



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA
E URBANISMO

Departamento de Estruturas



FLAMBAGEM DE BARRAS

PROF DR. NILSON TADEU MASCIA

JUNHO DE 2006

1 - Introdução	3
2 - Conceito de Estabilidade Elástica	4
3 – Aplicação do conceito de estabilidade na compressão axial.....	5
4 – Classificação, quanto aos conceitos de cálculo, do desenvolvimento teórico de um problema em teoria de estrutura	8
5 – Determinação de F_{crit} – Método do Equilíbrio.....	11
6 - Carga de Flambagem para Barras Bi-articuladas	12
7 – Outros tipos de vinculação (Anexo).....	15
8. Tensão de Flambagem no Regime Elástico.....	18
8.1. <u>Raio de Giração de uma seção transversal</u>	18
8.2 <u>Índice de Esbeltez de uma barra</u>	18
8.3. <u>Transformação da carga de flambagem em tensão de flambagem</u>	18
9 – Exercício no. 1:.....	19
10 - Flambagem Elástica e Plástica	21
11– Cálculo Prático da Flambagem.....	22
11.1. <u>Barra de Aço e de Ferro Fundido</u>	22
11.1.1. <u>Fórmulas de Tet majer no regime plástico</u>	22
11.2. <u>Barras de Madeira</u>	24
11.3. <u>Barras de Concreto</u>	26
12 - Influência da força cortante e da deformação axial.....	26
12.1. <u>Força cortante</u>	26
12.2 <u>Deformação axial</u>	27
13 - Exercícios.....	29
BIBLIOGRAFIA.....	35
ANEXO.....	36

FLAMBAGEM DE BARRAS

1 - Introdução

Em todas as construções as peças componentes da estrutura devem ter geometria adequada e definida para resistirem às AÇÕES (forças existentes e peso próprio ou prováveis = ação do vento) impostas sobre elas. Desta maneira, as paredes de um reservatório de pressão têm resistência apropriada para suportar à pressão interna; um pilar de um edifício tem resistência para suportar as cargas das vigas; uma asa de avião deve suportar com segurança as cargas aerodinâmicas que aparecem durante o vôo ou a decolagem. Se o material não resistir às AÇÕES, atingirá um Estado Limite Último por Ruptura. Da mesma forma, um piso de edifício deve ser rígido para evitar uma flecha excessiva, o que em alguns casos pode provocar fissuras no teto, tornando-se inadequado em seu aspecto funcional (Estado Limite de Utilização). Finalmente, uma peça pode ser tão delgada que submetida a uma AÇÃO compressiva atingirá o colapso por perda de estabilidade (FLAMBAGEM), isto é, um Estado Limite Último.

Em engenharia todos os requisitos acima devem ser preenchidos com a máxima habilidade e o menor custo.

Neste sentido a seleção dos elementos estruturais de uma construção se baseia nas três seguintes características:

- resistência
- rigidez
- estabilidade

A análise de resistência e rigidez já foram apresentadas anteriormente. Neste momento a atenção se direciona ao estudo da estabilidade dos sistemas estruturais.

O nosso estudo começa pela análise de uma barra de diâmetro d , submetida a uma força axial de compressão. Se esta barra, submetida à força F tiver um comprimento, l , nenhuma questão de estabilidade apareceria e uma força considerável poderia ser suportada por esse membro de comprimento l . Entretanto, se a mesma barra tivesse comprimento igual a várias vezes o diâmetro quando submetida aquela força F (ou menor), poder-se-ia tornar lateralmente instável e entrar em colapso* (fig 1). Assim as barras esbeltas solicitadas a compressão axial, falham desta maneira. A consideração da resistência do material não é suficiente para se prever o comportamento de tal membro.

Seguem-se alguns conceitos necessários para o prosseguimento de nosso estudo.

*Obs: * Colapso \equiv a barra muda sua configuração linear, passa a ter uma outra configuração não linear e se rompe por flexão, isto é, em Estado Limite Último.*

