o de um apoio simples fixo. O único movimento permitido é o de rotação.



Figura 25 – Gangorra

Como a reação que este apoio oferece tem direção qualquer, ela pode ser decomposta em duas componentes perpendiculares entre si. Devido a este fato dizemos, comumente, que este tipo de apoio oferece duas reações que são duas forças cujas direções são perpendiculares entre si.

A figura 26 mostra um apoio fixo, sua reação e as componentes desta reação.

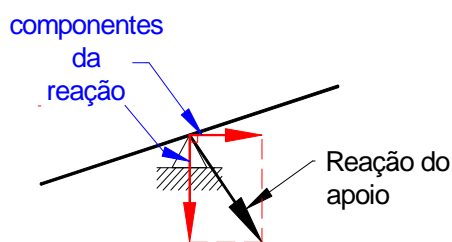


Figura 26 – Apoio fixo e suas reações

A figura 27, por sua vez, mostra o mesmo apoio fixo e sua reação da figura 26, com as componentes desta reação em outras duas direções perpendiculares entre si.

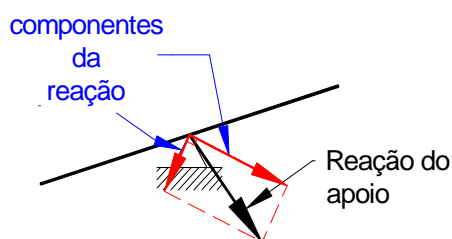


Figura 27 – Apoio fixo e suas reações em outras duas direções

2.2.3. Engastamento.

Um engastamento é aquele que oferece como reação uma força de direção qualquer e um momento. Sua representação gráfica é a mostrada pela figura 28.

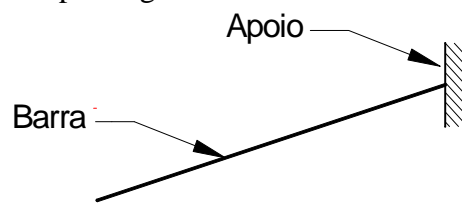


Figura 28 – Engastamento

A figura 29 mostra uma escada que possui seus degraus em balanço. Note-se na figura que uma das extremidades de cada degrau está livre e a outra está engastada na viga que sustenta a escada.



Figura 29 – Degraus engastados de uma escada

Da mesma forma que o apoio fixo, a reação que este apoio oferece pode ser decomposta em duas componentes perpendiculares entre si. Devido a este fato dizemos, comumente, que este tipo de apoio oferece três reações que são: um momento e duas forças cujas direções são perpendiculares entre si.

A figura 30 mostra um engastamento, suas reações sendo que a força é fornecida pelas componentes da força destas reações.

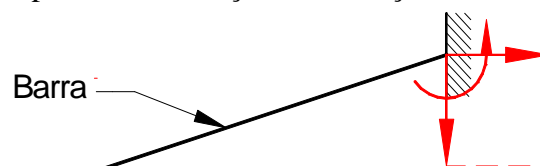


Figura 30 – Engastamento e suas reações

2.2.4. Engastamento Deslizante.

Um engastamento deslizante é aquele que oferece como reação uma força de direção perpendicular ao solo e um momento. Sua representação gráfica, bem como suas reações, está representada na figura 31.

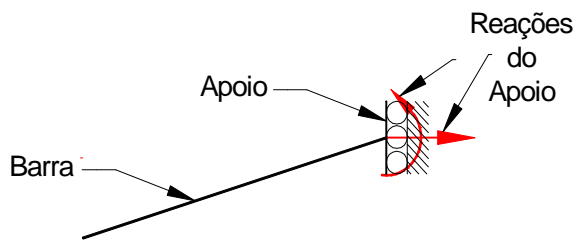


Figura 31 – Engastamento deslizante

A figura 32 é uma fotografia de uma mesa coordenada para máquina ferramenta. Nesta mesa existem canais onde podem ser fixadas outras peças para a realização das operações. Estas mesas só permitem movimento na direção longitudinal a seu eixo, fazendo restrição aos demais.

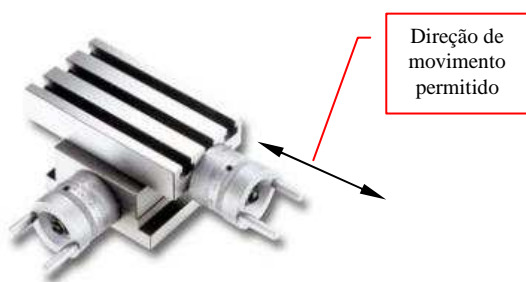


Figura 32 – Mesa coordenada

3. Equilíbrio de uma estrutura

Uma estrutura está em equilíbrio estático, quando ela não possui movimento. Para que ela não possua movimento, se faz necessário que em todos os seus pontos, a resultante dos esforços seja nula; isto é, a resultante das forças e a resultante dos momentos sejam iguais a zero, ou seja:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \\ \sum M &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

As expressões (4) são conhecidas como **Condições de Equilíbrio**.

Como existe ligação material entre os pontos da estrutura, se um de seus pontos está em equilíbrio, então, todos os pontos da estrutura estão em equilíbrio. Diz-se assim que, para que

uma estrutura esteja em equilíbrio é necessário, apenas, que um de seus pontos esteja em equilíbrio.

Lembrando que, quando se trabalha no plano, uma força pode ser representada por suas componentes; em geral, as condições de equilíbrio são expressas pelas expressões:

$$\text{Condições de Equilíbrio} \begin{cases} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \quad (5)$$

onde H e V são duas direções perpendiculares entre si.

3.

3.1. Exemplos.

1. A barra da figura 33 é uma viga onde estão colocadas cargas mostradas. Determinar, para esta situação, as reações que os apoios oferecem.

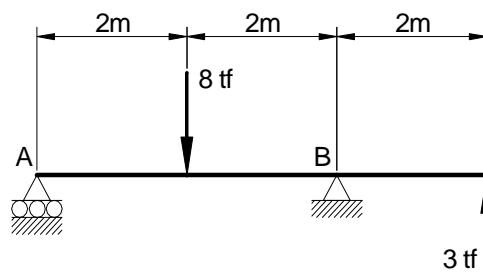


Figura 33 – Viga com esforços

Solução:

Para resolver o problema, deve ser lembrado que o apoio móvel oferece uma reação cuja direção é perpendicular ao solo e que o apoio fixo oferece uma reação que pode ser decomposta em uma componente horizontal e outra vertical.

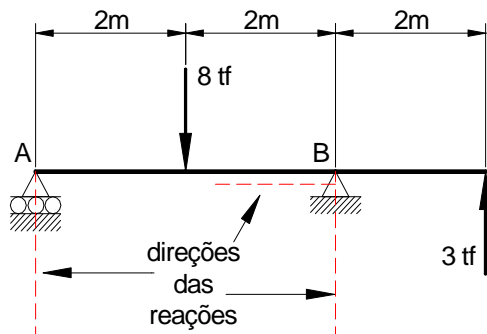


Figura 34 – direções das reações

Considerando que a estrutura sob a ação dos esforços de ação e reação deve estar em equilíbrio, é possível adotar os sentidos das reações e verificar se elas respeitam as condições de equilíbrio.

Assim, se pode fazer:

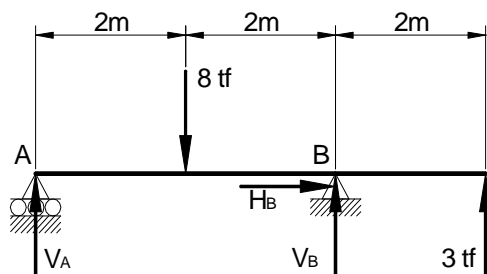
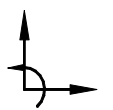


Figura 35 – Reações adotadas

$$\text{Condições de Equilíbrio} \begin{cases} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

Quando se adota o sistema de referências:



se encontra:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_B + 3tf - 8tf = 0 \Rightarrow$$

$$V_A + V_B = 5tf$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -8tf \times 2m + V_B \times 4m + 3tf \times 6m = 0 \Rightarrow$$

$$V_B \times 4m = -2tfm \Rightarrow V_B = -0,5tf$$

Determinado V_B , é possível determinar

V_A :

$$\text{Como } V_A + V_B = 5tf \Rightarrow V_A + (-0,5tf) = 5tf$$

$$V_A = 5,5tf$$

Note-se que V_A possui sinal negativo. Este sinal indica que: para que a estrutura esteja em equilíbrio, o sentido de V_A deve ser o oposto àquele adotado. Assim, a estrutura, com suas reações, fica:

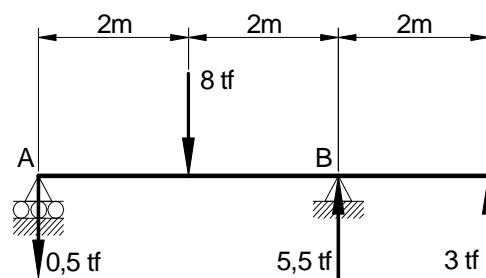


Figura 36 – Estrutura equilibrada.

- A barra da figura 37 está sujeita aos esforços indicados. Determinar as reações dos apoios que a equilibra.

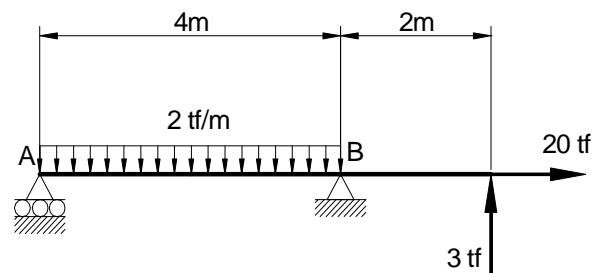


Figura 37 – Barra com esforços

Antes de iniciar a determinação das reações, se faz necessário determinar a resultante da força distribuída que através da observação da figura 16 e da expressão 2 se tem:

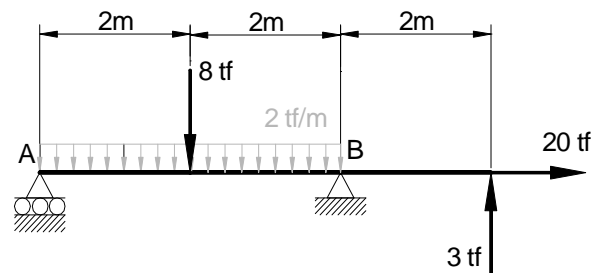


Figura 38 – Barra com a resultante da força distribuída.

Para determinar as reações de apoio, se deve proceder da mesma maneira que no exemplo 1.

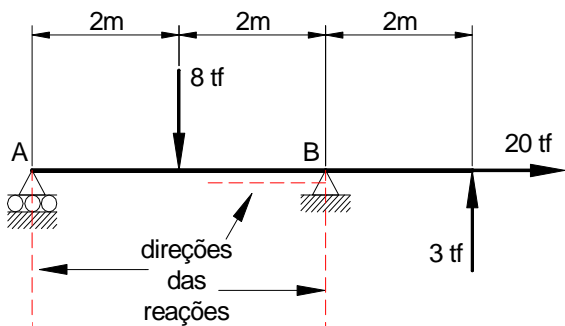


Figura 39 – direções das reações
Assim, se pode fazer:

Condições de Equilíbrio

$$\begin{cases} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

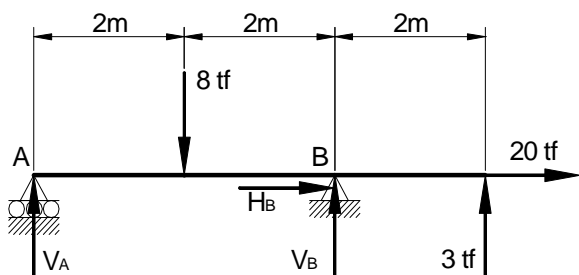
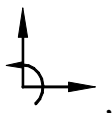


Figura 40 – Reações adotadas

Quando se adota o sistema de referências:



se encontra:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_B + 20tf = 0 \Rightarrow \boxed{H_B = -20tf}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_B + 3tf - 8tf = 0 \Rightarrow$$

$$V_A + V_B = 5tf$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -8tf \times 2m + V_B \times 4m + 3tf \times 6m = 0 \Rightarrow$$

$$V_B \times 4m = -2tfm \Rightarrow \boxed{V_B = -0,5tf}$$

Determinado V_B , é possível determinar

V_A :

$$\text{Como } V_A + V_B = 5tf \Rightarrow V_A + (-0,5tf) = 5tf$$

$$\boxed{V_A = 5,5tf}$$

Assim, a estrutura, com suas reações, fica:

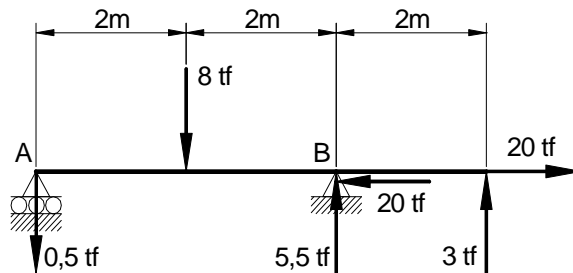


Figura 41 – Estrutura equilibrada.

3. Para a barra da figura 42, determine as reações que os apoios oferecem e mantém a estrutura em equilíbrio.

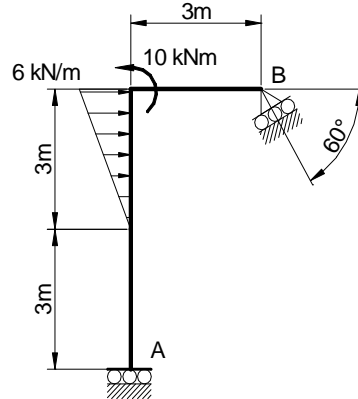


Figura 42

Da mesma forma que no exemplo 2, antes de iniciar a determinação das reações, se faz necessário determinar a resultante da força distribuída. Assim, a estrutura com a resultante da força distribuída e com os sentidos das reações adotados fica como o mostrado na figura 43.

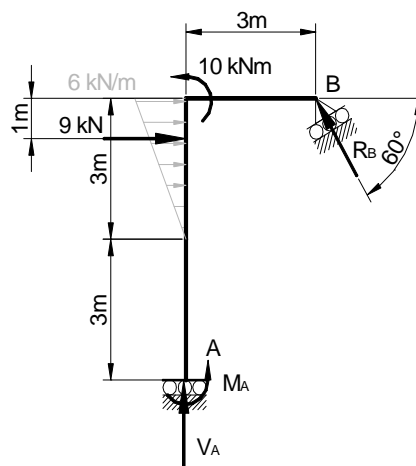


Figura 43

Para a aplicação das condições de equilíbrio, se torna mais fácil trabalhar com as componentes de R_B nas direções horizontal e vertical. Desta forma, a estrutura com os sentidos adotados para as reações fica:

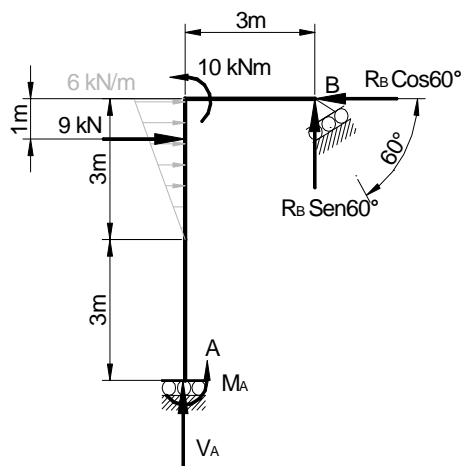


Figura 44

Quando se adota o sistema de referências:



, se encontra:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow -R_B \times \cos 60^\circ + 9 \text{ kN} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{R_B = 18 \text{ kN}}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + R_B \times \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{V_A = -15,6 \text{ kN}}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 9 \text{ kN} \times 1 \text{ m} + M_A + 10 \text{ kNm} - V_A \times 3 \text{ m} = 0 \Rightarrow$$

$$9 \text{ kN} \times 1 \text{ m} + M_A + 10 \text{ kNm} - (-15,6 \text{ kN}) \times 3 \text{ m} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{M_A = -65,8 \text{ kNm}}$$

Como os sinais negativos indicam que os sentidos adotados são os inversos aos necessários para manter a estrutura em equilíbrio; a estrutura, com suas reações de apoio, fica como a mostrada na figura 45.

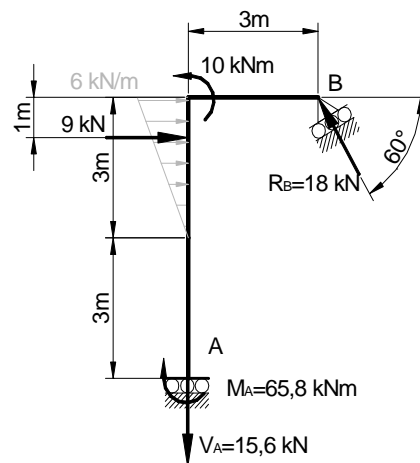


Figura 45

4. Para a barra da figura 46, determine as reações que os apoios oferecem e mantém a estrutura em equilíbrio.

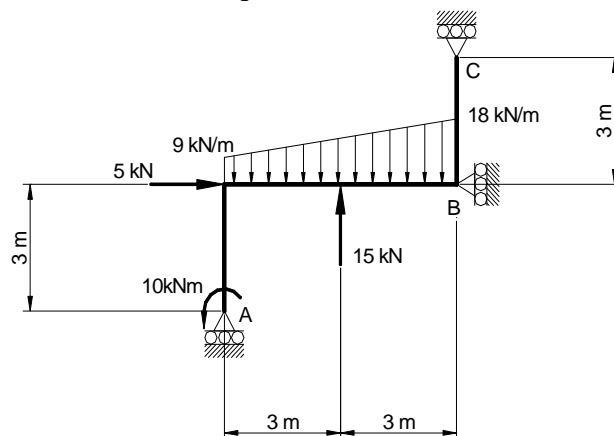


Figura 46

As reações que os apoios oferecem são perpendiculares às linhas de solo. Assim, com os sentidos adotados para as reações e com as resultantes da carga distribuída, se encontra:

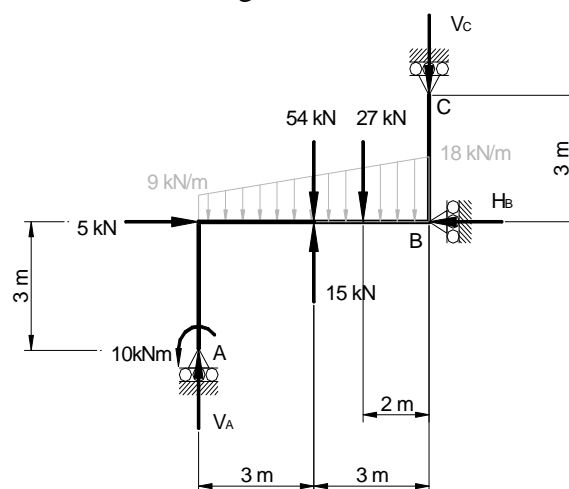
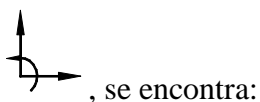


Figura 47

Quando se adota o sistema de referências:



$$\sum F_H = 0 \Rightarrow -H_B + 5\text{kN} = 0 \Rightarrow \boxed{H_B = 5\text{kN}}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + 15\text{kN} - 54\text{kN} - 27\text{kN} - V_C = 0 \Rightarrow$$

$$V_A - V_C = 66\text{kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow$$

$$27\text{kN} \times 2\text{m} + 54\text{kN} \times 3\text{m} + 10\text{kNm} - V_A \times 6\text{m} = 0$$

$$\boxed{V_A = 37,7\text{kN}}$$

Com o V_A , se obtém:

$$37,7\text{kN} - V_C = 66\text{kN}$$

$$\boxed{V_C = -28,3\text{kN}}$$

A estrutura, com suas reações de apoio, fica como a mostrada na figura 48.