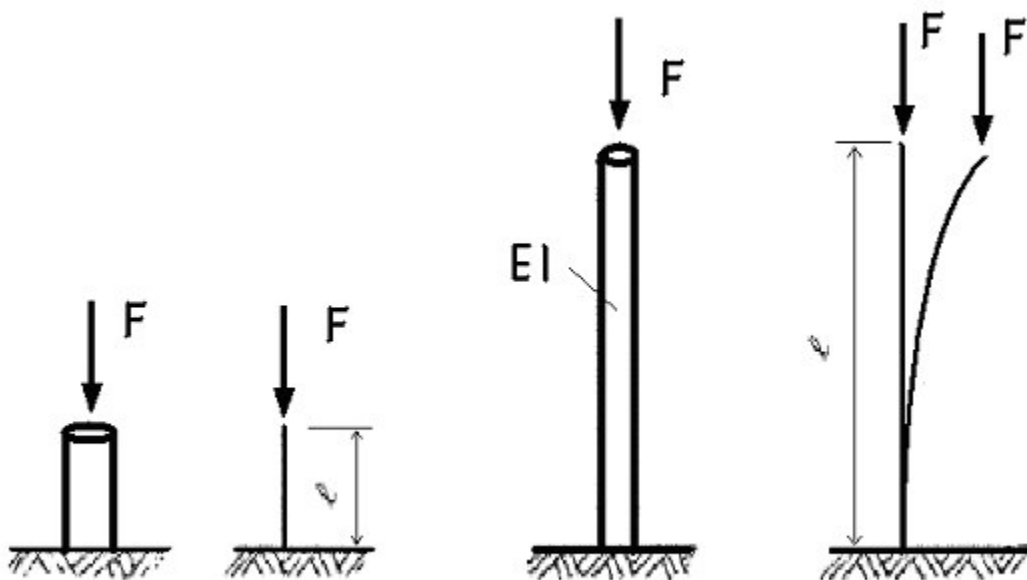


Fig. 1. Flambagem de Barras.

2 - Conceito de Estabilidade Elástica

Qualifica-se como estabilidade a propriedade do sistema (estrutura) de manter o seu estado inicial de equilíbrio nas condições de aplicação de AÇÕES. Se um sistema não tem esta propriedade, ele é qualificado de instável.

Definem-se dois estados de equilíbrio:

- a) Equilíbrio estável – Se um sistema sofre uma pequena perturbação, depois de eliminarmos as causas desta perturbação, o sistema volta ao seu estado inicial de equilíbrio. Este é considerado estável.
- b) Equilíbrio instável – Se um sistema sofre uma pequena perturbação, depois de eliminarmos as causas desta perturbação, o sistema não volta ao seu estado inicial. Este é considerado instável.

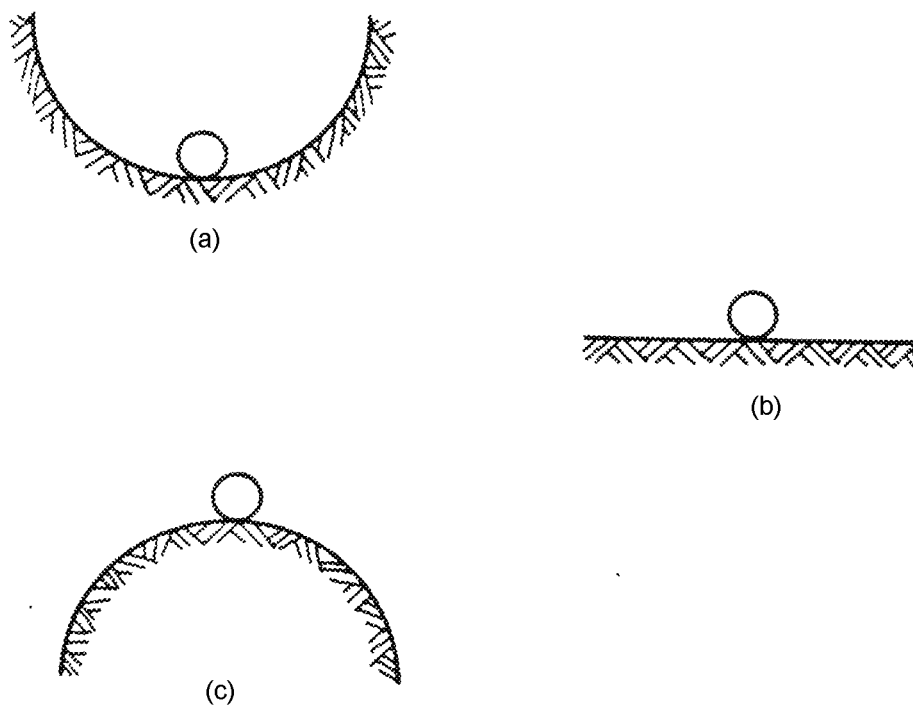


Fig. 2. – Equilíbrio estável (a) e instável (c).

Obs: Esta análise de estabilidade está voltada para regime elástico-linear dos materiais.

Alcançamos o seguinte estágio: o que acontece se o sistema passa do estado inicial de equilíbrio (estável) para outro? É caracterizado assim a perda de estabilidade do sistema.

3 – Aplicação do conceito de estabilidade na compressão axial

Para peças de comprimento l , da mesma ordem de seu diâmetro, d , ou lado, b , sujeito à compressão axial, não está correto o fenômeno de perda de estabilidade. Se pensássemos em termos de resistência, esta seria $f = \frac{F}{A}$ e num ponto A qualquer: $\sigma = \frac{F}{A}$.