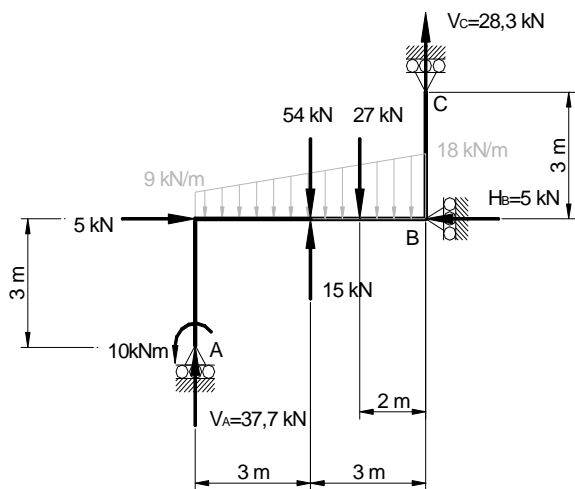


Figura 48

3.2. Exercícios.

1. Para a estrutura da figura 49, determinar as reações de apoio.

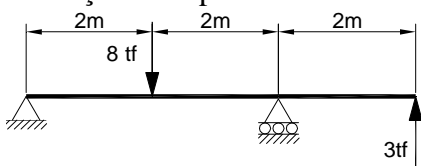


Figura 49

2. Para a estrutura da figura 50, determinar as reações de apoio.

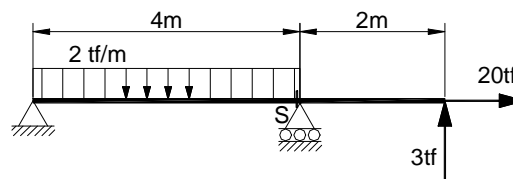


Figura 50

3. Para a estrutura da figura 51, determinar as reações de apoio.

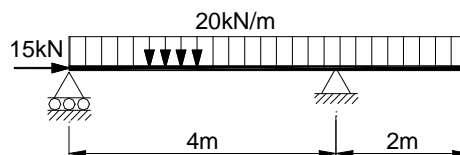


Figura 51

4. Para a estrutura da figura 52, determinar as reações de apoio.

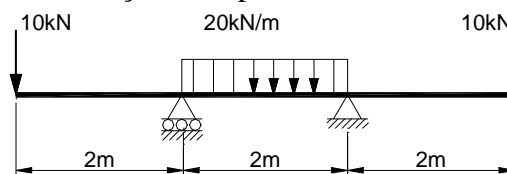


Figura 52

5. Para a estrutura da figura 53, determinar as reações de apoio.

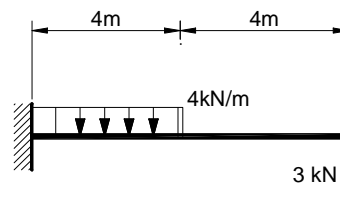


Figura 53

6. Para a estrutura da figura 54, determinar as reações de apoio.

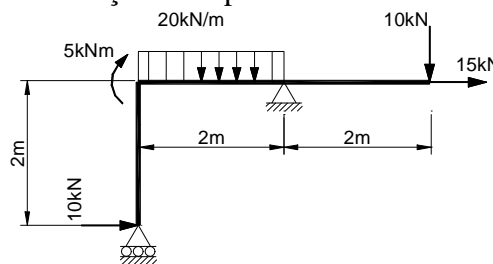


Figura 54

7. Para a estrutura da figura 55, determinar as reações de apoio.

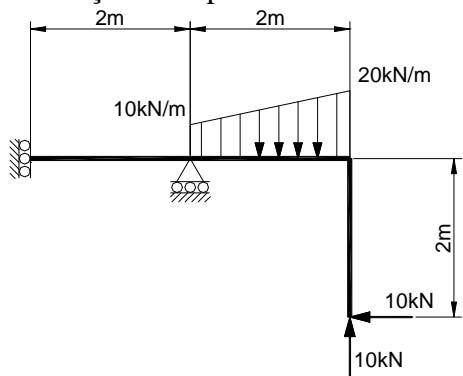


Figura 55

8. Para a estrutura da figura 56, determinar as reações de apoio.

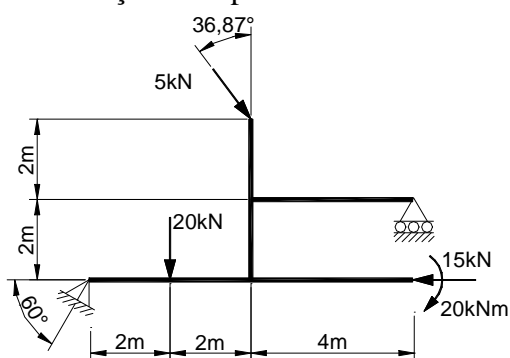


Figura 56

9. Para a estrutura da figura 57, determinar as reações de apoio.

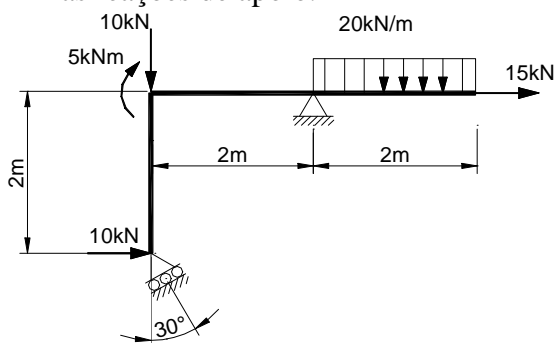


Figura 57

10. Para a estrutura da figura 58, determinar as reações de apoio.

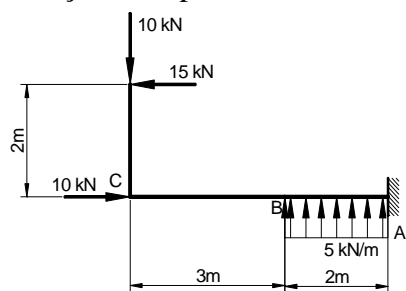


Figura 58

11. Para a estrutura da figura 59, determinar as reações de apoio.

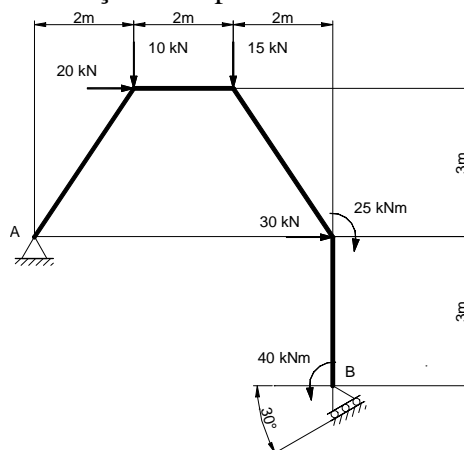


Figura 59

12. Para a estrutura da figura 60, determinar as reações de apoio.

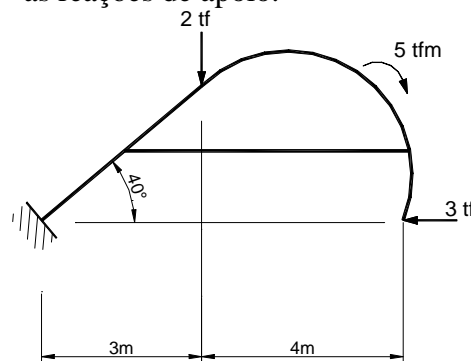


Figura 60

13. Para a estrutura da figura 61, determinar as reações de apoio.

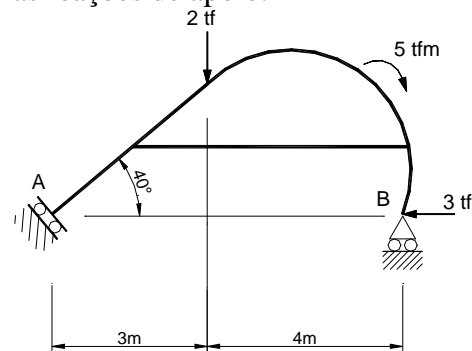


Figura 61

14. Para a estrutura da figura 62, determinar as reações de apoio.

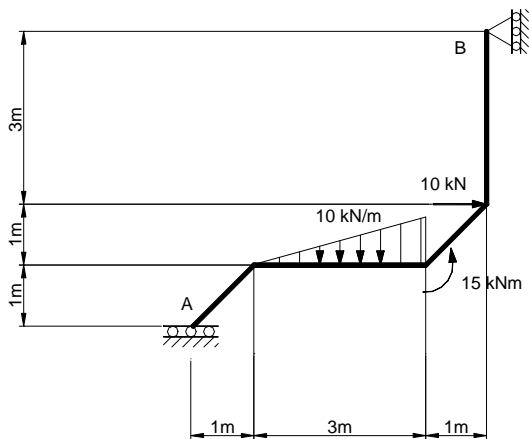


Figura 62

15. Para a estrutura da figura 63, determinar as reações de apoio.

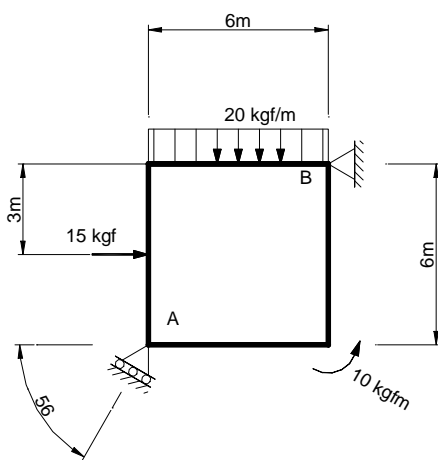


Figura 63

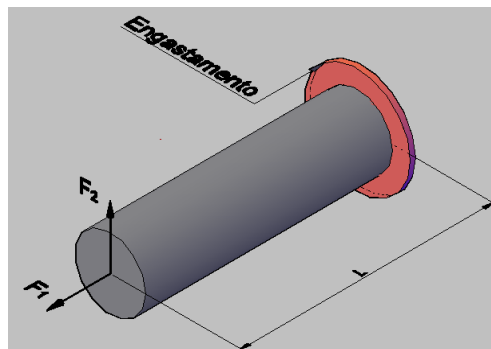


Figura 64

Como a barra está em equilíbrio, as reações que ocorrem no engastamento são: F_1 , F_2 e M , como mostra a figura 65. Lembra-se aqui que $M = F_2 \times L$

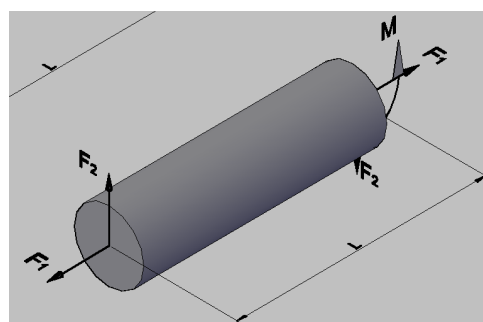


Figura 65

Suponha que seja possível “entrar” em uma seção da barra, que possui uma distância igual a l da extremidade livre. Com isto, por meio da seção, a barra fica “dividida em duas partes”, como pode ser observado na figura 66.

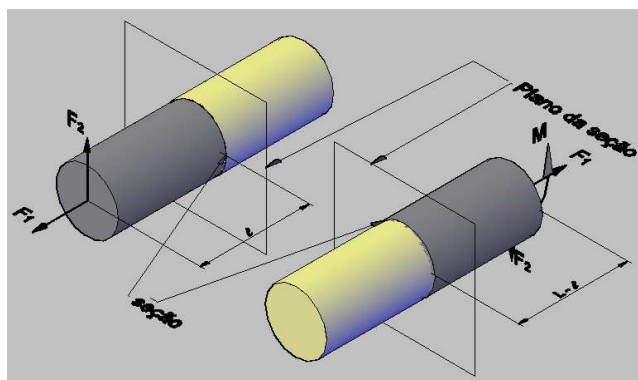


Figura 66

4. Esforços Internos Solicitantes.

Como definido no item 2.2, os esforços internos solicitantes são aqueles que atuam nos pontos internos dos corpos de uma estrutura.

Para que se possa entender como estes esforços ocorrem, seja, por exemplo, uma barra reta, em equilíbrio, onde atuam as forças F_1 e F_2 , como mostra a figura 64.

Como a barra está em equilíbrio, então cada uma de suas partes, dividida pela seção, também, está em equilíbrio. Isto quer dizer que, a seção divisora deve atuar como um engastamento que equilibre os esforços externos que ocorrem em cada parte. Isto está representado na figura 67.

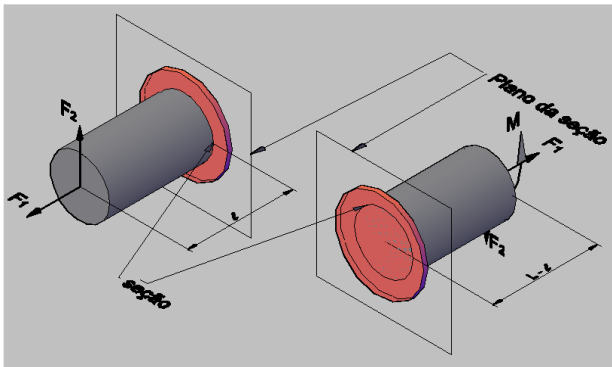


Figura 67

Quando se calcula as reações que ocorrem nestes engastamentos se encontra o mostrado na figura 68.

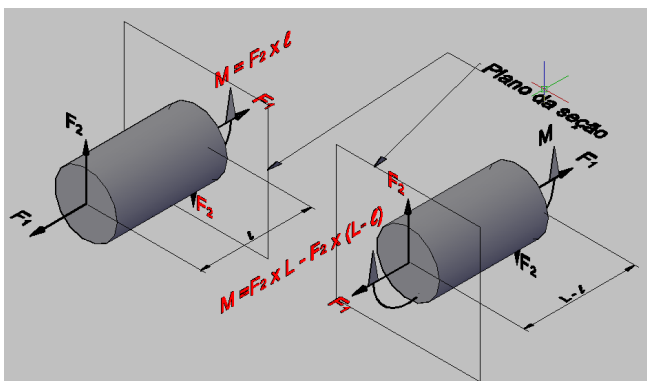


Figura 68

Lembrando que:

$$M = F_2 \times L - F_2 \times (L - l)$$

$$M = F_2 \times l$$

Observa-se que as reações em cada seção divisora são iguais e de sentido inverso, como se observa na figura 69.

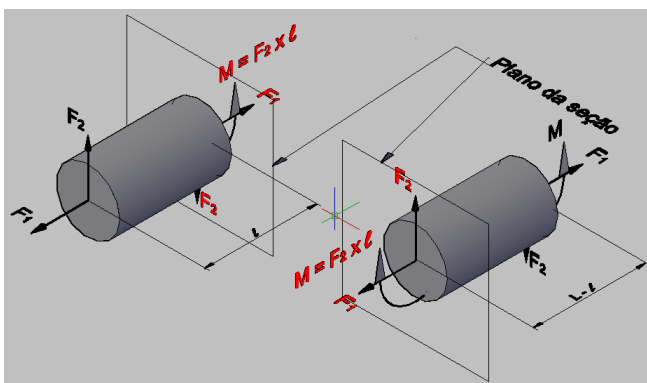


Figura 69

Observando-se atentamente a figura 69, é possível notar que os esforços que atuam na

seção divisora de uma das partes, nada mais são do que a ação, nesta seção, dos esforços externos pertencentes à outra das partes.

Assim, de uma maneira geral, podemos dizer que em uma seção S qualquer de uma estrutura em equilíbrio, os esforços internos solicitantes que atuam nesta seção, pertencente a uma das partes, nada mais são do que as ações dos esforços externos, nesta seção, existentes na outra das partes.

Importante ressaltar que estes esforços, que ocorrem na seção divisora, pertencente a uma das partes, são aqueles que a outra parte aplica na seção de maneira a manter esta em equilíbrio.

Estes esforços são distribuídos pelos pontos da seção e são chamados de **Esforços Internos Solicitantes**.

4.1. Exemplo.

- Determinar, para a seção S, indicada na estrutura da figura 70, os esforços solicitantes que nela atuam.

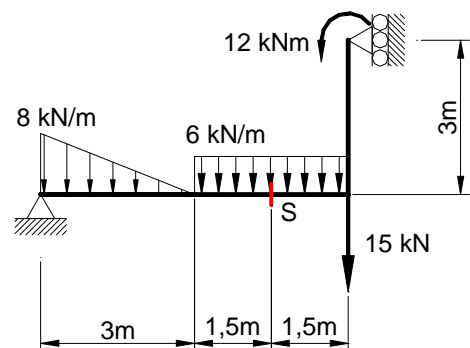


Figura 70

Como a estrutura está em equilíbrio, suas reações de apoio ficam da maneira mostrada na figura 71.

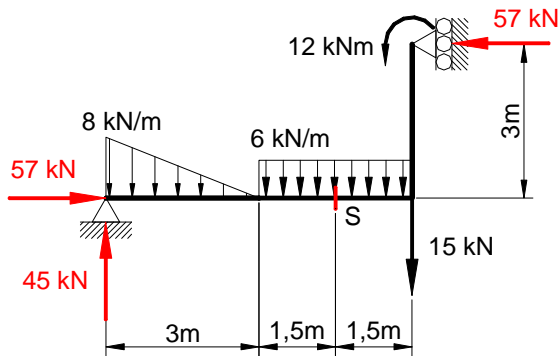


Figura 71

Para seção S, a estrutura está dividida em duas partes, como mostra a figura 72.

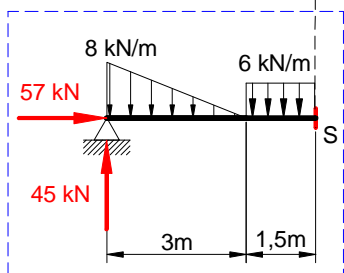
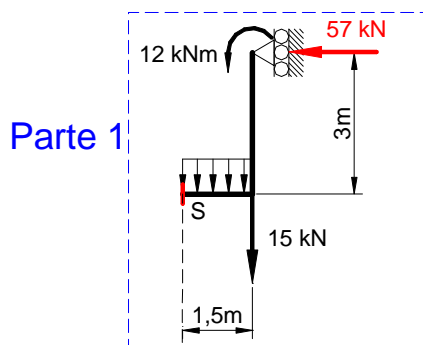


Figura 72

Da forma exposta no início deste capítulo, os esforços solicitantes que atuam na seção S, pertencente à parte 1 da estrutura, nada mais são do que a ação, nesta seção, dos esforços externos pertencentes à parte 2.

Da mesma forma, os esforços solicitantes que atuam na seção S, pertencente à parte 2 da estrutura, nada mais são do que a ação, nesta seção, dos esforços externos pertencentes à parte 1.

Assim, os esforços solicitantes que atuam na seção S pertencente à parte 1 da estrutura podem ser determinados pelos representados na figura 73.

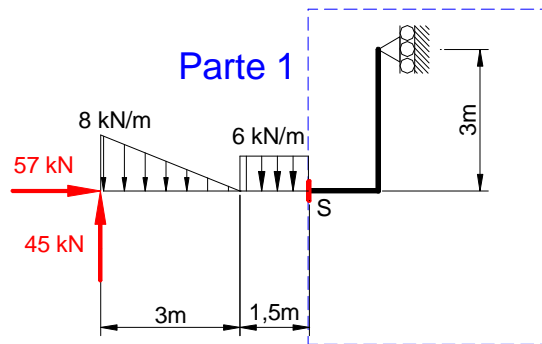


Figura 73

Determinando as resultantes das cargas distribuídas, se encontra:

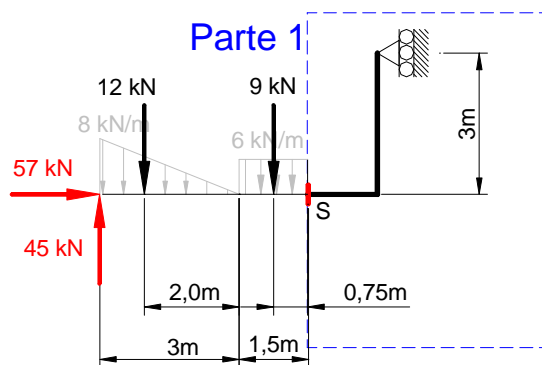


Figura 74

Deve-se lembrar que a ação dos esforços na seção S é igual à força resultante (horizontal e vertical) e ao momento resultante na seção, dos esforços representados na figura 74.