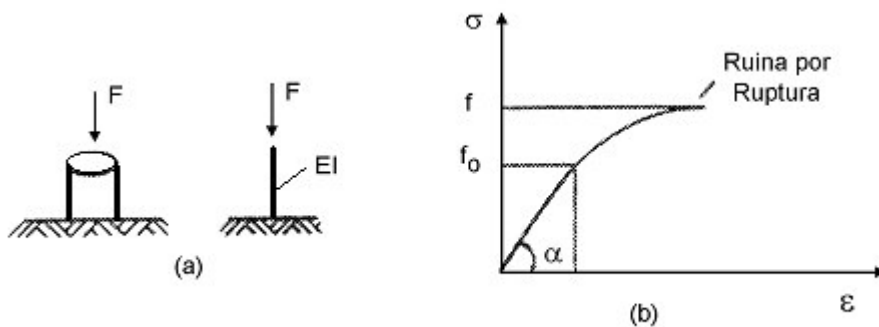


Fig. 3 – Gráfico tensão x deformação.

Obs: A carga F é aplicada de $O \rightarrow f$. Portanto pode-se analisar o gráfico da fig. 3 de $O \rightarrow f$.

Para peças com comprimento várias vezes maior que o diâmetro, d , ou lado, b , sujeita a compressão axial, que fenômeno ocorreria?

Inicialmente a barra está num estado de equilíbrio estável. Para pequenos valores de F aumentados gradualmente, a coluna permanece num estado de equilíbrio estável.

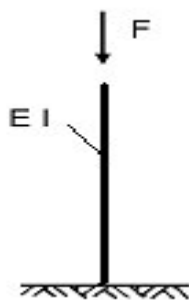


Fig. 4 – Barra com carga F .

Durante este estágio se retirarmos a força ou AÇÃO F , a barra ou coluna volta à sua forma inicial de equilíbrio (equivalente à esfera da figura 2.a.).

Se aumentarmos ainda mais a AÇÃO F , haveria uma passagem de um estado de equilíbrio para outro.

Por definição: carga crítica F_{cr} ou carga de Euler ou carga de flambagem é o valor da carga F que provoca o fenômeno da mudança do estado de equilíbrio estável para o instável.

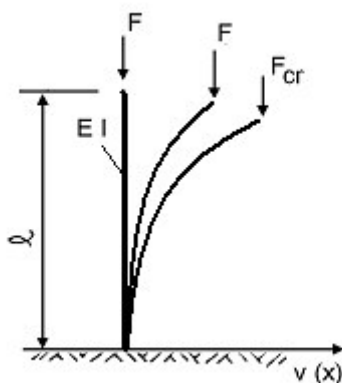


Fig. 5 – Flambagem da barra.

Colocando-se num gráfico $F \times v(x)$:

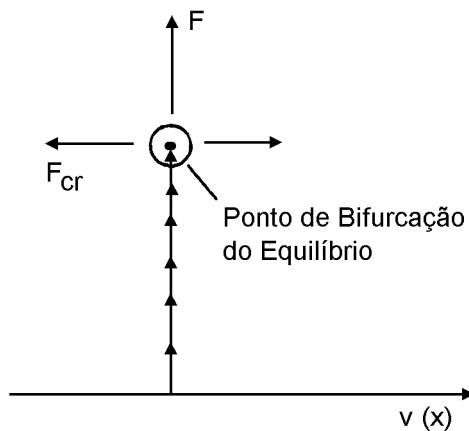


Fig. 6 - Mudança de equilíbrio.

Chegamos assim, ao NOSSO OBJETIVO: determinar F_{cr} .

Para completar nosso conjunto de conceitos básicos sobre o fenômeno da Estabilidade, temos que classificar quanto aos conceitos de cálculo o nosso problema em Teoria de 1ª ordem, 2ª ordem e 3ª ordem.

4 – Classificação, quanto aos conceitos de cálculo, do desenvolvimento teórico de um problema em teoria de estrutura

4.1. Teoria de 1ª ordem – Esta teoria não leva em conta os deslocamentos no estudo do equilíbrio da estrutura e admite ainda certas simplificações, como por exemplo: a substituição da curvatura $K = \frac{1}{r}$ da linha elástica pela 2ª ordem derivada da sua equação:

$$M_o = F.a$$

$$v''(x) = \frac{-M_o}{EI} = \frac{-Fa}{EI}$$

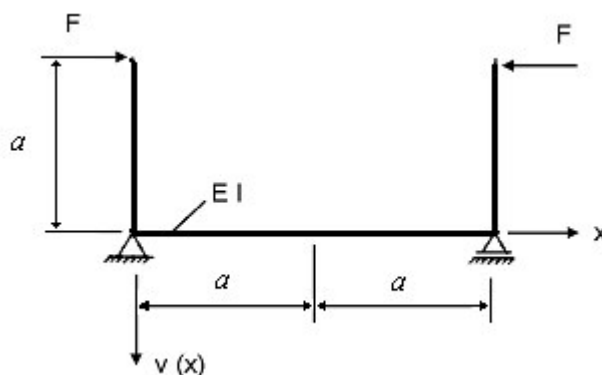


Fig. 7 – Estrutura em teoria de 1ª ordem.