A ação destes esforços na seção S fica, então, igual a uma força horizontal, para a direita, igual a 57 kN; uma força vertical, para cima, igual a 24 kN e um momento de sentido horário igual a 153,75 kNm. Isto pode ser observado na figura 75.

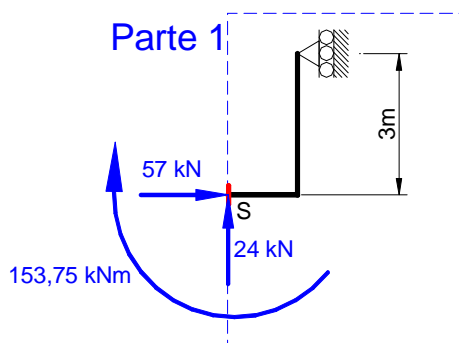


Figura 75

Da mesma maneira, os esforços solicitantes que atuam na seção S pertencente à parte 2 da estrutura podem ser determinados pelos representados na figura 76.

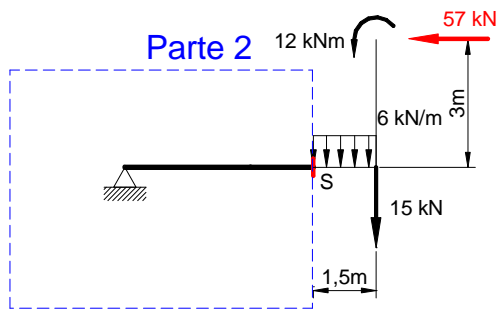


Figura 76

Determinando a resultante da carga distribuída, se encontra:

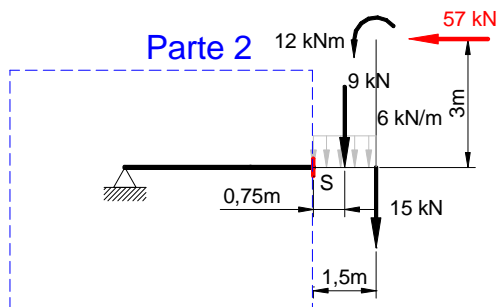


Figura 77

A ação destes esforços na seção S fica, então, igual a uma força horizontal, para a esquerda, igual a 57 kN; uma força vertical, para baixo, igual a 24 kN e um momento de sentido anti-horário igual a 153,75 kNm. Isto pode ser observado na figura 78.

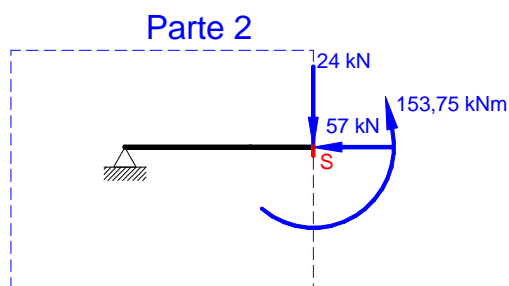


Figura 78

4.2. Classificação dos Esforços Internos Solicitantes.

Ao se comparar as figuras 75 e 78, se observa que os esforços encontrados, na seção S pertencente a cada parte, possuem a mesma intensidade e sentidos inversos. Isto ocorre, pois a estrutura está em equilíbrio e uma parte, por meio da seção, equilibra a outra e para que o equilíbrio ocorra é necessário que estes esforços tenham a mesma intensidade e sentidos inversos.

Embora os sentidos sejam inversos, a posição relativa à seção é a mesma: a força de 57 kN tem direção normal ao plano da seção e a está “empurrando”; a direção da força de 24 kN está contida no plano da seção e faz com que a seção S gire no sentido horário, em relação ao apoio da parte, e o momento de 153,75 kNm, que está em um plano perpendicular ao plano da seção, faz com que a parte inferior de S venha para a frente e a parte superior vá para trás.

Torna-se possível, então, em função da posição relativa à seção classificar os esforços internos solicitantes que são:

- **FORÇA NORMAL (N):**- força cuja direção é normal ao plano da seção.
- **FORÇA CORTANTE (V):**- força cuja direção está contida no plano da seção.
- **MOMENTO FLETOR (M):**- momento contido em um plano perpendicular ao plano da seção.
- **MOMENTO DE TORÇÃO (T):**- momento contido no plano da seção

No exemplo estudado, a força de 57 kN é uma Força Normal (N); a força de 24 kN é uma Força Cortante (V) e o momento de 153,75 kNm é um Momento Fletor (M).

Note-se, também, que os sentidos dos esforços que atuam na seção poderiam ser diferentes. Por exemplo, a Força Normal de 57 kN, poderia estar “puxando” a seção ao invés de “empurrar”.

Faz-se necessário, então, estabelecer uma convenção de sinais que possibilite identificar a ação dos esforços solicitantes nas seções. Esta convenção está estabelecida nas figuras 79 e 80.

Força Normal (N)	Força Cortante (V)
<p>Tração</p>	
<p>Compressão</p>	

Figura 79

Momento Fletor (M)	Momento de Torção (T)

Figura 80

Com esta convenção é possível dizer que os esforços solicitantes na seção do exemplo 5 são:

$$N = -57\text{kN}$$

$$V = 24\text{kN}$$

$$M = 153,7\text{kNm}$$

Observe-se que este resultado se obtém estudando qualquer uma das partes da estrutura, não sendo necessária, também, a realização do estudo para as duas partes. Ao ser determinado o esforço na seção, em uma das partes, este é o mesmo, nesta seção, na outra das partes.

Note-se que é possível a determinação dos esforços solicitantes em qualquer seção da estrutura.

Nos exemplos a seguir são determinados os esforços solicitantes em algumas seções selecionadas.

4.3. Exemplos.

6. Determinar os esforços solicitantes que ocorrem nas seções S_1 ; S_2 e S_3 da barra representada na figura 81.

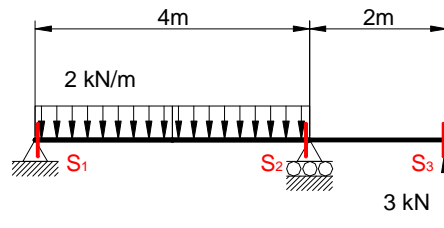


Figura 81

Solução:

Antes de tudo, é necessário que a estrutura esteja em equilíbrio, assim, é imprescindível determinar as reações de apoio que nela ocorrem.

De acordo com o visto no item 3, a estrutura com as reações de apoio que a equilibram fica:

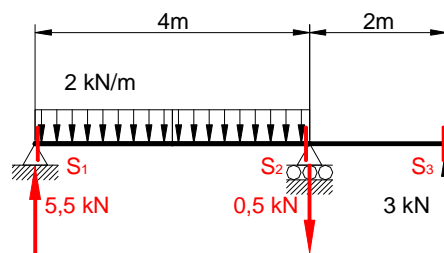


Figura 82

Para a determinação dos esforços solicitantes na seção S_1 , vamos dividir a estrutura em duas partes pela seção e estudar a ação dos esforços externos de uma das partes na seção S_1 pertencente à outra das partes.

A figura 83 mostra a parte que fica à esquerda da seção e os esforços da parte que fica à direita.

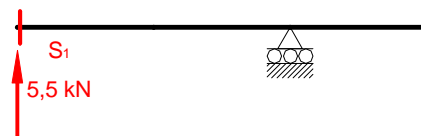


Figura 83

Desta maneira os esforços solicitantes na seção S_1 são:

$$N = 0$$

$$V = 5,5\text{kN}$$

$$M = 0$$

Fazendo o esmo para a seção S_2 e tomando os esforços da parte que fica à esquerda de S_2 , se encontra:

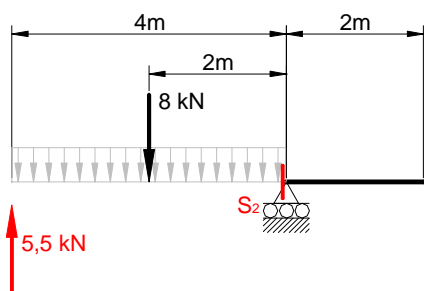


Figura 84

Desta maneira os esforços solicitantes na seção S_2 são:

$$N = 0 \quad V = -2,5 \text{ kN} \quad M = 6 \text{ kNm}$$

Para a seção S_3 , é possível fazer um estudo semelhante ao feito para a seção S_1 com a diferença de tomar os esforços externos que ficam na parte que fica à direita da seção.

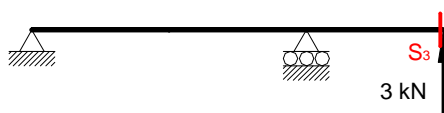


Figura 85

Desta maneira os esforços solicitantes na seção S_3 são:

$$N = 0 \quad V = -3 \text{ kN} \quad M = 0$$

Com estes resultados é possível montar a tabela 1

Tabela 1 – Resultados do Exemplo 6

	S1	S2	S3
N (kN)	0	0	0
V (kN)	5,5	-2,5	-3
M (kNm)	0	6 (TB)	0

Obs.: - Na tabela 1, a o momento atuante na seção S_2 não está acompanhado do sinal correspondente; em vez disto, existem as letras **TB**. O par de letras TB indica o lado da seção que está sofrendo **T**ração; neste caso é o lado de **B**aixo da seção. Caso a tração fosse do lado de cima da seção as letras seriam TC.

7. Determinar os esforços solicitantes que ocorrem nas seções S_1 ; S_2 e S_3 da barra representada na figura 86.

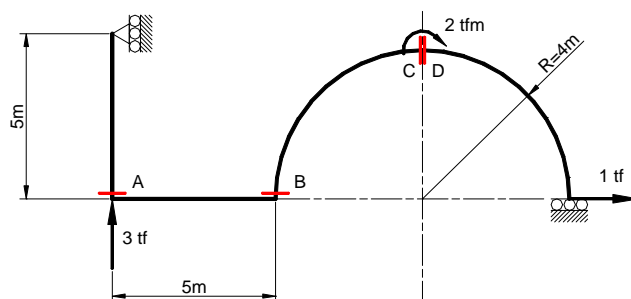


Figura 86

A estrutura com as reações de apoio que a equilibram fica:

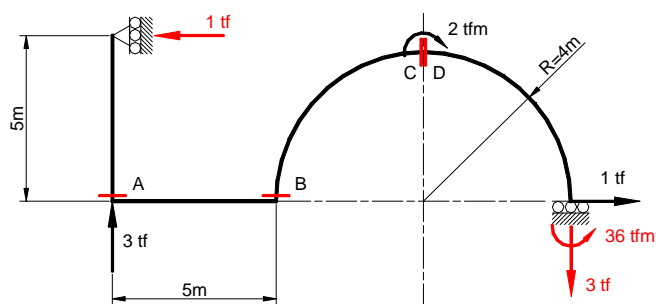


Figura 87

Para a determinação dos esforços que atuam na seção A, é possível tomar os esforços que ficam na parte acima de A. Assim, se tem:

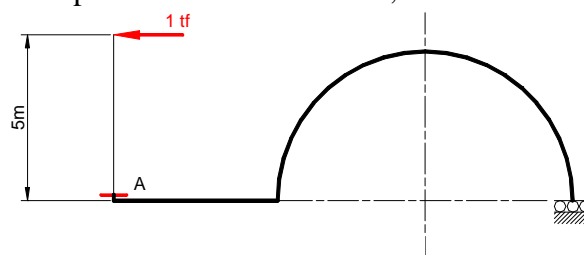


Figura 88

Desta maneira os esforços solicitantes na seção A são:

$$N = 0 \quad V = -1 \text{ tf} \quad M = 5 \text{ tfm (TD)}$$

Para a determinação dos esforços que atuam na seção B, é possível tomar os esforços que ficam na parte abaixo de B. Assim, se tem:

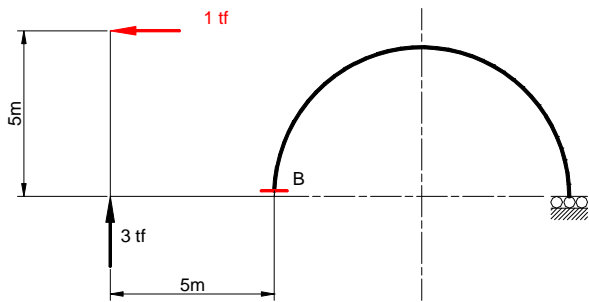


Figura 89

Desta maneira os esforços solicitantes na seção B são:

$$N = -3tf \quad V = 1tf \quad M = 10tfm(TD)$$

Para a determinação dos esforços que atuam na seção C, é possível tomar os esforços que ficam à direita de C. Assim, se tem:

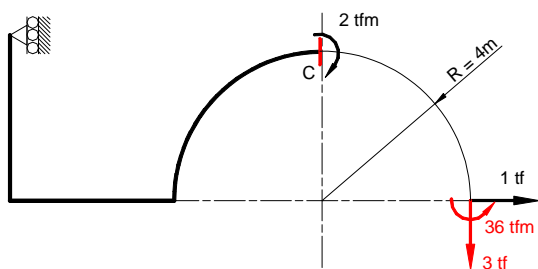


Figura 90

Desta maneira os esforços solicitantes na seção C são:

$$N = 1tf \quad V = 3tf \quad M = 26tfm(TB)$$

Finalmente, para a determinação dos esforços que atuam na seção D, é possível tomar os esforços que ficam à esquerda de D. Desta maneira, se encontra:

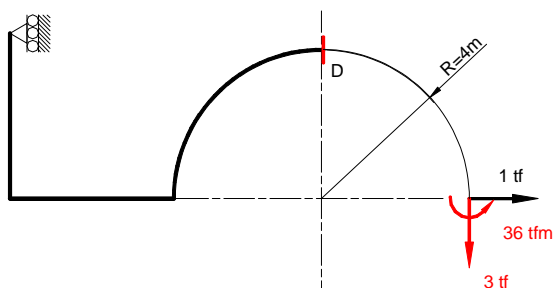


Figura 91

Sendo assim, os esforços solicitantes na seção D são:

$$N = 1tf \quad V = 3tf \quad M = 28tfm(TB)$$

Com estes resultados é possível montar a tabela 2

Tabela 2 – Resultados do Exemplo 7

SEÇÃO	N (tf)	V (tf)	M (tfm)	
A	0	-1	5	TD
B	-3	1	10	TB
C	1	3	26	TB
D	1	3	28	TB

8. Determinar os esforços solicitantes que ocorrem nas seções S₁; S₂; S₃ e S₄ da barra representada na figura 92.

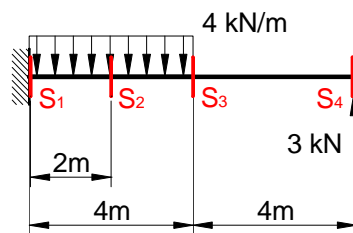


Figura 92

Como seção inicial para o estudo, será tomada a seção 4. Note que, ao se tomar os esforços à esquerda da seção, não se faz necessária a determinação das reações que ocorrem no engastamento. Sendo assim, se tem:

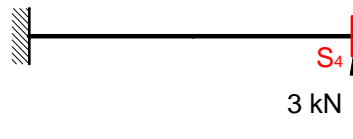


Figura 93

Os esforços solicitantes na seção S₄ são:

$$N = 0 \quad V = -3kN \quad M = 0$$

Para a seção S₃, tomando os esforços na parte que fica à esquerda da seção, se tem:

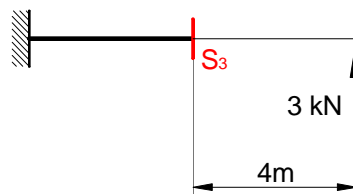


Figura 94

Os esforços solicitantes na seção S₃ são:

$$N = 0 \quad V = -3kN \quad M = 12kNm(TB)$$

Para a seção S₂, tomando os esforços na parte que fica à esquerda da seção, se tem:

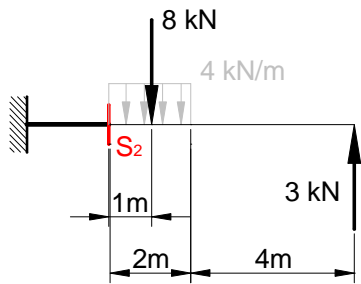


Figura 95

Os esforços solicitantes na seção S_2 são:

$N = 0$ $V = 5 \text{ kN}$ $M = 10 \text{ kNm(TB)}$

Para a seção S_1 , tomando os esforços na parte que fica à esquerda da seção, se tem:

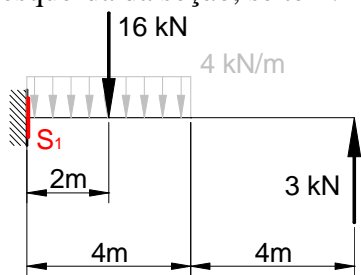


Figura 96

Os esforços solicitantes na seção S_1 são:

$N = 0$ $V = 13 \text{ kN}$ $M = 8 \text{ kNm(TC)}$

Com estes resultados é possível montar a tabela 3

Tabela 3 – Resultados do Exemplo 8

	S1	S2	S3	S4
N (kN)	0	0	0	0
V (kN)	13	5	-3	-3
M (kNm)	8 (TC)	10 (TB)	12 (TB)	0

Obs.: - De uma maneira geral, quando uma estrutura é engastada, em uma de suas extremidades, não é necessário determinar as reações de apoio para o conhecimento dos esforços solicitantes. Para tal, basta estudar de forma que sejam tomados os esforços da parte que não contenha o engastamento.