4.2. Teoria de 2ª ordem - Esta teoria leva em conta os deslocamentos no estudo do equilíbrio da estrutura e considera a curvatura $K = \frac{1}{r}$ da linha elástica igual à 2ª derivada de sua equação.

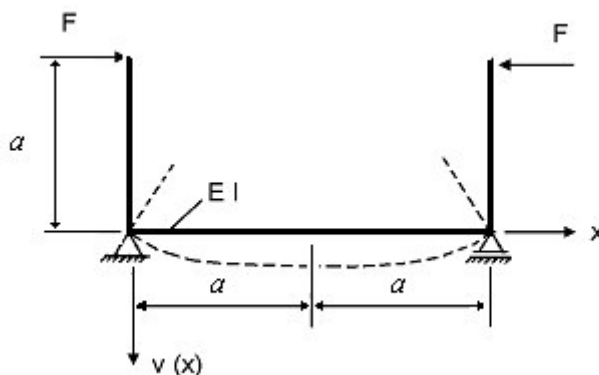


Fig. 8 – Estrutura em teoria de 2ª ordem.

$$M_o = F(a + v(x))$$

$$v''(x) = -\frac{M_o}{EI}$$

4.3. Teoria de 3ª ordem – A teoria de 3ª ordem leva em conta os deslocamentos sem simplificações, sendo geralmente complicada para uso prático.

A equação da curvatura:

$$K = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

é usada no regime supercrítico.

4.4 – Gráfico de F x v(x) com a utilização destes conceitos

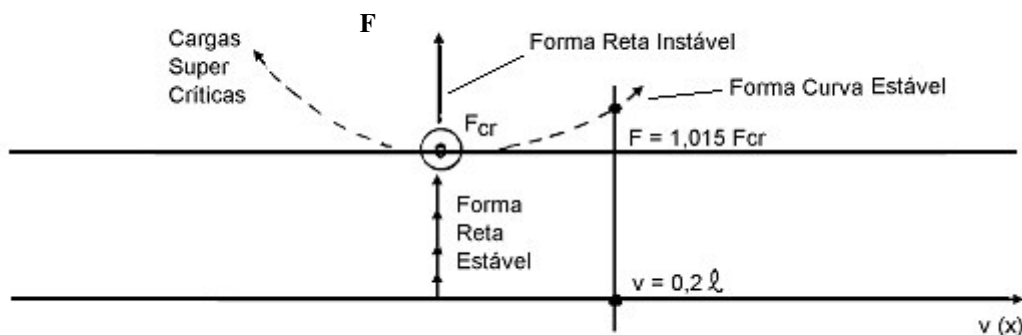


Fig. 9 – Gráfico de configuração de equilíbrio.

Contemplando este estudo teórico é conveniente ressaltar que o fenômeno da flambagem não é um problema de resistência, mas sim de estabilidade. Se o material que compõe a estrutura seguisse indefinidamente a Lei de Hooke a carga poderia crescer sensivelmente acima de F_{cr} sem que o equilíbrio perdesse seu caráter estável.

Exemplo: Barras de acrílico e celulóide (materiais plásticos)

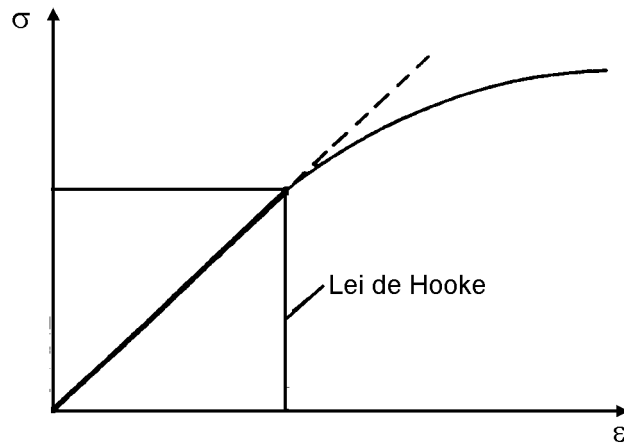


Fig. 10 – Gráfico tensão-deformação.

Observa-se que a teoria de 2ª ordem fornece F_{cr} , ou seja, os problemas de Flambagem já são testados por esta teoria em Resistência dos Materiais.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \begin{cases} \text{se } a = 0 \rightarrow M = 0 \rightarrow \sigma = \frac{F}{A} \\ \text{se } a \neq 0 \rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{Fv}{EI} = 0 \end{cases}$$

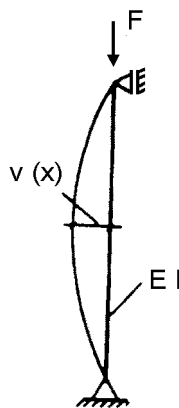


Fig. 11 – Elástica da barra comprimida.

5 – Determinação de F_{crit} – Método do Equilíbrio

Uma coluna perfeitamente reta (Fig. 12), apoiada em sua extremidade, pode ser considerada em equilíbrio estável. Se aplicarmos uma carga F a coluna pode sofrer uma rotação, mas não pode fletir. Na forma hachurada tem uma posição de equilíbrio tal que:

- em A o momento de tombamento e o restaurador são:

$$F l \sin \phi = M_T$$

$$c \phi = M_R$$

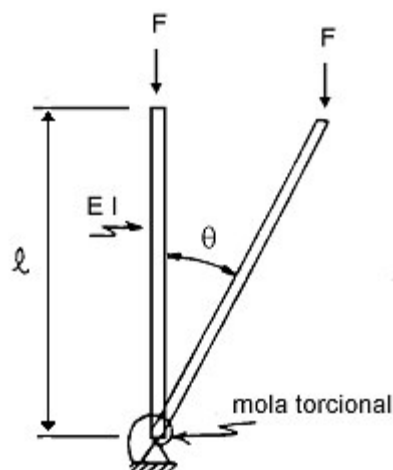


Fig. 12 – Modelo para flambagem.

Para ϕ pequeno $\sin \phi \cong \phi$, ficamos então com 3 condições:

- 1^a) $F l \phi < c \phi \rightarrow$ sistema estável
- 2^a) $F l \phi = c \phi \rightarrow$ ponto de bifurcação do equilíbrio
- 3^a) $F l \phi > c \phi \rightarrow$ sistema instável

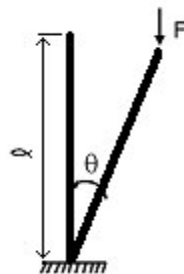


Fig. 13 – Barra em equilíbrio.

De 2ª) tem-se que:

$$F \ell \phi = c \phi$$

$$F = \frac{c}{\ell}$$

Sendo $F = F_{cr}$ a carga crítica de flambagem.

6 - Carga de Flambagem para Barras Bi-articuladas

Seja a barra de seção constante inicialmente reta, mantida na sua posição deformada por uma carga axial F . A direção das ordenadas v da elástica evidentemente será a direção da menor rigidez contra flexão, quer dizer, o eixo central com I_{\min} (w) da seção da barra será perpendicular ao plano do desenho da figura.

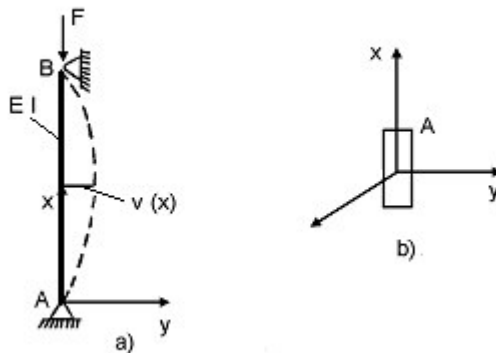


Fig. 14 – Esquema para determinação da carga crítica.

Procuramos a carga F necessária para manter a elástica.
Da resistência dos materiais, sabe-se que:

$$\frac{dv^2}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

O momento M vale:

$$M = Fv$$

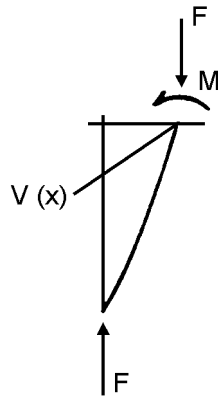


Fig. 15 – Cálculo do momento.