9. Determinar os esforços solicitantes que ocorrem nas seções S_1 ; S_2 ; S_3 e S_4 da barra representada na figura 97.

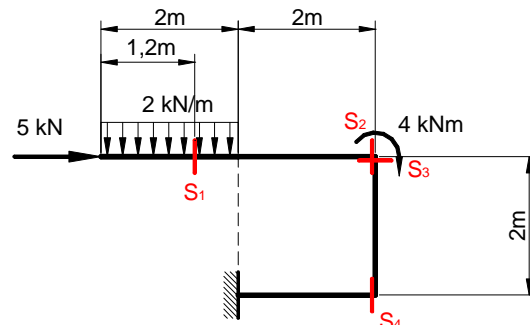


Figura 97

Usando o que foi dito na observação do exercício 8, para a seção S_1 , é possível usar os esforços à esquerda da seção; com isto se tem:

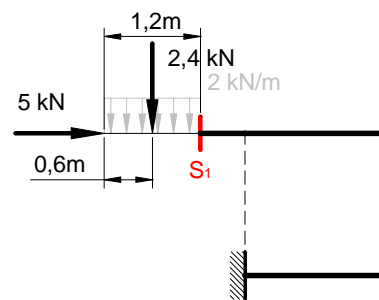


Figura 98

Os esforços solicitantes na seção S_1 são:

$N = -5 \text{ kN}$ $V = -2,4 \text{ kN}$ $M = 1,44 \text{ kNm(TC)}$

Para a seção S_2 se encontra:

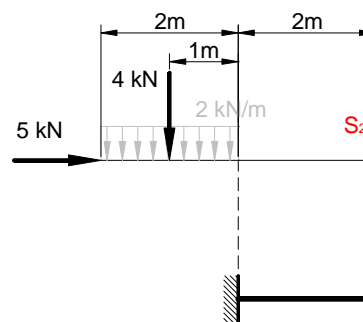


Figura 99

Os esforços solicitantes na seção S_2 são:

$N = -5 \text{ kN}$ $V = -4 \text{ kN}$ $M = 12 \text{ kNm(TC)}$

Para a seção S_3 se encontra:

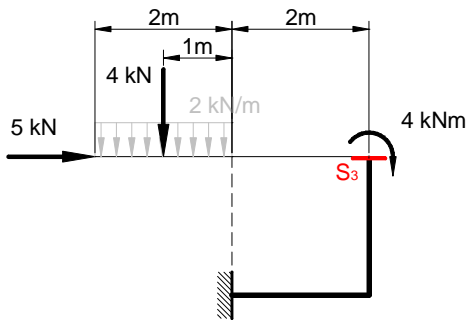


Figura 100

Os esforços solicitantes na seção S_3 são:

$N = -4\text{kN}$ $V = 5\text{kN}$ $M = 8\text{kNm(TD)}$

Para a seção S_4 se encontra:

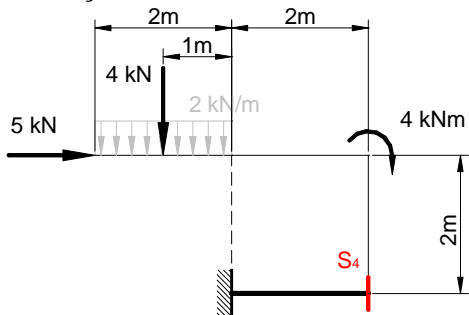


Figura 101

Os esforços solicitantes na seção S_4 são:

$N = 5\text{kN}$ $V = 4\text{kN}$ $M = 2\text{kNm(TC)}$

Com estes resultados é possível montar a tabela 4

Tabela 4 – Resultados do Exemplo 9

	S1	S2	S3	S4
N (kN)	-5	-5	-4	5
V (kN)	-2,4	-4	5	4
M (kNm)	1,44 (TC)	12 (TC)	8 (TD)	2 (TC)

4.4. Exercícios.

16. Determinar os esforços solicitantes nas seções indicadas na estrutura da figura 102.

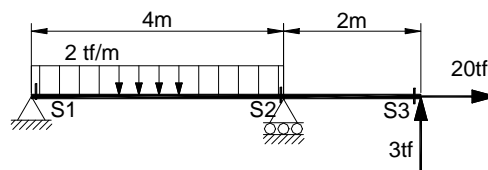


Figura 102

Resposta:

	S1	S2	S3
N (tf)	20	20	20
V (tf)	5,5	-2,5	-3
M (tfm)	0	6 (TB)	0

17. Determinar os esforços solicitantes nas seções indicadas na estrutura da figura 103.

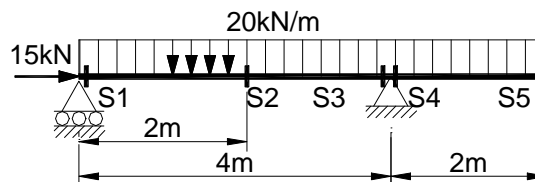


Figura 103

Resposta:

	S1	S2	S3	S4	S5
N (kN)	-15	-15	-15	0	0
V (kN)	30	-10	-50	40	0
M (kNm)	0	20 (TB)	40 (TC)	40 (TC)	0

18. Determinar os esforços solicitantes nas seções indicadas na estrutura da figura 104.

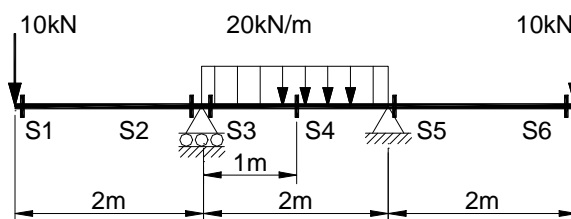


Figura 104

Resposta:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
N (kN)	0	0	0	0	0	0
V (kN)	-10	-10	20	0	10	10
M (kNm)	0	20 (TC)	20 (TC)	10 (TC)	20 (TC)	0

19. Determinar os esforços solicitantes nas seções indicadas na estrutura da figura 105.

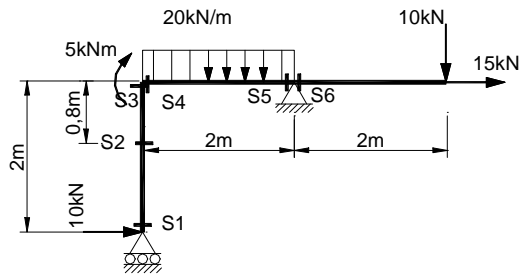


Figura 105

Resposta:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
N (kN)	-17,5	-17,5	-17,5	-10	-10	15
V (kN)	-10	-10	-10	17,5	-12,5	10
M (kNm)	0	12 (TE)	20 (TE)	15 (TB)	20 (TC)	20 (TC)

20. Determinar os esforços solicitantes nas seções indicadas na estrutura da figura 106.

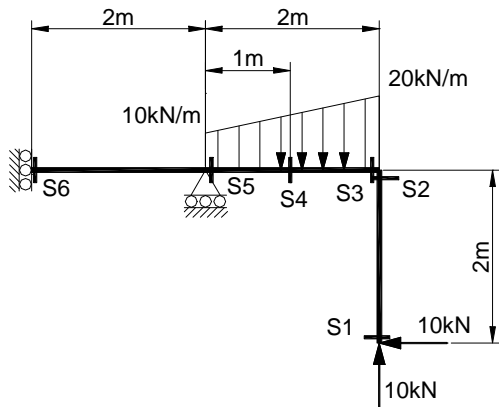


Figura 106

Resposta:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
N (kN)	-10	-10	-10	-10	-10	-10
V (kN)	10	10	-10	-2,5	20	0
M (kNm)	0	20 (TD)	20 (TC)	19,1 (TC)	33,3 (TC)	33,3 (TC)

21. Determinar os esforços solicitantes nas seções indicadas na estrutura da figura 107.

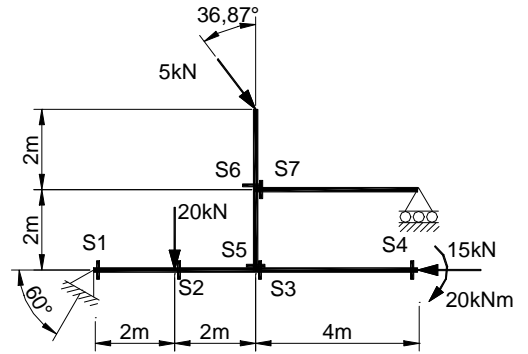


Figura 107

Resposta:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
N (kN)	-12	-12	-15	-15	4	-4	0
V (kN)	16	-4	0	0	3	3	-8
M (kNm)	0	32 (TB)	20 (TC)	20 (TC)	44 (TD)	6 (TE)	32 (TB)

22. Determinar os esforços solicitantes nas seções indicadas na estrutura da figura 108.

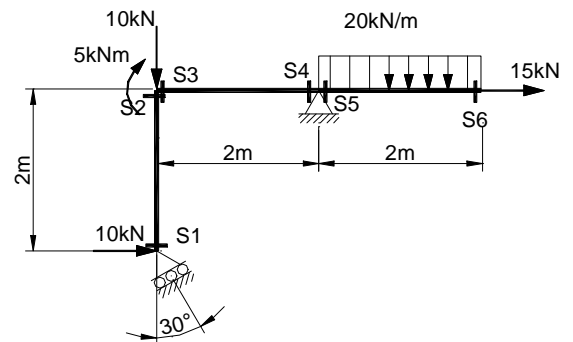


Figura 108

Resposta:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
N (kN)	1,6	1,6	-10,9	-10,9	15	15
V (kN)	-10,9	-10,9	-11,6	-11,6	40	0
M (kNm)	0	21,8 (TE)	16,8 (TC)	40 (TC)	40 (TC)	0

5. Linhas de Estado.

Como foi visto no capítulo anterior, os esforços solicitantes estão associados à seção transversal, isto é, mudando a seção pode ocorrer a mudança do(s) esforço(s).

Desta forma é possível determinar como cada tipo de esforço varia, de seção em seção, ao longo dos eixos das barras de uma estrutura. Esta variação pode ser mostrada graficamente usando os eixos das barras como eixos das abscissas e os esforços representados nos eixos das ordenadas.

Sendo assim é possível traçar, para cada tipo de esforço, um gráfico que mostra como este esforço varia ao longo do comprimento do(s) eixo(s) da(s) barra(s). Estes gráficos, que representam as funções de variação dos esforços, recebem o nome de **Diagramas de Esforços Solicitantes** ou **Linhas de Estado**.

As funções que representam os esforços solicitantes são contínuas em trechos; por este motivo, traçamos estes diagramas em um trecho de cada vez. Um **trecho** é o conjunto de seções limitado por seções onde:

- Aparece, ou desaparece, um esforço ou uma barra e/ou
- Ocorre mudança na lei que rege a direção do eixo da barra.

As seções que limitam um trecho são chamadas de **seções limites do trecho**.

Para apresentar os diagramas de esforços solicitantes, se fará uso do exemplo numérico.

5.1. Exemplo.

10. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 109

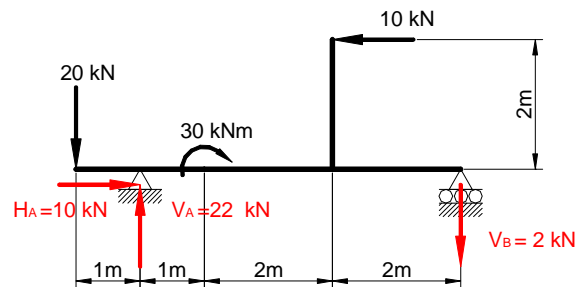


Figura 109

Nesta figura a estrutura em estudo é equilibrada pelas reações de apoio V_A ; H_A e V_B .

Quando se observa a estrutura da figura 109, são identificados os cinco trechos mostrados na tabela 5.

Tabela 5 – Seções limites da estrutura da figura 109

TRECHO	SEÇÕES LIMITES
1	A – B
2	C – D
3	E – F
4	G - H
5	I - J

Estas seções estão representadas na figura 110.

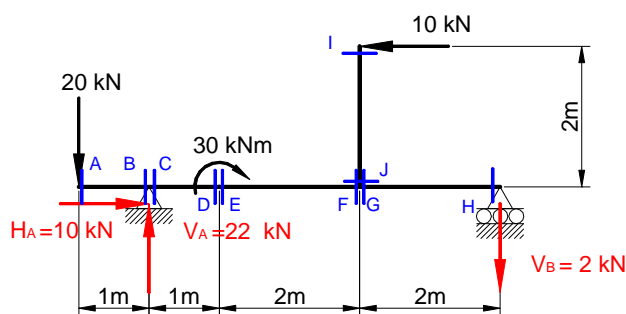


Figura 110

Para saber que tipo de função será desenhada, será necessário escrevê-la para o trecho em estudo. Para tanto, se toma uma seção qualquer S , que esteja no trecho e se determina os esforços solicitantes para esta seção.

Seja, por exemplo, a seção S , do trecho A – B, representada na figura 111.

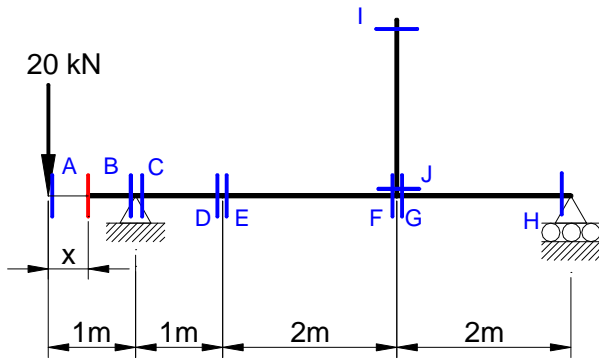


Figura 111

Os esforços solicitantes na seção S são:

$N = 0$ $V = -20\text{kN}$ $M = (-)20\text{kN} \times x(\text{TC})$

Tomando-se como origem a seção A, se observa que em qualquer seção entre A e B a força normal será sempre igual a zero e a força cortante será sempre igual a -20kN. Isto ocorre, pois estes dois esforços não dependem da distância x. Com relação ao momento fletor, se nota que ele varia linearmente com x sendo que, na seção A (x = 0) o momento fletor é nulo e na seção B ele vale -20kNm (TC).

Sendo assim, a representação gráfica da função que representa a variação da força normal é um segmento de reta que representa uma função constante, isto é, este segmento de reta deve ser paralelo ao eixo das abscissas. O mesmo pode ser dito para a representação gráfica da função que representa a variação da força cortante.

Quanto ao momento fletor, sua representação gráfica deve ser feita por uma reta que na seção A tem ordenada igual a zero e na seção B tem ordenada igual a -20kNm.

De uma maneira geral, para traçar a representação gráfica da função que representa a variação de um esforço solicitante em um trecho basta:

- Calcular o valor do esforço solicitante em estudo nas seções limites do trecho;
- Marcar estes valores, em uma determinada escala, nas posições dos eixos em que se encontram os centros de gravidade destas seções e

- Unir com a função correspondente estes valores marcados, hachurando perpendicularmente ao eixo.

Com isto, para o trecho A – B, os valores nas seções limites são os representados na tabela 6.

Tabela 6 – Resultados para o trecho A - B

	A	B
N (kN)	0	0
V (kN)	-20	-20
M (kNm)	0	(-)20 (TC)

Para este trecho então os valores marcados nas seções limites, unidos pela função correspondente e hachurados, ficam:

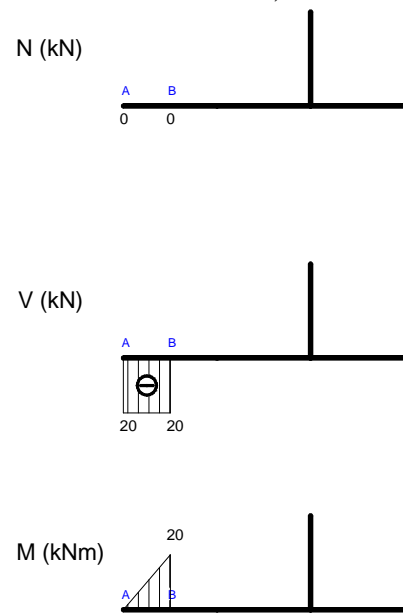


Figura 112

Para o trecho C – D, os valores nas seções limites são os representados na tabela 7.

Tabela 7 – Resultados para o trecho C - D

	C	D
N (kN)	-10	-10
V (kN)	2	2
M (kNm)	(-)20 (TC)	(-)18 (TC)

Para este trecho então os valores marcados nas seções limites, unidos pela função correspondente e hachurados, junto com o trecho anteriormente determinado, ficam:

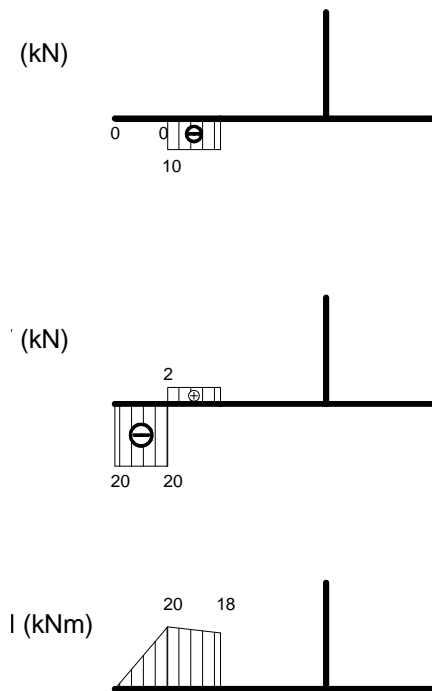


Figura 112

Para o trecho E – F, os valores nas seções limites são os representados na tabela 8.

Tabela 8 – Resultados para o trecho E - F

	E	F
N (kN)	-10	-10
V (kN)	2	2
M (kNm)	12 (TB)	16 (TB)

Para este trecho então os valores marcados nas seções limites, unidos pela função correspondente e hachurados, junto com os trechos anteriormente determinados, ficam:

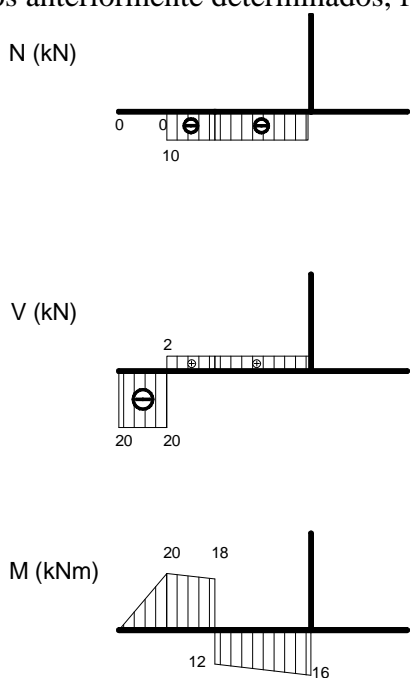


Figura 113

Para o trecho G – H, os valores nas seções limites são os representados na tabela 9.

Tabela 9 – Resultados para o trecho G - H

	G	H
N (kN)	0	0
V (kN)	2	2
M (kNm)	(-) 4 (TC)	0

Para este trecho então os valores marcados nas seções limites, unidos pela função correspondente e hachurados, junto com os trechos anteriormente determinados, ficam:

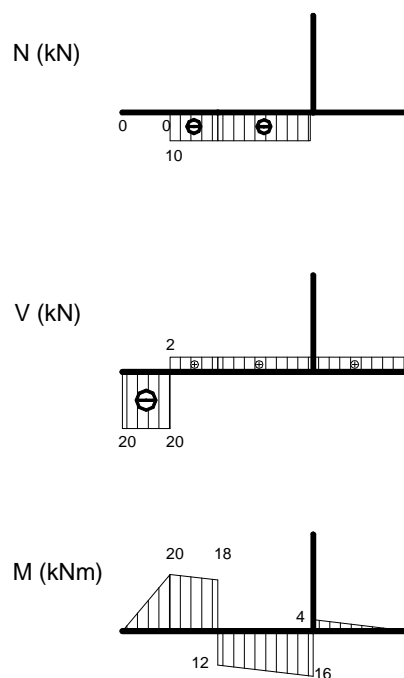


Figura 114

Para o trecho I – J, os valores nas seções limites são os representados na tabela 10.

Tabela 9 – Resultados para o trecho I - J

	I	J
N (kN)	0	0
V (kN)	-10	-10
M (kNm)	(-) 20 (TD)	0

Para este trecho então os valores marcados nas seções limites, unidos pela função correspondente e hachurados, junto com os trechos anteriormente determinados, ficam:

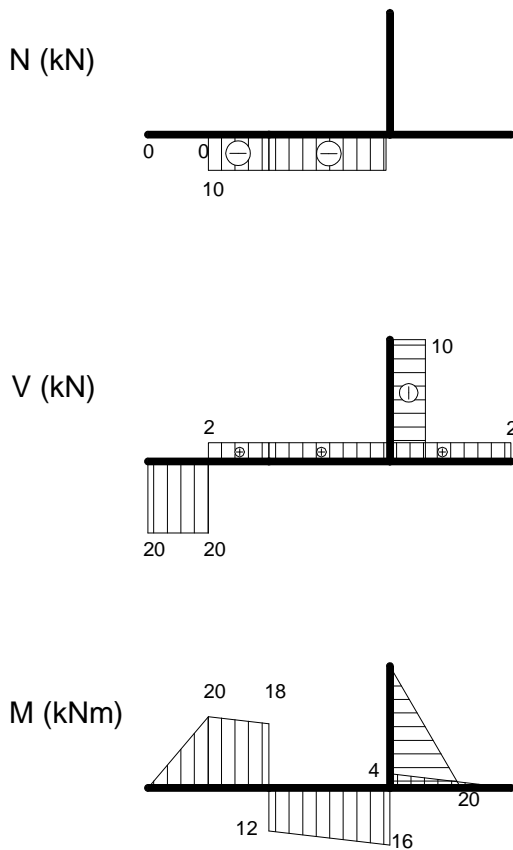


Figura 115

Obs.:-

- ◆ Note que o diagrama de momentos é traçado com a convenção de sinais inversa em relação aos demais.
- ◆ As hachuras perpendiculares ao eixo, em cada trecho, mostram para que trecho vale o desenho feito.
- ◆ Não é necessário preencher a tabela para as seções limites de cada trecho; basta marcar os valores do esforço destas seções no gráfico efetuado.

11. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 116.

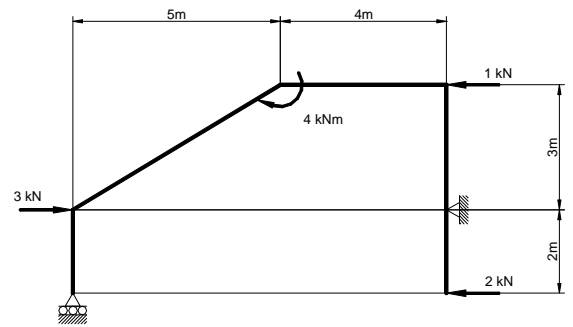


Figura 116

As reações de apoio que equilibram a estrutura estão representadas na figura 117.

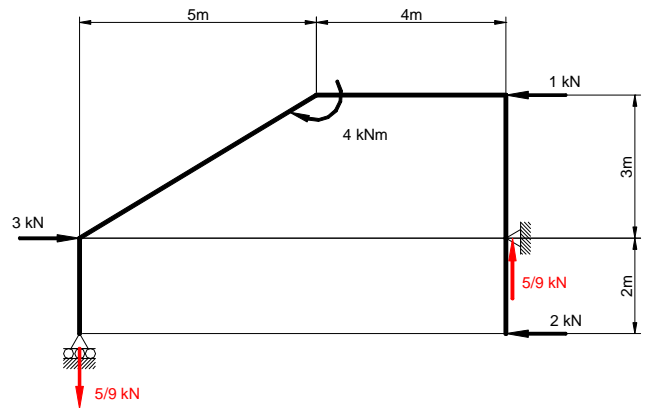
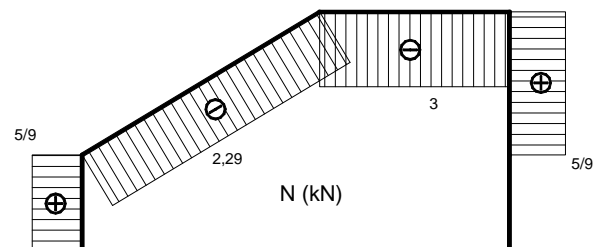


Figura 117

Os diagramas ficam:



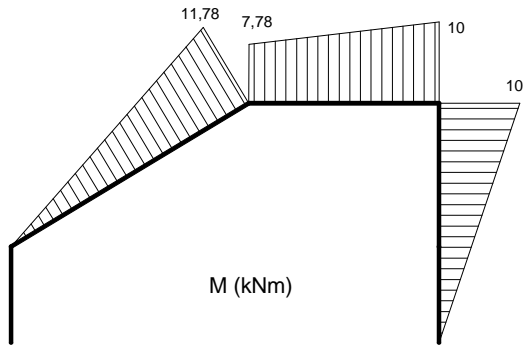
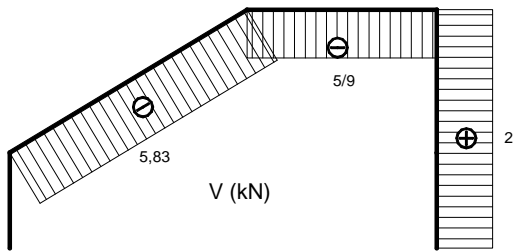


Figura 118

12. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 119.

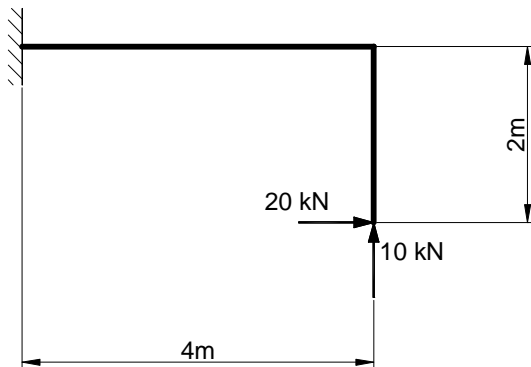


Figura 119

Lembrando que, quando uma estrutura é engastada, em uma de suas extremidades, não é necessário determinar as reações de apoio para o conhecimento dos esforços solicitantes, podemos passar para os diagramas, que estão representados na figura 120.

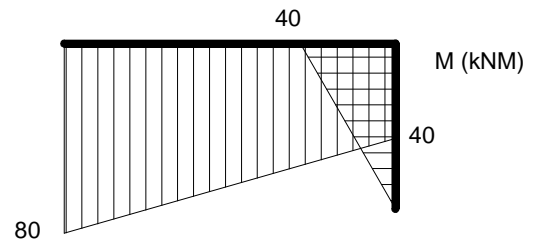
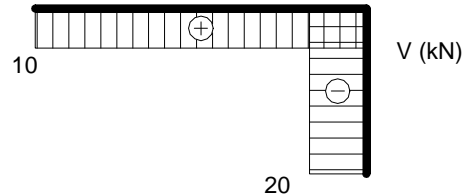
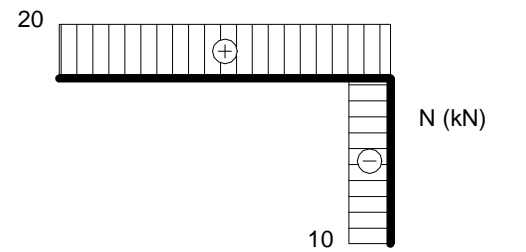


Figura 120

13. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 121.

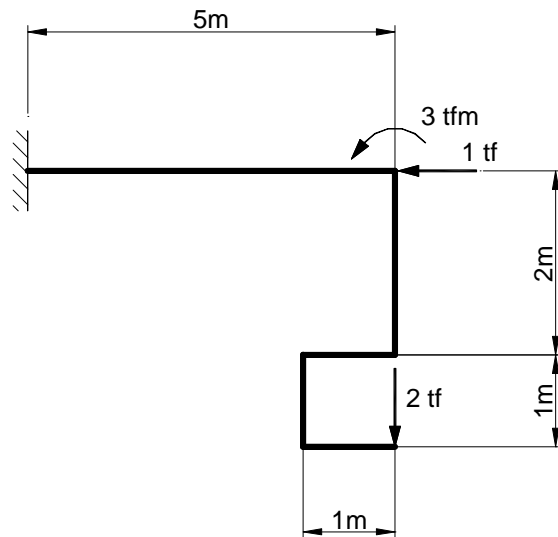


Figura 121

Lembrando, mais uma vez, que, quando uma estrutura é engastada, em uma de suas extremidades, não é necessário determinar as reações de apoio para o conhecimento dos esforços solicitantes, podemos passar para os diagramas, que estão representados na figura 122.

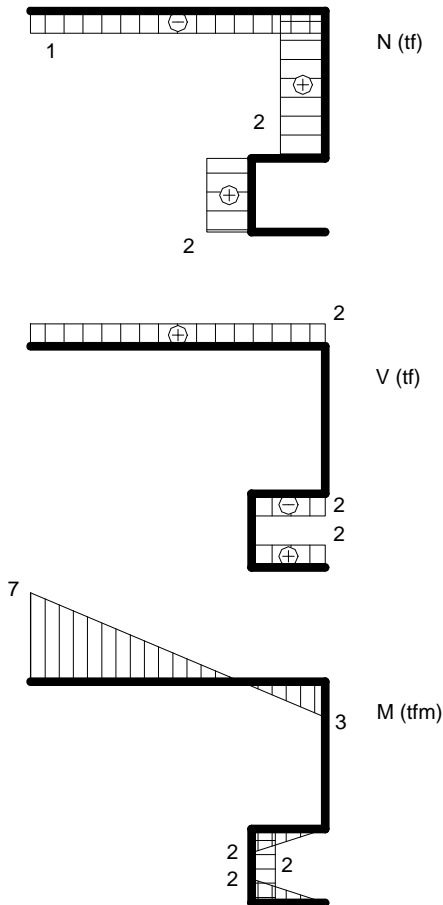


Figura 122

14. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 123.

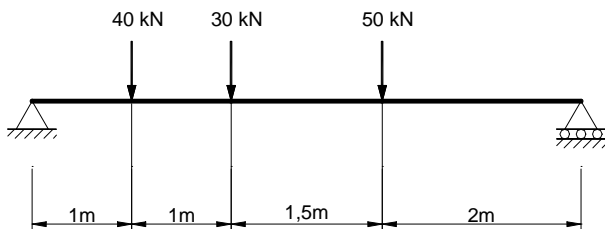


Figura 123

As reações de apoio ficam:

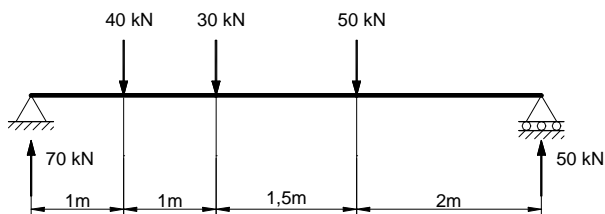


Figura 124

Os diagramas ficam:

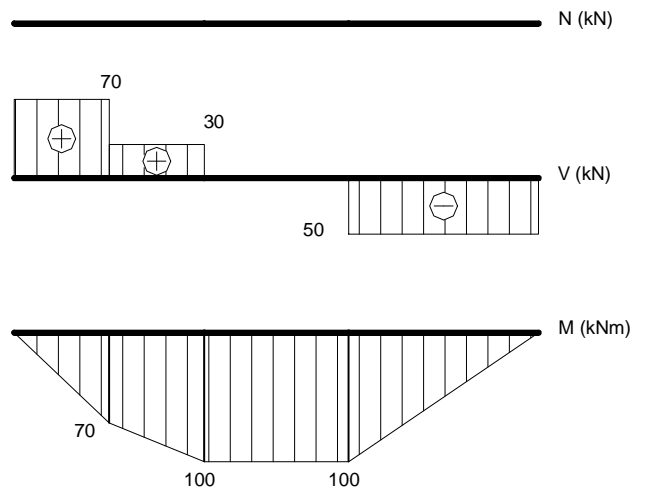


Figura 125

15. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 126.

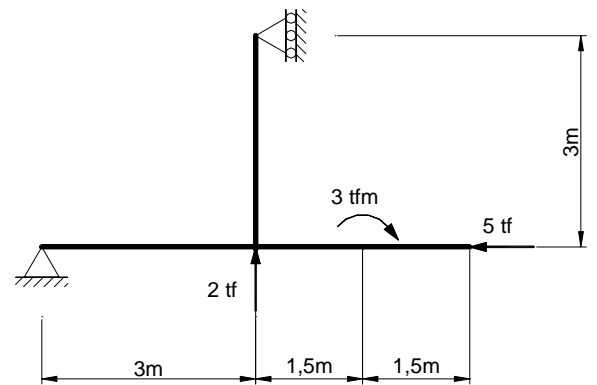


Figura 126

As reações de apoio ficam:

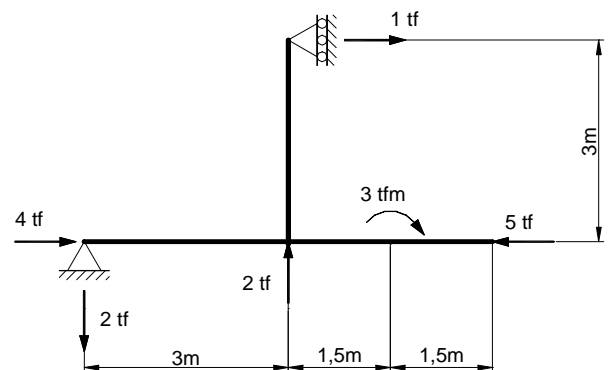


Figura 127

Os diagramas ficam:

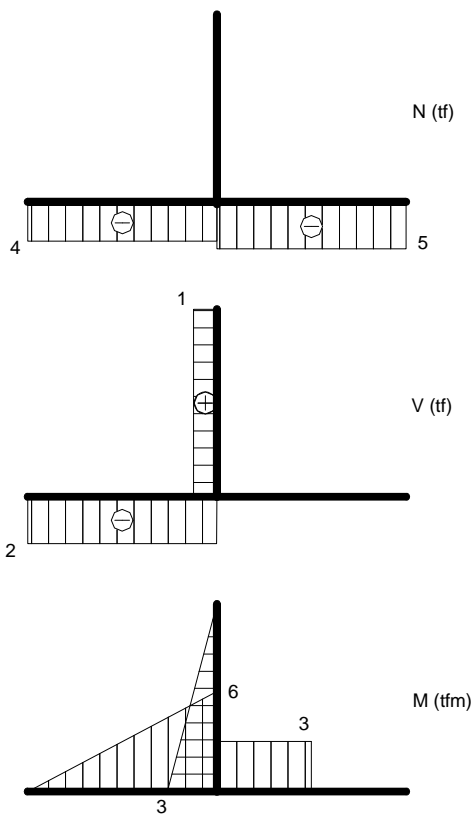


Figura 128

16. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 129.

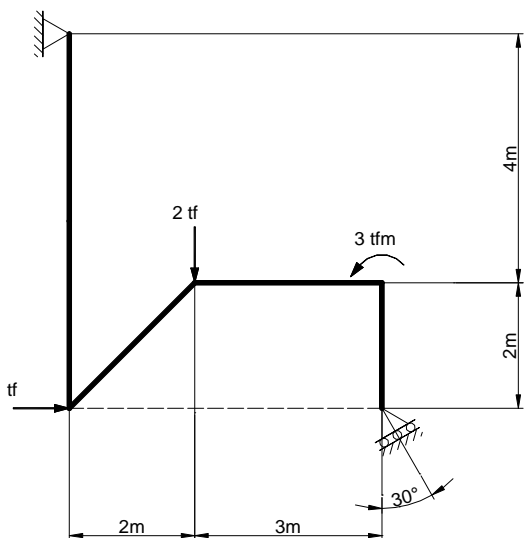


Figura 129

As reações de apoio ficam:

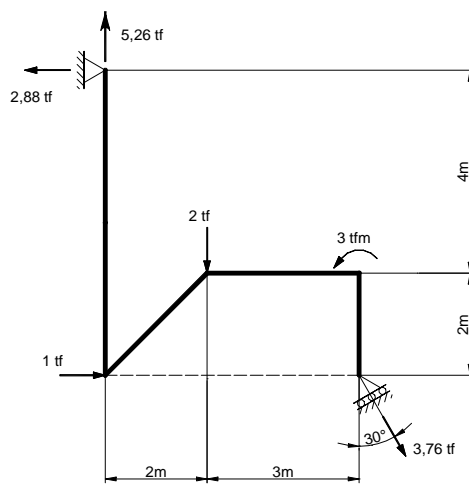
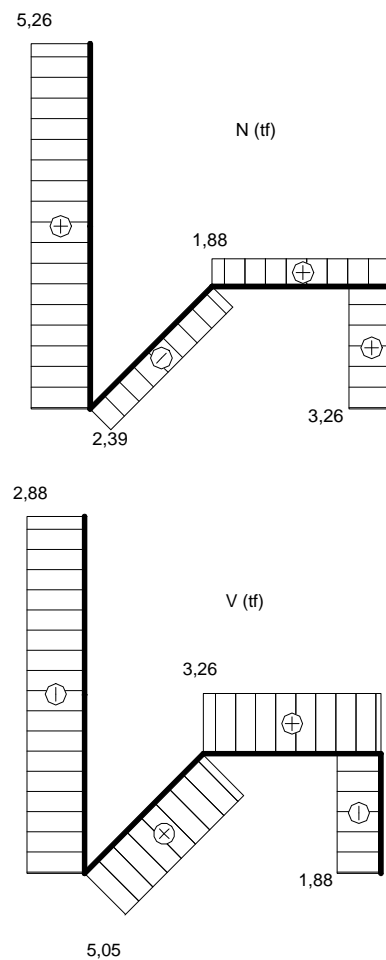


Figura 130

Os diagramas ficam:



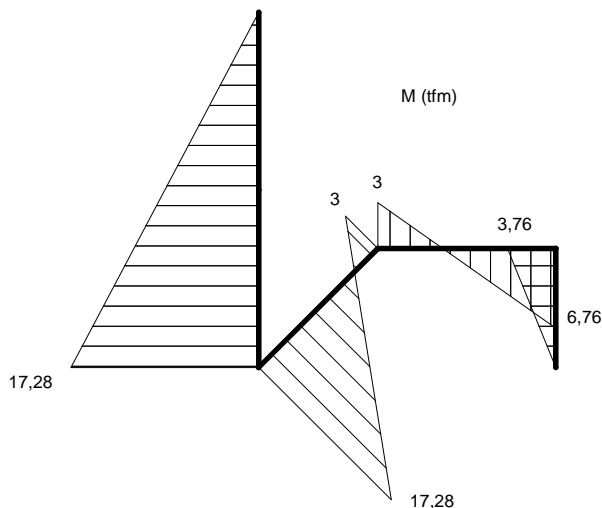


Figura 131

5.2. Equilíbrio de um Trecho Reto.

Como dito no início deste capítulo, é possível determinar como cada tipo de esforço solicitante varia ao longo dos eixos das barras de uma estrutura. A representação gráfica depende da função desta variação que depende dos esforços aplicados na estrutura.

Para que seja possível relacionar estas funções de variação com o tipo de esforços aplicado, será estudado um trecho de barra em equilíbrio, como o mostrado na figura 132.

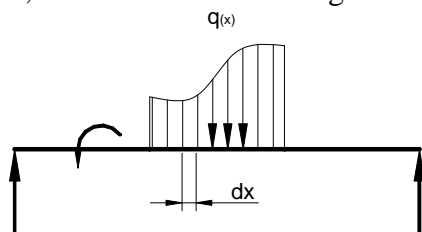


Figura 132

Quando se retira um trecho reto, desta barra, limitado por duas seções transversais infinitamente próximas entre si, ele também está em equilíbrio por meio dos esforços solicitantes que atuam em cada seção limite do trecho. Sendo assim, os esforços que atuam neste trecho são os representados na figura 133.

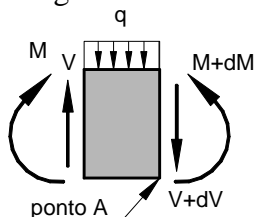


Figura 133

Aplicando-se as equações do equilíbrio para o elemento se encontra:

$$\sum F_H = 0$$

Note que não existem esforços horizontais no trecho em estudo.

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V - qdx - (V + dV) = 0 \Rightarrow$$

$$V - qdx - V - dV = 0 \Rightarrow$$

$$-qdx = dV \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = -q} \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M + Vdx - qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \Rightarrow$$

$$M + Vdx - \frac{qdx^2}{2} - M - dM = 0 \Rightarrow$$

Note que o termo $\frac{qdx^2}{2}$ é desprezível em relação aos demais, pois é um infinitésimo de segunda ordem e os outros são um infinitésimo de primeira ordem. Assim, a expressão fica:

$$M + Vdx - M - dM = 0 \Rightarrow$$

$$Vdx - dM = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V} \quad (2)$$

Quando se observa as expressões (1) e (2), é possível afirmar que:

- A derivada da função força cortante de um trecho reto é a menos de sinal, a força distribuída que existe neste trecho.
- A derivada da função momento fletor de um trecho reto é a função força cortante que existe neste trecho.

Desta forma, derivando a expressão (2) em relação a x se encontra:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -q \quad (3)$$

A expressão (3) mostra a relação diferencial entre o momento fletor; a força cortante e a carga aplicada. Isto nos permite construir a tabela 10.

Tabela 10 – Relação entre M; V e q.

q	V	M
Zero	Constante = zero	Constante
	Constante ≠ zero	Reta inclinada
Constante ≠ zero	Reta inclinada	Parábola
Reta inclinada	Parábola	Curva do 3°. grau

Outro ponto que vale a pena salientar é a forma integral desta relação. Quando se toma a expressão (2), sua forma integral é:

$$M = \int V dx + C \quad (4)$$

Onde C é a constante de integração.

Quando se analisa a expressão (4) se deve lembrar o significado gráfico de uma integral que é a área sob a curva, que representa a função de variação. Assim, a expressão (4) pode ser lida da seguinte forma: **“a área da cortante entre duas seções fornece a diferença entre os momentos fletores destas seções”**.

Do mesmo jeito, a forma integral da expressão (1) fica:

$$V = -\int q dx + C_1 \quad (5)$$

Onde C₁ é a constante de integração

Assim, a expressão (5) pode ser lida da seguinte forma: **“a área da força distribuída existente entre duas seções fornece a diferença entre as forças cortantes destas seções”**.

5.3. Exemplos.

11. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 134.

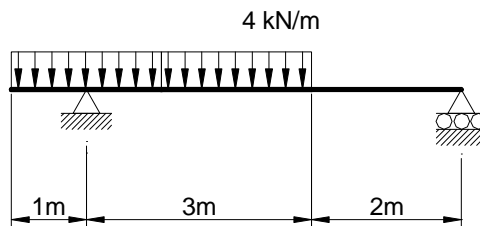


Figura 134

As reações de apoio que equilibram a estrutura são:

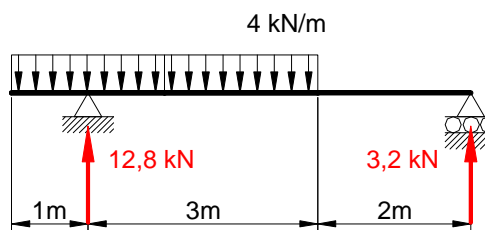


Figura 135

Nesta estrutura é possível identificar 3 trechos mostrados na tabela 11 e representados na figura 136.

Tabela 11 – Seções limites da estrutura da figura 134

TRECHO	SEÇÕES LIMITES
1	A – B
2	C – D
3	E – F

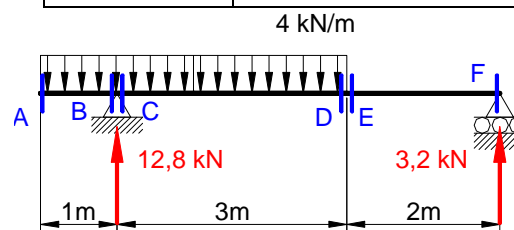


Figura 136

Observando a figura 136, se nota que não existe a presença de esforços externos que causam forças normais nas seções da estrutura. Sendo assim, o estudo será feito apenas para a força cortante e para o momento fletor.

Começando pelo trecho A – B; seja, por exemplo, a seção S, dentro deste trecho, representada na figura 137.

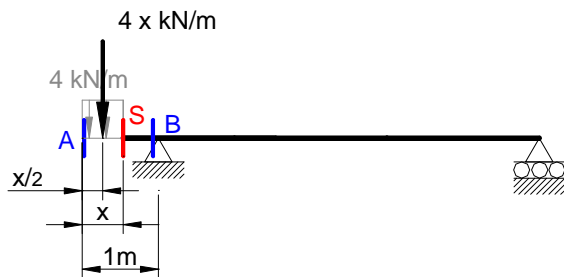


Figura 137

A força cortante e o momento fletor nesta seção são:

$$V = -4x \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad M = (-)2x^2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} (\text{TC})$$

A função força cortante varia linearmente com x e possui valor igual a zero para x igual a zero (seção A) e é igual a -4kN quando x é igual a 1m (seção B). Assim, o diagrama da força cortante no trecho A – B é um segmento de reta como o mostrado na figura 138.

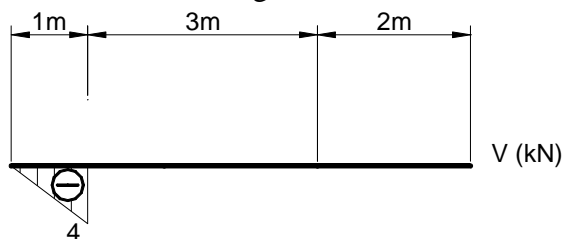


Figura 138

A função momento fletor é quadrada e possui valor igual a zero para x igual a zero (seção A) e é igual a -2kNm (TC) quando x é igual a 1m (seção B). Assim, o diagrama do momento fletor no trecho A – B é uma parábola como a mostrada na figura 139.

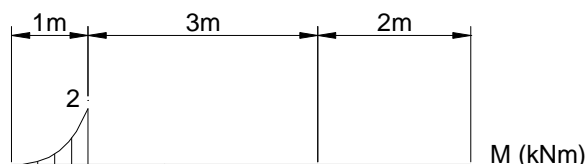


Figura 139

Para saber se o traçado deste diagrama está correto, pode ser feito o uso da expressão (2) que mostra a função força cortante como sendo a derivada da função momento fletor do trecho.

Lembra-se aqui que, no ponto em que a derivada de uma função é igual a zero, a função possui valor de máximo ou mínimo. Nesta situação a tangente à curva que representa a função é paralela ao eixo das abscissas.

No trecho em estudo, a força cortante é nula na seção A. isto significa que, para o trecho, este valor é mínimo e nele a parábola possui tangente paralela ao eixo das abscissas. Neste caso ela é coincidente. Assim, a única forma de traçar uma parábola entre os momentos das seções A e B, com a tangente à parábola coincidente com o eixo das ordenadas na seção A, é a mostrada na figura 139.

Uma forma prática para traçar este diagrama é usar a regra do elemento flexível. Para o uso desta regra, marcamos no diagrama os valores dos momentos nas seções que limitam o trecho; imaginamos existir um elemento flexível entre estes valores e imaginamos aplicada, no elemento flexível, a força distribuída existente no trecho. A forma do diagrama será semelhante à forma adquirida pelo elemento flexível deformado pela força distribuída. Isto pode ser observado na figura 140.

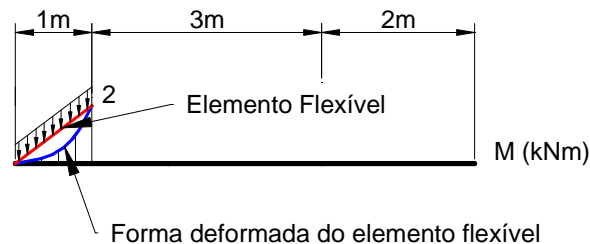


Figura 140

Para uma seção S dentro do trecho C – D se encontra:

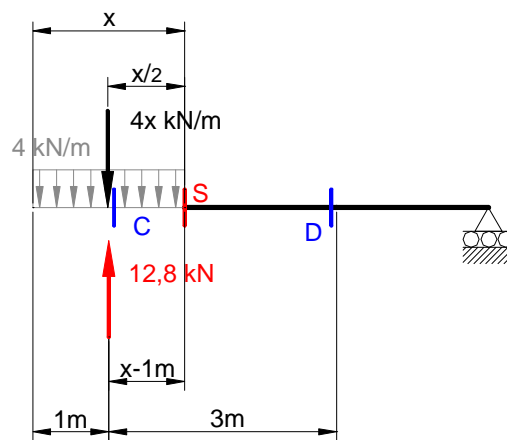


Figura 141

A força cortante e o momento fletor nesta seção são:

$$V = 12,8\text{kN} - 4x \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$M = 12,8x\text{kN(TB)} - 12,8\text{kNm}(-)2x^2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}(\text{TC})$$

A função força cortante é linear igual a 8,8kN para x igual a 1m (seção C) e igual a -3,2kN quando x é igual a 4m (seção D). Assim, o diagrama da força cortante no trecho C – D é um segmento de reta como o mostrado na figura 142.

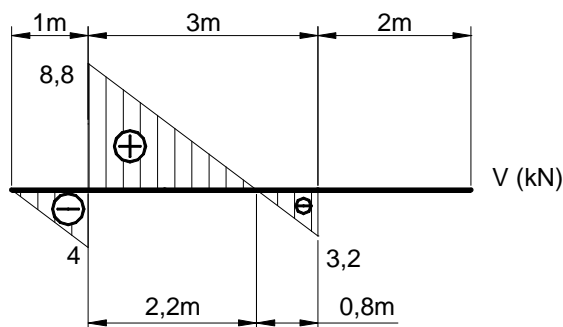


Figura 142

Note-se que neste trecho, existe uma seção onde a força cortante é igual a zero. Tem-se conhecimento que, nestas seções o momento fletor possui valor de máximo ou de mínimo para o trecho. A determinação da posição desta seção é feita se igualando a zero a função força cortante:

$$V = 12,8\text{kN} - 4x \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 0$$

$$12,8\text{kN} = 4x \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$x = 3,2\text{m}$$

Na figura 142 estão marcadas as distâncias entre esta seção e as seções C e D. Estas distâncias podem ser determinadas pelo quociente entre a força cortante que atua na seção e o valor da distribuição no trecho. Para esta seção a distância entre ela e a seção C é determinada por:

$$\chi = \frac{8,8\text{kN}}{4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} \Rightarrow \chi = 2,2\text{m}$$

A distância entre a seção de cortante nula e a seção D fica:

$$\chi = \frac{3,2\text{kN}}{4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} \Rightarrow \chi = 0,8\text{m}$$

A função momento fletor é quadrada e é igual a -2kNm (TC) para x igual a 1m (seção C) e ela é igual a 6,4kNm (TB) quando x é igual a 4m (seção D) e passa por um valor de máximo (ou mínimo) na seção onde a cortante se anula que é 7,68kNm (TB). Assim, o diagrama do momento fletor no trecho C – D é uma parábola como a mostrada na figura 143.

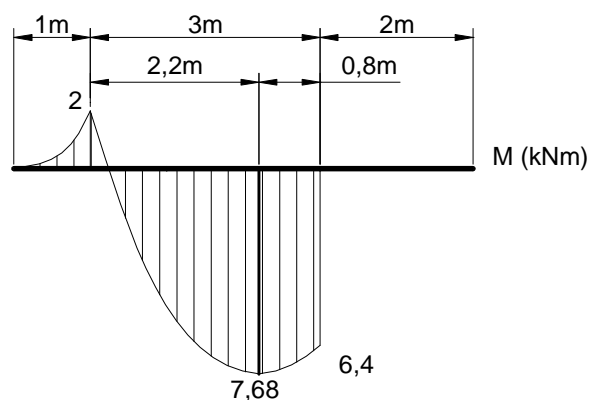


Figura 143

Para uma seção S dentro do trecho E – F se encontra:

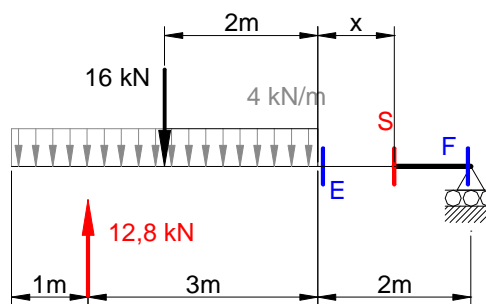


Figura 144

A força cortante e o momento fletor nesta seção são:

$$V = -3,2\text{kN}$$

$$M = 6,4\text{kNm(TB)} - 3,2x(\text{TC})$$

A função força cortante é constante e igual a -3,2kN para qualquer seção entre E e F. Assim, o diagrama da força cortante no trecho E – F é um segmento de reta como o mostrado na figura 145.

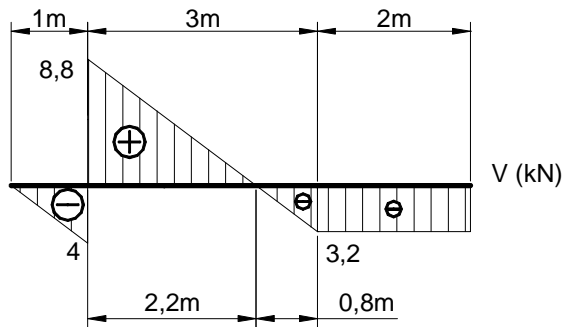


Figura 145

A função momento fletor é linear e igual a $6,4\text{kNm}$ (TB) para x igual a 0 (seção E) e igual a zero quando x é igual a 2m (seção F). Assim, o diagrama do momento fletor no trecho E – F é segmento de reta como o mostrado na figura 146.

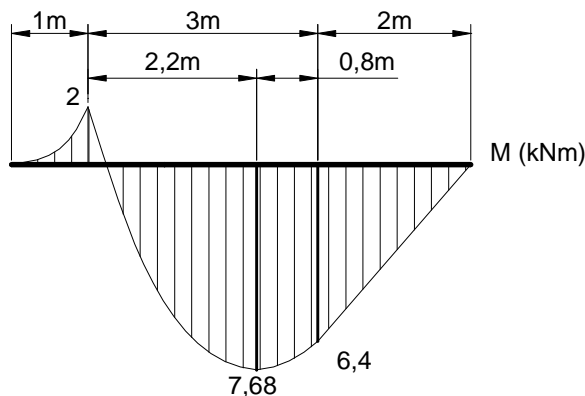


Figura 146

12. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 165.

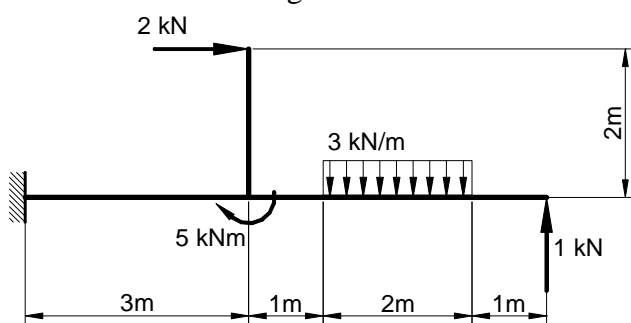


Figura 165

Para traçar as linhas de estado, basta determinar o valor dos esforços nas seções limites dos trechos e traçar o gráfico entre elas, respeitando o mostrado na tabela 10. Nesta estrutura é possível identificar 5 trechos, mostrados na tabela 12 e representados na figura 165.

Tabela 12 – Seções limites da estrutura da figura 165

TRECHO	SEÇÕES LIMITES
1	A – B
2	C – D
3	E – F
4	G – H
5	I – J

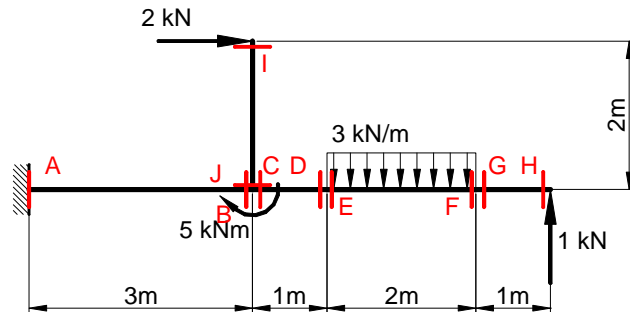


Figura 165

Os esforços solicitantes nas seções limites dos trechos estão indicados na tabela 13.

Tabela 13 – Esforços solicitantes nas seções limites

Seção	N (kN)	V (kN)	M (kNm)
A	2	5	-32 (TC)
B	2	5	-17 (TC)
C	0	5	-8 (TC)
D	0	5	-5 (TC)
E	0	5	-5 (TC)
F	0	-1	1 (TB)
G	0	-1	1 (TB)
H	0	-1	0
I	0	2	4 (TD)
J	0	2	0

O diagrama de forças normais está representado na figura 166

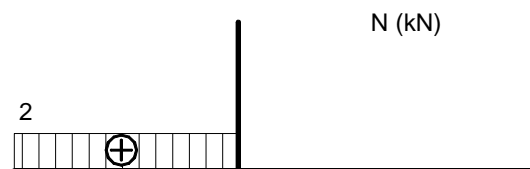


Figura 166

O diagrama de forças cortantes está representado na figura 167. Note-se que na seção S a força cortante é nula e sendo assim, o momento fletor nesta seção é máximo, ou mínimo, para o trecho. Com isto o diagrama de momentos fletores fica como o mostrado na figura 167.

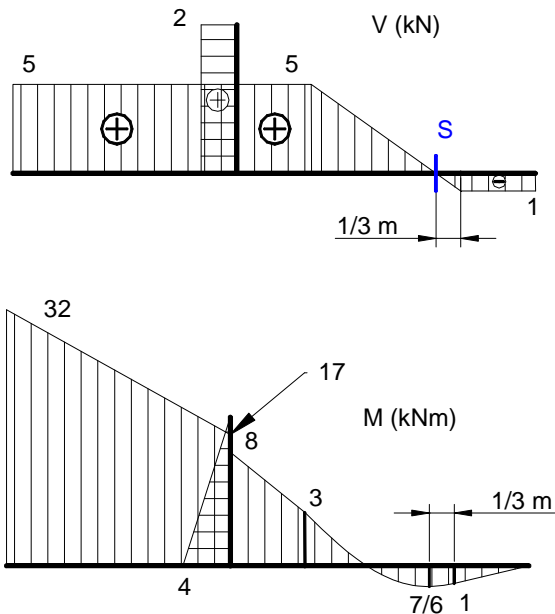


Figura 167

O diagrama das cortantes, também pode ser construído lembrando que a área da função cortante entre duas seções fornece a diferença entre os momentos fletores destas seções.

Na figura 168 estão destacadas duas áreas: um retângulo que possui área igual a:

$$A_{\text{retângulo}} = 5\text{kN} \times 3\text{m} = 15\text{kNm}$$

e um triângulo com área igual a:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1\text{kN} \times \frac{1}{3}\text{m}}{2} = \frac{1}{6}\text{kNm}$$

Estas áreas, cuja unidade é kNm, representam a diferença entre os momentos das seções que limitam estas áreas.

Este raciocínio pode ser expandido para toda a estrutura e a construção do diagrama pode ser feita, apenas usando este conceito.

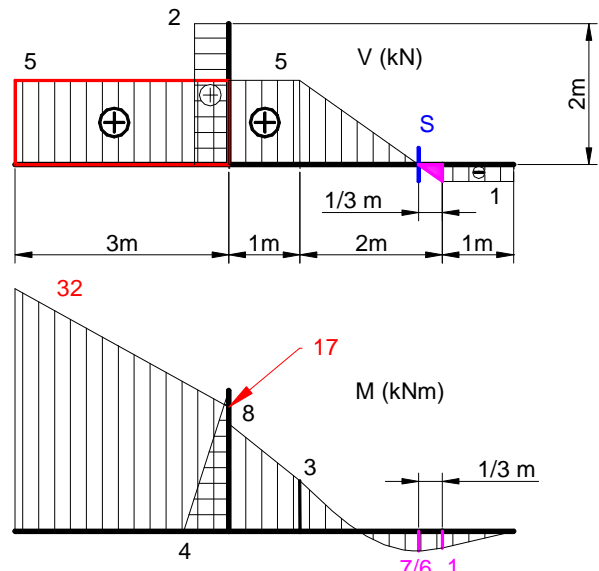


Figura 168

13. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 169.

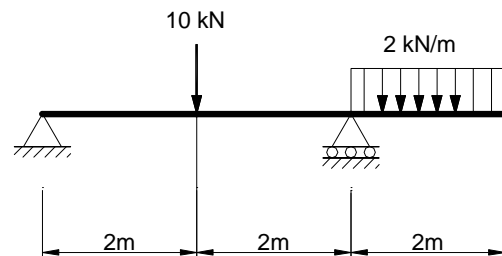


Figura 169

As reações de apoio ficam:

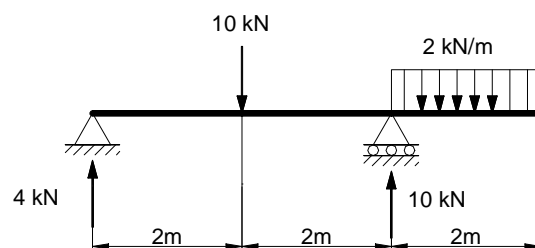


Figura 170

Os diagramas ficam:

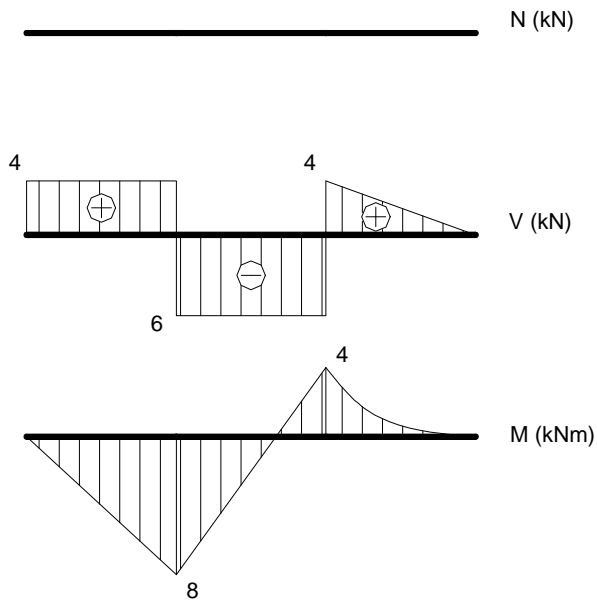


Figura 171

14. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 172.