Substituindo na equação precedente tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{Fv}{EI} = 0 \quad (1)$$

Portanto, temos a solução geral da equação diferencial que rege o problema de flambagem:

$$v = C_1 \text{sen } Kx + C_2 \text{cos } Kx \quad (2)$$

E com as condições de contorno:

$$\text{Em } A: \begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$C_2 = 0 \rightarrow v = C_1 \text{sen } Kx \quad (3)$$

Para se determinar o parâmetro K, derivamos 2 vezes a equação:

$$v = C_1 \text{sen } Kx$$

$$1^a \rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = KC_1 \text{cos } Kx$$

$$2^a \rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = -K^2 C_1 \text{sen } Kx \quad (4)$$

$$(4) \text{ em } (1) \rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{Fv}{EI} = K^2 C_1 \text{sen } Kx + \frac{Fv}{EI} = 0$$

$$-K^2 v + \frac{Fv}{EI} = 0$$

$$K^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\text{Em B: } \begin{cases} x = \ell \\ v = 0 \end{cases}$$

Temos que em (3):

$$v = 0 = C_1 \text{sen } K\ell \quad (6)$$

Esta condição é satisfeita quando:

$$C_1 \neq 0 \text{ e } \text{sen } K\ell = 0$$

ou $K\ell = n\pi$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ (Se $n = 0$, não existe F)

$$K = \frac{n\pi}{\ell} \rightarrow K^2 = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$$

Portanto a carga crítica vale:

$$\frac{F}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \rightarrow F_{cr} = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} EI \quad (7)$$

Chamando ℓ_{cr} = comprimento de flambagem e sendo $\ell_{cr} = \frac{\ell}{n}$, podemos montar a seguinte tabela:

Caso	K	F _{crit}	Equação da elástica
a: n = 1	π / ℓ	$\pi^2 EI / \ell^2$	$v = C_1 \text{sen } \frac{\pi}{\ell} x$
b: n = 2	$2\pi / \ell$	$4\pi^2 EI / \ell^2$	$v = C_1 \text{sen } \frac{2\pi}{\ell} x$

$c:$ $n = 3$	$3\pi / \ell$	$9\pi^2 EI / \ell^2$	$v = C_1 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{\ell} x$
-----------------	---------------	----------------------	--

E as seguintes elásticas (sendo de interesse prático apenas (a)).

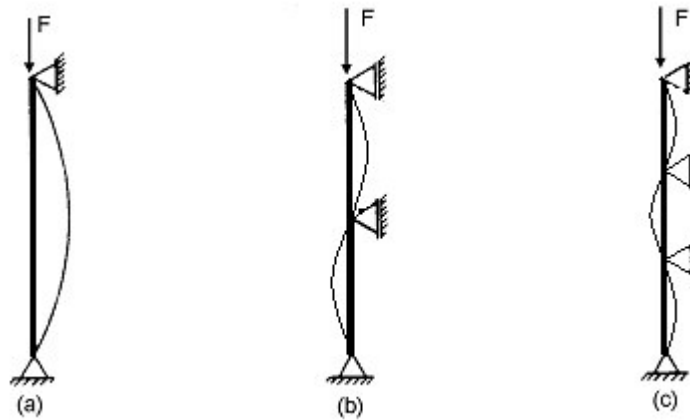


Fig. 16 – Algumas elásticas.

Obs: É interessante, novamente, salientar que as ordenadas v não podem ser determinadas por este equacionamento matemático, necessitando-se para isto da equação exata da curvatura \underline{K} .

7 – Outros tipos de vinculação (Anexo)

7.1. Barra engastada livre

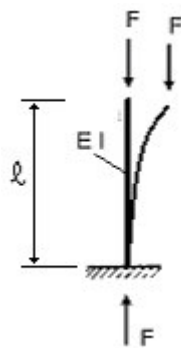


Fig. 17 – Barra engastada livre.

$$\ell_{cr} = 2\ell$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$$

7.2 . Barra engastada e articulada

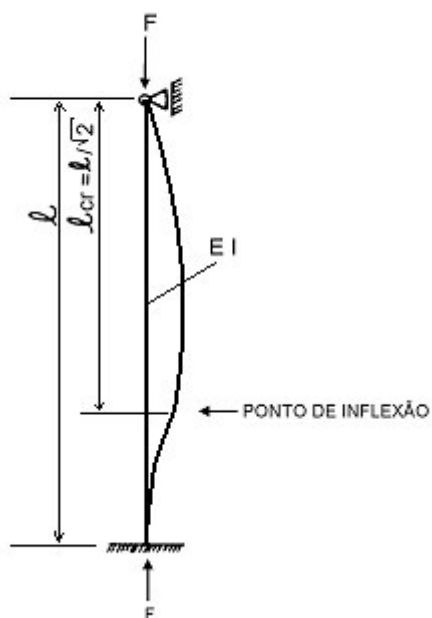


Fig. 18 – Barra articulada-engastada.

Tem-se:

$$l_{cr} = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$F_{cr} = \frac{4,454^2 EI}{l^2} \cong \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

7.3. Barra engastada – engastada

Segue-se:

$$l_{cr} = \frac{l}{2}; \quad F_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

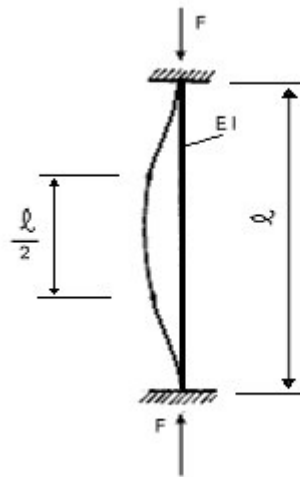


Fig. 19 – Barra engastada-engastada.