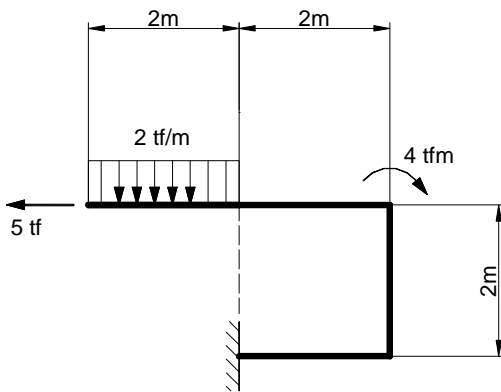


Figura 172

Os diagramas ficam:

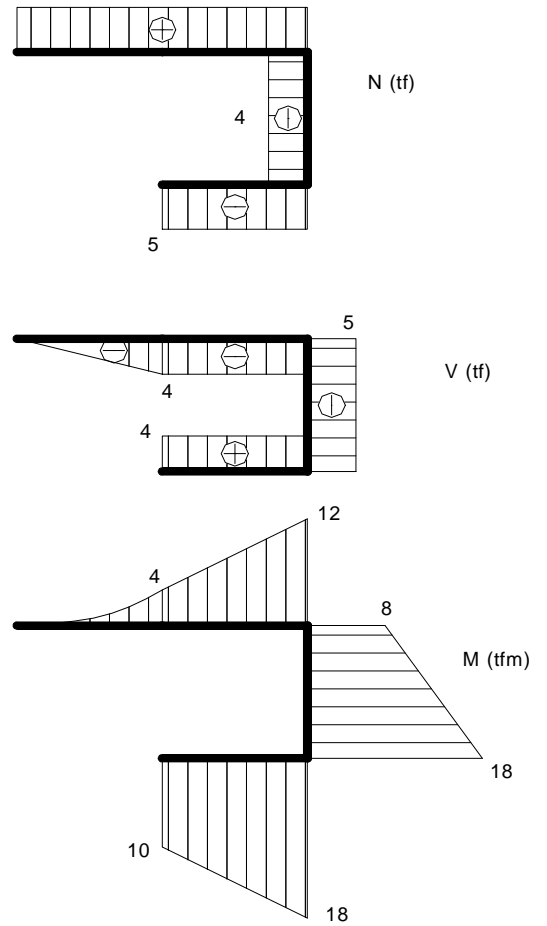


Figura 173

15. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 174.

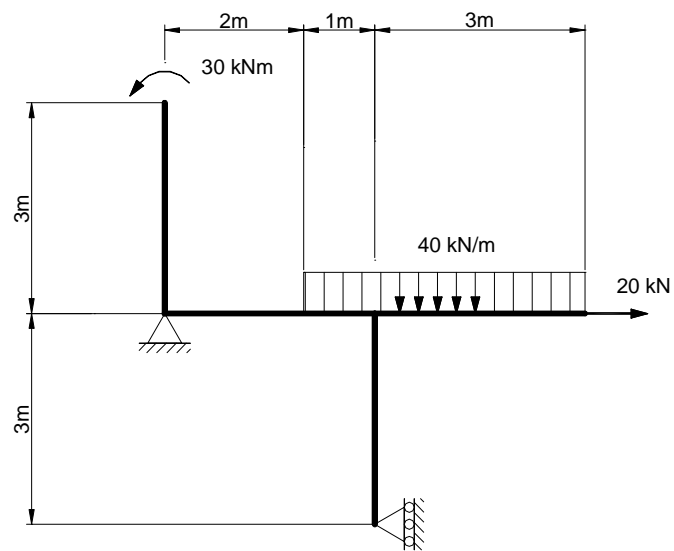


Figura 174

As reações de apoio ficam:

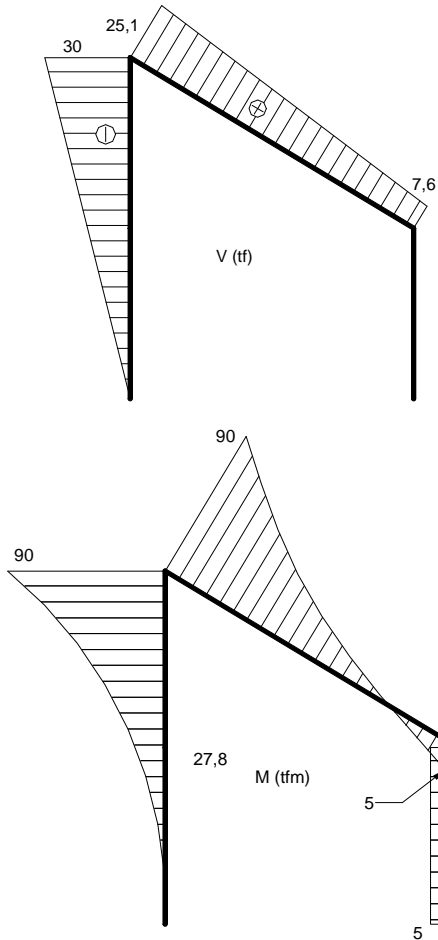


Figura 179

5.4. Exercícios.

23. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 180.

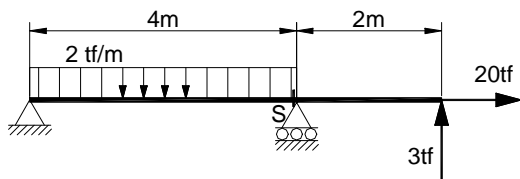


Figura 180

Resposta:

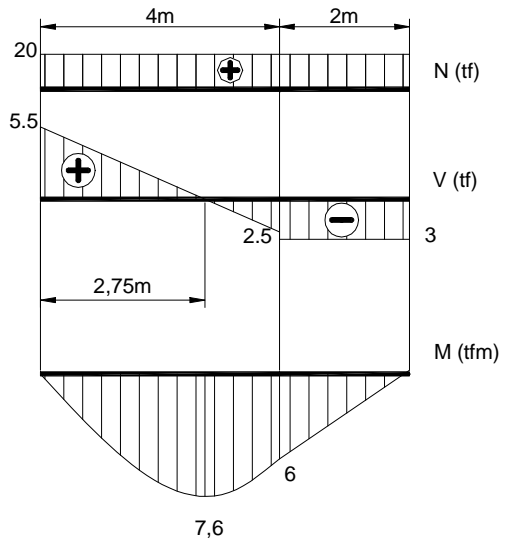


Figura 181

24. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 182.

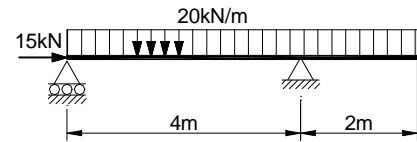


Figura 182

Resposta:

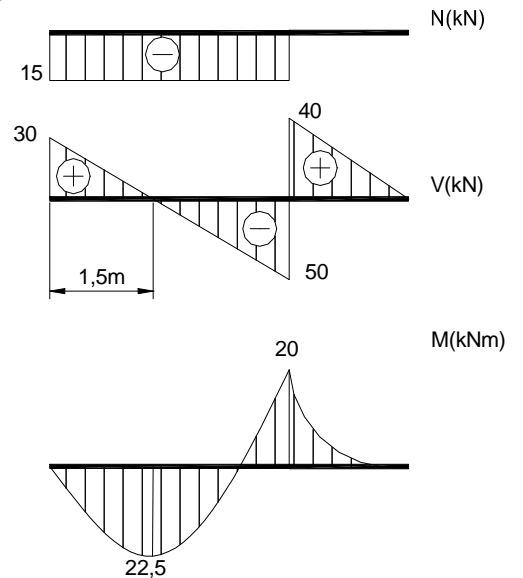


Figura 183

25. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 184.

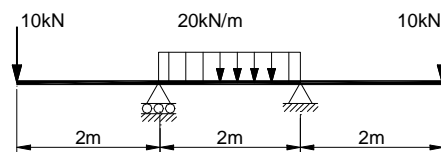


Figura 184

Resposta:

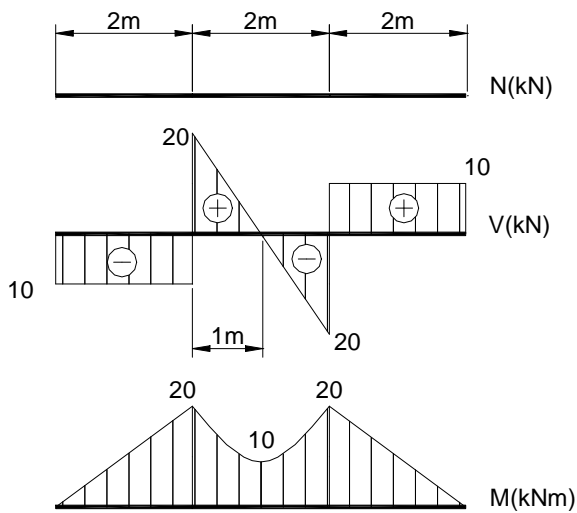


Figura 185

26. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 186.

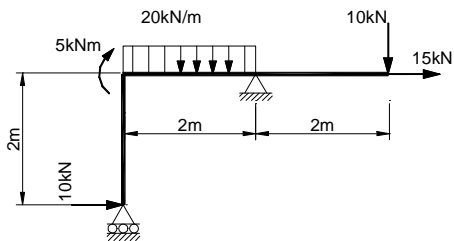


Figura 186

Resposta:

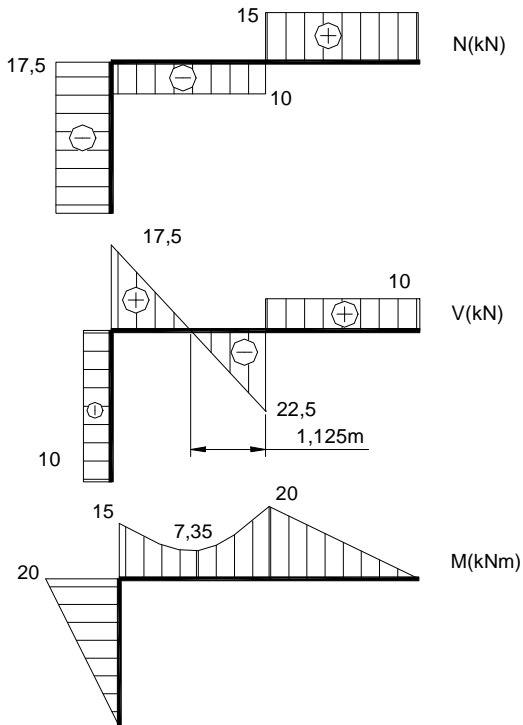


Figura 187

27. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 188.

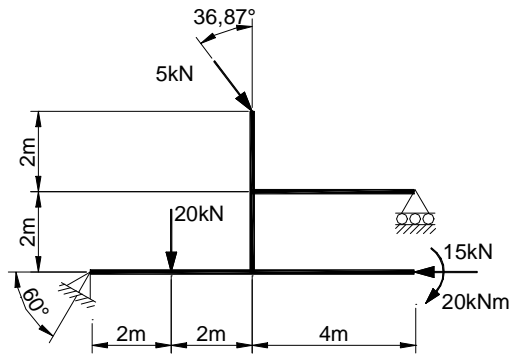


Figura 188

Resposta:

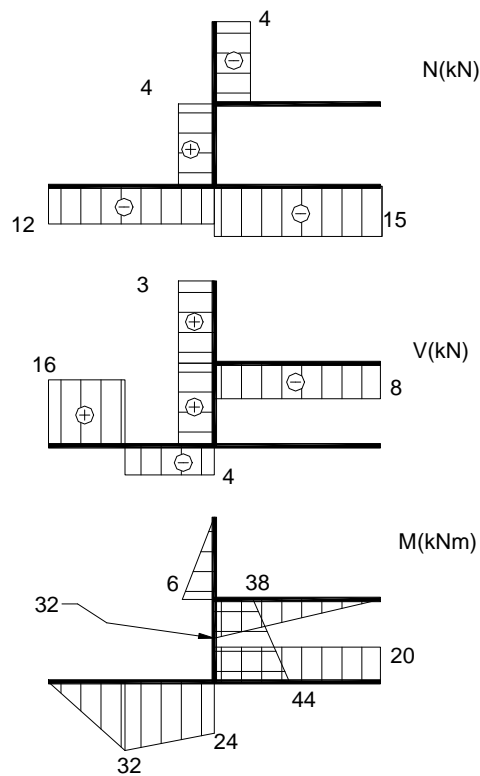


Figura 189

28. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 190.

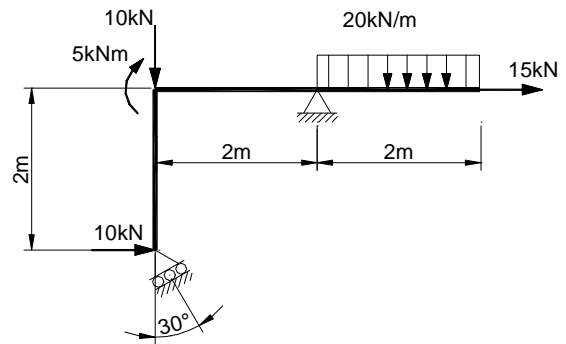


Figura 190

Resposta:

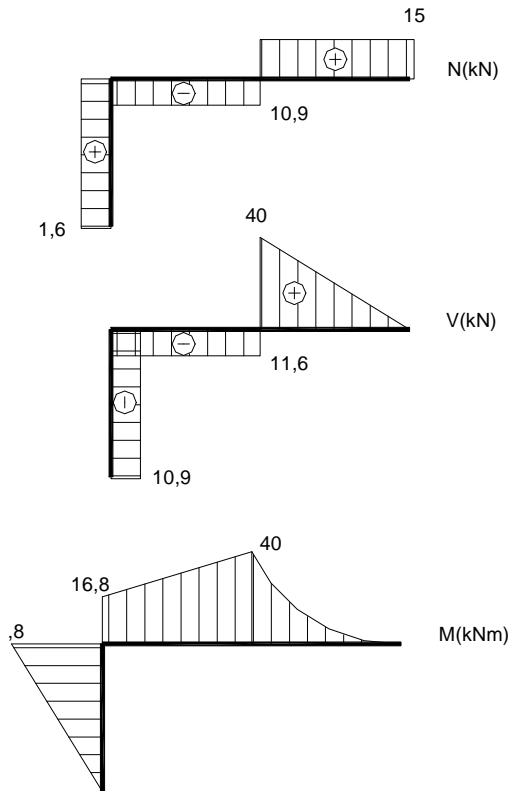


Figura 191

29. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 192.

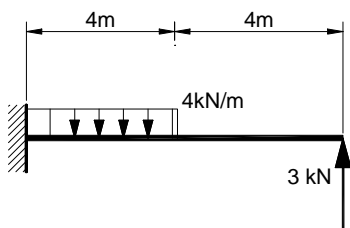


Figura 192

Resposta:

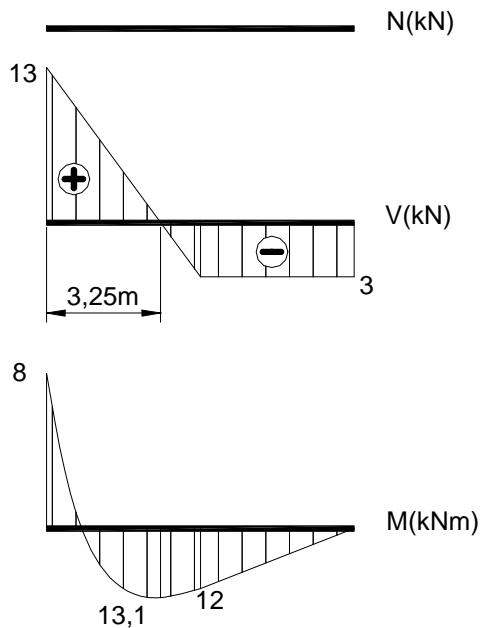


Figura 193

30. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 194.

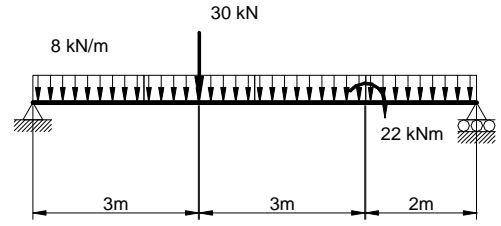


Figura 194

Resposta:

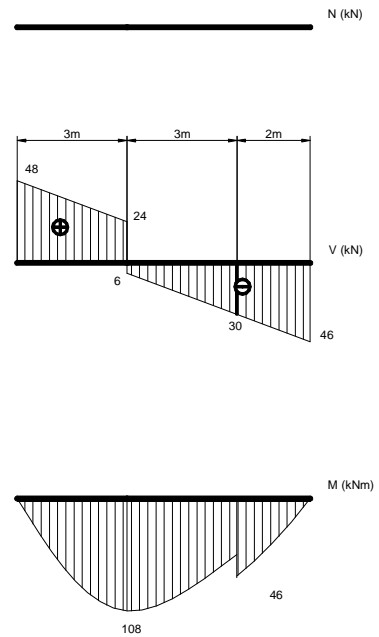


Figura 195

6. Articulação.

Uma articulação é uma forma de união entre barras que permite o movimento relativo de rotação.

Fisicamente, uma articulação pode ser construída de diversas formas. Na figura 194, por exemplo, a articulação entre dois semi-arcos do Viaduto Santa Ifigênia, na cidade de São

Paulo, é constituída por um cilindro que permite o movimento relativo de rotação entre eles.



Figura 194

A figura 195 é a fotografia de um guindaste onde a lança tem sua estrutura treliçada. A treliça é uma forma de construção onde as barras são retas e unidas com outras por meio de articulações.



Figura 195

A união entre as barras da lança da figura 195 é feita por meio de solda. Assim, os pontos soldados possuem um comportamento que permitem um movimento relativo de rotação (mesmo que infinitesimal) entre as barras e por isto são considerados articulações.

Com relação à representação gráfica de uma articulação, na figura 196 são encontrados dois eixos de barras, unidos por meio de uma articulação.

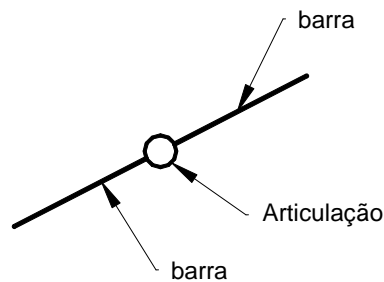


Figura 196

Com relação ao equilíbrio de estruturas articuladas, deve-se lembrar que, uma estrutura está em equilíbrio estático quando não existe movimento de nenhuma de suas partes. Em uma estrutura articulada em equilíbrio, então, não pode existir o movimento de rotação relativo entre as partes unidas pela articulação. Para que não exista rotação é necessário que não exista momento.

Pode-se, então, afirmar que em uma estrutura em equilíbrio **o momento fletor na articulação é igual a zero**. Esta afirmação é conhecida como condição de articulação.

Se o momento fletor em uma articulação é nulo, os únicos esforços solicitantes que podem atuar nas seções vizinhas a ela são: força normal e força cortante.