Obs 1: Relação entre as cargas de flambagem

$\frac{1}{4}$:	1	:	2	:	4
Eng: livre		Art. Art.		Art. Eng.		Eng. Eng.

Obs2: Todas as fórmulas acima podem se assemelhar ao acaso fundamental, desde que no comprimento real e esteja o comprimento de flambagem l_{ef} . Este comprimento vem a ser a distância entre os pontos de inflexão das elásticas.

8. Tensão de Flambagem no Regime Elástico

8.1. Raio de Giração de uma seção transversal

Chama-se raio de giração a seguinte relação:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}, \text{ onde } \begin{array}{l} I = \text{Momento da inércia da seção transversal} \\ A = \text{Área da seção transversal} \end{array}$$

$$\text{ou } i^2 = \frac{I}{A}$$

8.2 Índice de Esbeltez de uma barra

Índice de esbeltez de uma barra é a seguinte relação:

$$\underline{\lambda = \frac{l_{cr}}{i}} \quad \rightarrow \quad \underline{\lambda^2 = \frac{l_{cr}^2}{i^2}}$$

8.3. Transformação da carga de flambagem em tensão de flambagem.

Seja a “tensão de flambagem” igual a:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A}$$

$$\text{daí: } \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_{cr}^2 A}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{l_{cr}^2} i^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

9 – Exercício nº 1:

Qual a relação h/b da seção transversal para que o pilar da figura ofereça a mesma segurança contra a flambagem nas direções x e y ?

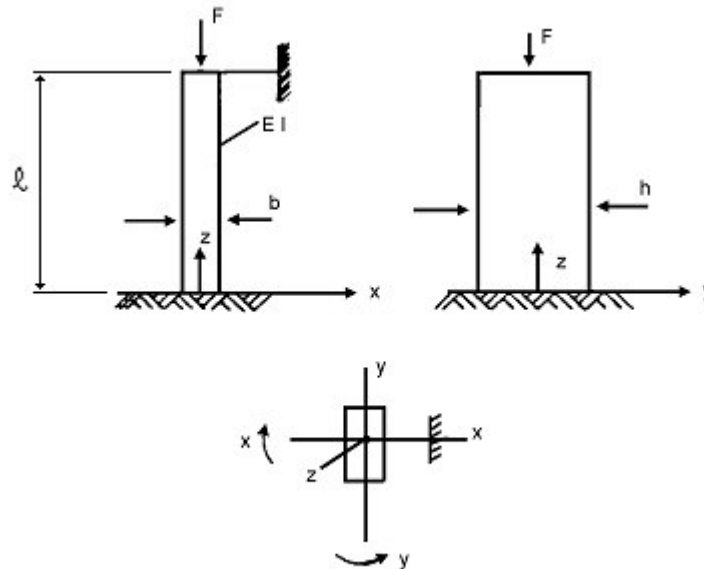


Fig. 20 – Vista e seção transversal da estrutura.

Solução: Em relação ao eixo x (em torno de x) a vinculação é engastada – livre.

Portanto: $\overline{l_{cr,x}} = 2l$

Em relação ao eixo y (em torno de y) a vinculação é engastada-articulada:

Portanto: $\overline{l_{cr,y}} = \frac{l}{\sqrt{2}}$

Para se ter a mesma segurança em relação a x e a y temos:

$$P_{cr,x} = P_{cr,y}$$

$$\frac{P_{cr,x}}{A} = \frac{P_{cr,y}}{A}$$

$$\sigma_{cr,x} = \sigma_{cr,y}$$

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_x^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}$$

$$\lambda_x^2 = \lambda_y^2 \rightarrow \lambda_x = \lambda_y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = \frac{\ell_{cr,x}}{i_x} \\ \lambda_y = \frac{\ell_{cr,y}}{i_y} \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

$$\text{Esbeltez: } i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad \left. \begin{array}{l} I_x = \frac{bh^3}{12} \\ A = bh \end{array} \right\} \quad i_x = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad \left. \begin{array}{l} I_y = \frac{hb^3}{12} \\ A = bh \end{array} \right\} \quad i_y = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

Finalmente em (I):

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_x = \frac{2\ell}{h} \sqrt{12} \\ \lambda_y = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{12}}{b} \end{array} \right\} \quad \lambda_x = \lambda_y \Rightarrow \frac{h}{b} = 2\sqrt{2}$$

10 - Flambagem Elástica e Plástica

Até agora estudamos a carga crítica partindo da equação da elástica: $v = \frac{M}{EI}$, que é consequência da Lei de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$).