Observa-se, também, a necessidade da existência de reações de apoio que equilibrem este tipo de estrutura; assim, para cada articulação que une n seções existem $(n-1)$ equações de momento fletor nulo e, portanto devem existir $(n-1)$ reações, além das necessárias para o equilíbrio da estrutura como um todo.

6.

6.1. Exemplos.

17. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 197.

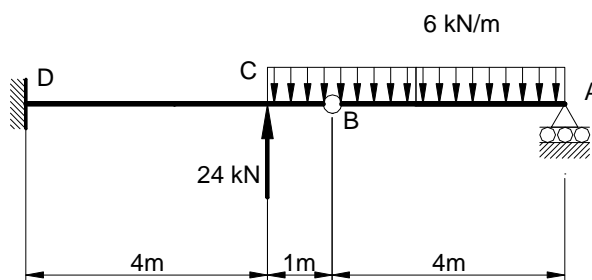


Figura 197

Quando se observa as reações que os apoios da estrutura oferecem, se nota que são apresentadas 4 reações (3 no engastamento e uma no apoio simples móvel), como mostra a figura 198.

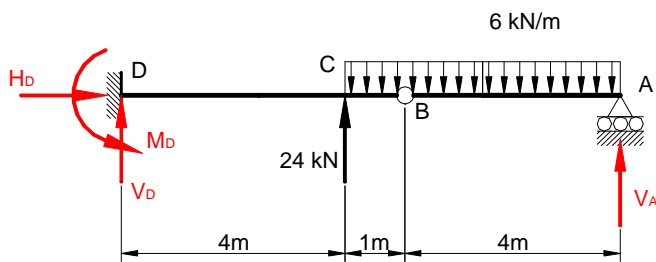


Figura 198

Quando se usa as condições de equilíbrio, se nota que não é possível determinar as reações, pois o sistema de equações não é um sistema compatível, isto é, se dispõe de 3 equações (condições de equilíbrio) para a determinação de 4 incógnitas. Tem-se assim:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_D = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_D + 24\text{kN} - 30\text{kN} = 0 \Rightarrow$$

$$V_A + V_D = 6\text{kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$M_D + 24\text{kN} \times 4\text{m} + V_A \times 9\text{m} - 30\text{kN} \times 6,5\text{m} = 0 \Rightarrow$$

$$M_D + V_A \times 9\text{m} = 99\text{kNm}$$

Para tornar o sistema compatível e assim determinar as reações de apoio, é possível usar a condição de articulação. No exemplo em estudo, a presença da articulação na posição B permite inferir que o momento fletor nas seções vizinhas da articulação é igual a zero.

Para determinar este momento fletor, se pode tomar, por exemplo, os esforços que ficam no trecho A – B da estrutura (parte a direita da articulação).

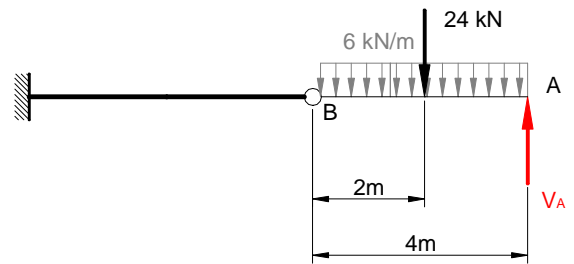


Figura 199

Para que a estrutura esteja em equilíbrio (e está), é necessário que o momento fletor em B seja igual a zero, isto é:

$$M_B = V_A \times 4\text{m} - 24\text{kN} \times 2\text{m} = 0 \Rightarrow$$

$$V_A \times 4\text{m} = 24\text{kN} \times 2\text{m} \Rightarrow$$

$$V_A = 12\text{kN}$$

Determinado V_A , se pode, então determinar V_D e M_D . Então:

$$V_A + V_D = 6\text{kN} \Rightarrow 12\text{kN} + V_D = 6\text{kN}$$

$$V_D = -6\text{kN}$$

$$M_D + V_A \times 9\text{m} = 99\text{kNm} \Rightarrow$$

$$M_D + 12\text{kN} \times 9\text{m} = 99\text{kNm} \Rightarrow$$

$$M_D = -9\text{kNm}$$

Desta maneira, a estrutura, com suas reações de apoio, fica:

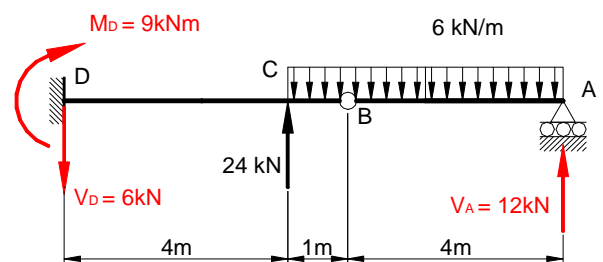


Figura 200

A determinação dos diagramas de esforços se faz da mesma forma que foi feita no capítulo 5. O que se verifica é que na articulação o momento fletor é igual a zero. Os diagramas ficam:

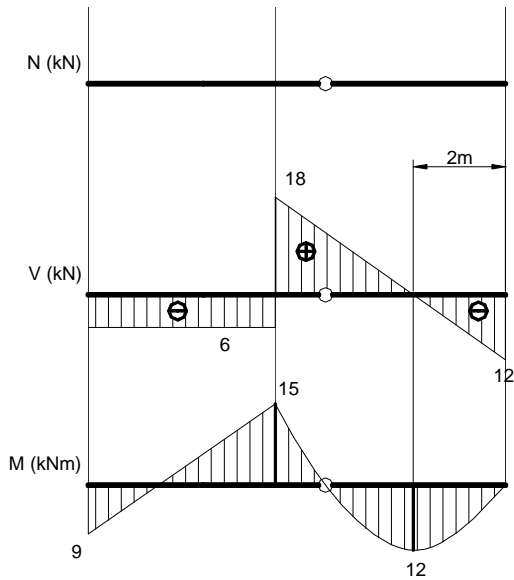


Figura 201

18. Determinar as linhas de estado para a estrutura da figura 202.

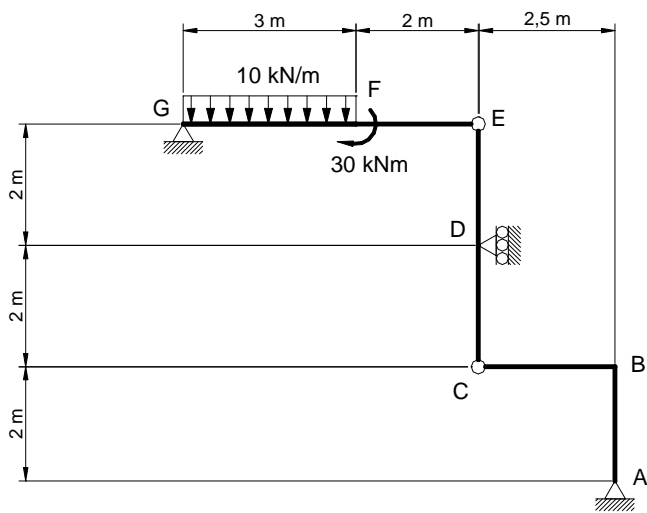


Figura 202

Neste exemplo, os apoios oferecem cinco reações: duas em cada apoio simples fixo e uma no apoio simples móvel. Isto é mostrada na figura 203.

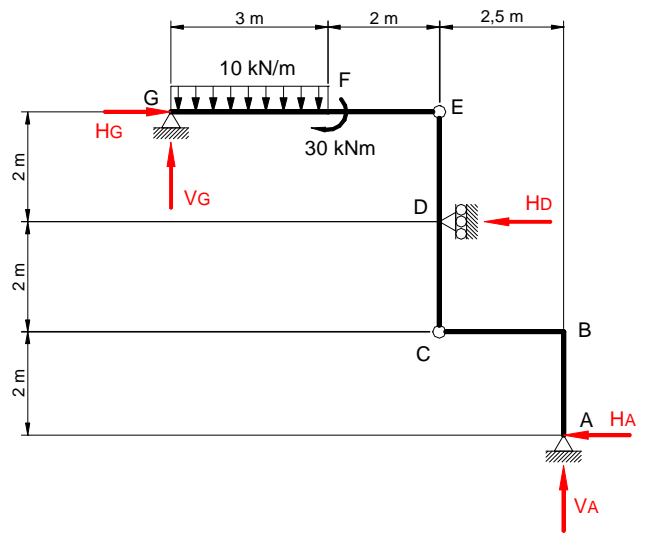


Figura 203

Usando as condições de equilíbrio se encontra:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_G = H_D + H_A$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_G = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow$$

$$V_A \times 7,5 \text{ m} - H_A \times 6 \text{ m} - H_D \times 2 \text{ m} = 75 \text{ kNm}$$

Observa-se aqui a não possibilidade da determinação das reações usando, apenas, as condições de equilíbrio. Deve ser usada, também, a condição de articulação.

Para a articulação que ocupa a posição C, se podem tomar os esforços da parte que fica à direita de C:

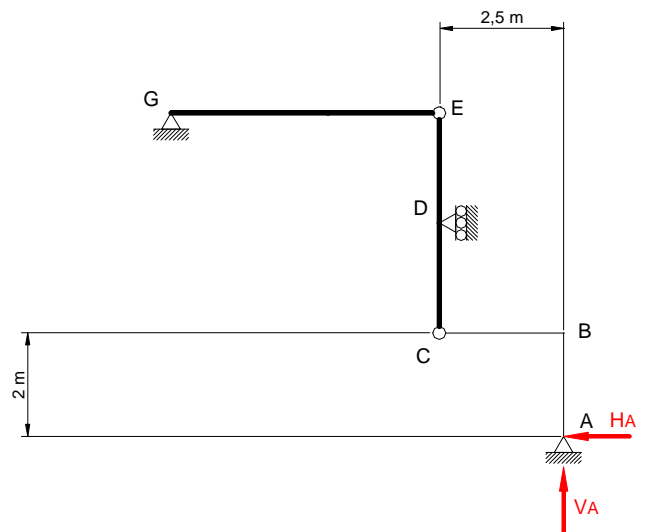


Figura 204

Para que a estrutura esteja em equilíbrio (e está), é necessário que o momento fletor em C seja igual a zero, isto é:

$$M_C = V_A \times 2,5m - H_A \times 2m = 0 \Rightarrow$$

$$1,25V_A = H_A$$

Para a articulação que ocupa a posição E, se podem tomar os esforços da parte que fica à esquerda de E:

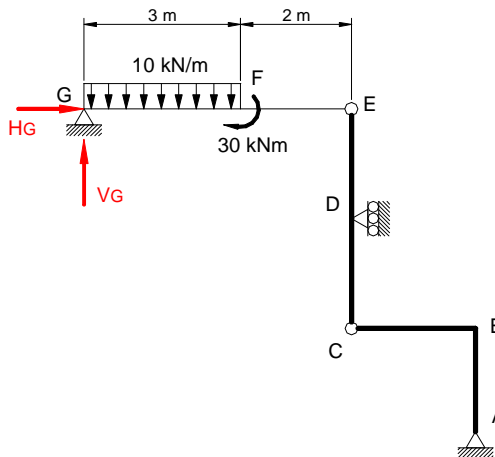


Figura 204

Para que a estrutura esteja em equilíbrio (e está), é necessário que o momento fletor em E seja igual a zero, isto é:

$$M_E = V_G \times 5m - 30kN \times 3,5m + 30kNm = 0 \Rightarrow$$

$$V_G = 15kN$$

Com V_G , se determina V_A , ou seja:

$$V_A = 15kN$$

Com V_A , se encontra H_A :

$$H_A = 18,75kN$$

Com H_A e V_A , se determina H_D , ou seja:

$$H_D = -37,5kN$$

Finalmente, com H_A e H_D , se determina H_G , ou seja:

$$H_G = -18,75kN$$

Assim, a estrutura, com suas reações de apoio, fica:

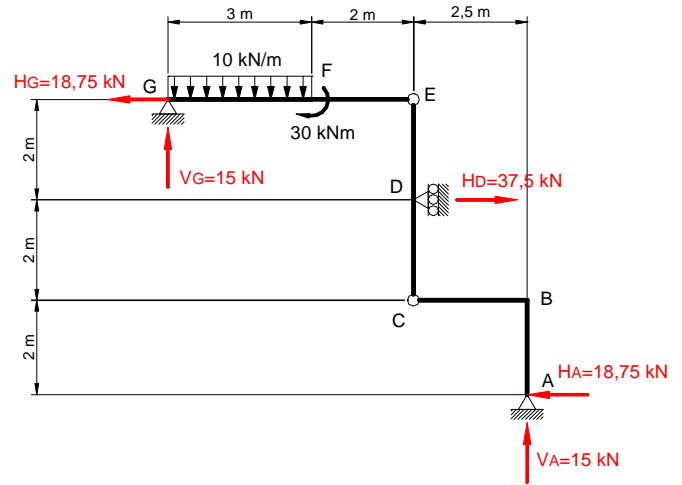


Figura 205

Os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura, ficam:

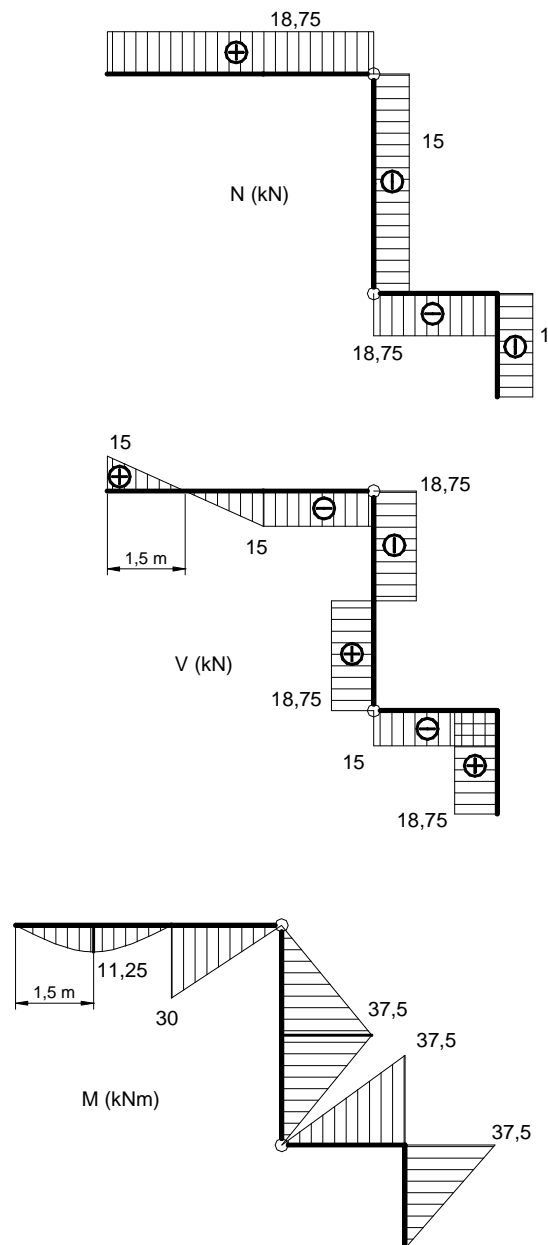


Figura 206

6.2. Exercícios.

31. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 207.

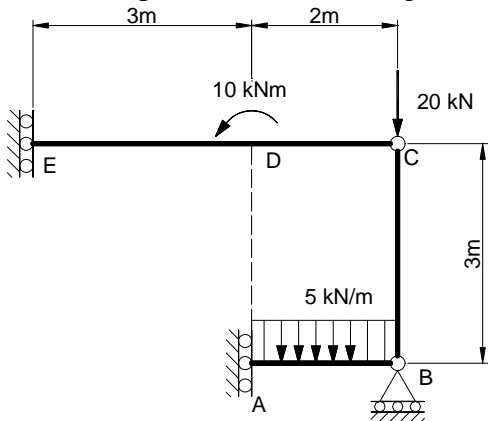


Figura 207

32. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 208.

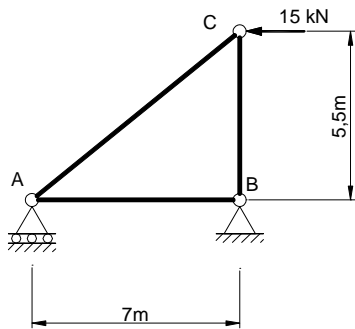


Figura 208

33. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 209.

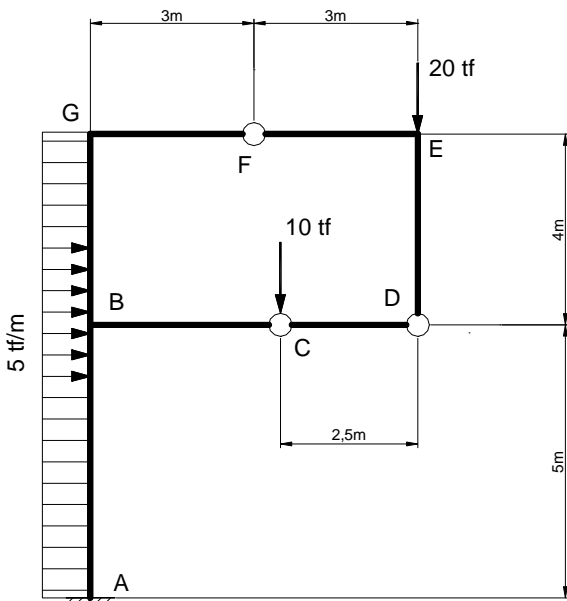


Figura 209

34. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 210.

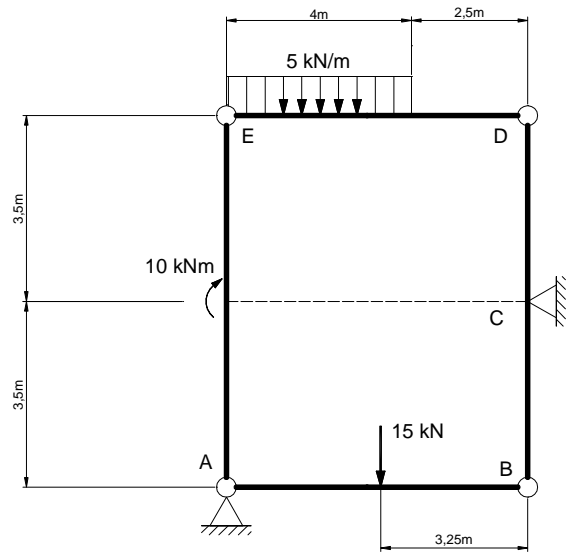


Figura 210

35. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 211.

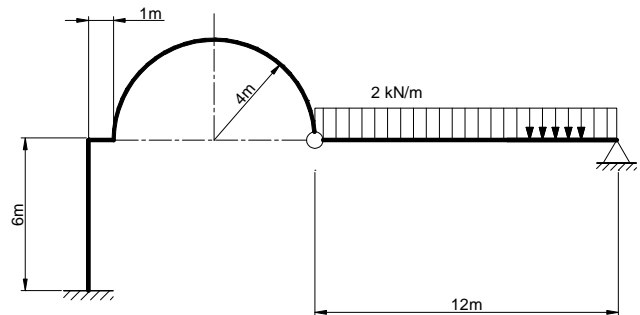


Figura 211

36. Determinar os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura da figura 212.

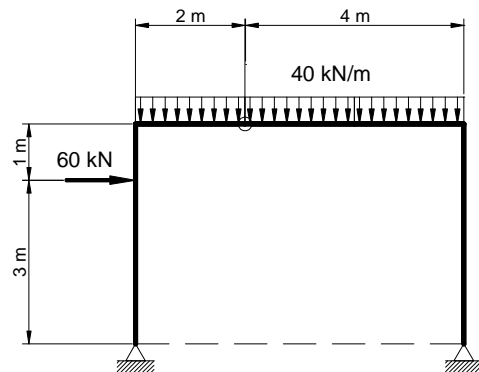


Figura 212