Também foram introduzidos os conceitos sobre peças curtas, esbeltas e suas relações com a resistência/estabilidade (Teorias: 1ª, 2ª, ordem).

Vamos agora estudar, via conceito de esbeltez, o fenômeno de flambagem.

Assim, para barras curtas, não haverá flambagem e sua carga de ruptura dependerá apenas da resistência f do material, no caso de um material com limite de escoamento f_y , este valor condiciona a capacidade resistente.

Considerando-se barras mais longas, o valor f_y deverá ser substituído por $\sigma_{cr} < f_y$, que condiciona o fenômeno flambagem.

Desta forma índice de esbeltez λ determinará se a barra é curta ou longa, e indicará o comportamento da barra a uma força axial de compressão.

Podemos agora relacionar o gráfico tensão-deformação com o gráfico tensão-índice de esbeltez.

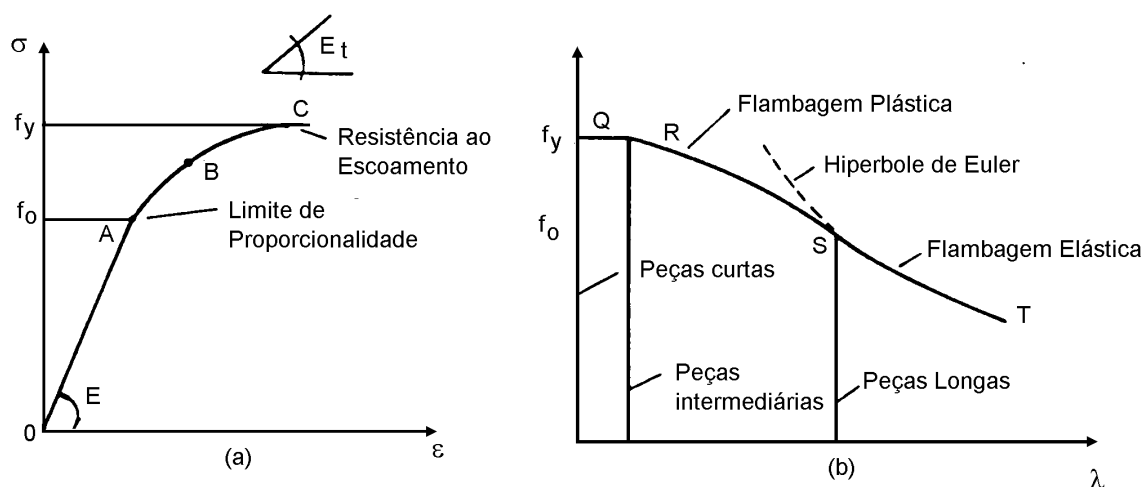


Fig. 21 – Gráficos tensão versus deformação ou esbeltez.

Vemos à relação do comportamento da barra nos dois gráficos:

$\sigma - E$	$\sigma_{crit} - \lambda$
O \rightarrow C: Regime Elástico	T \rightarrow S : Carga Crítica de Euler ou de Flambagem
A \rightarrow C: Regime Plástico	S \rightarrow R: Flambagem Plástica
C \rightarrow : Escoamento	R \rightarrow Q: Não há Flambagem Escoamento

O diagrama $\sigma \times E$ é determinado a partir de ensaios em laboratório.

Observações a respeito dos gráficos $\sigma \times E$ e $\sigma_{cr} \times \lambda$:

É de extrema importância que os gráficos $\sigma \times E$ e $\sigma_{cr} \times \lambda$ não sejam de uma única barra, mas sim de um número mínimo de barras de diferentes comprimentos. Assim no ponto S haverá uma coluna A que será a de menor comprimento (de um certo material) que flambará elasticamente. Uma outra com λ menor não flambará no regime de proporcionalidade do material.

Então uma coluna FLAMBADA com uma tensão de flambagem que não excede f_o , esta flambagem é elástica. Se $\sigma_{cr} > f_o$ a flambagem será plástica ou não ocorrerá flambagem ($\sigma_{cr} = f_y$).

Obs: Uma importante observação diz respeito ao trecho \overline{AC} no ponto B, onde à vista de inúmeros resultados de ensaios em laboratório e de ajustes de curvas pode-se utilizar a seguinte expressão para fórmula de flambagem:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}$$

onde E_t é o módulo de elasticidade tangente, a nova rigidez da barra à flexão (EI), passa para $E_t I$ e o nível de tensão aumenta.

(Para informações complementares ver teoria módulo duplo Popov, pg. 502).

11- Cálculo Prático da Flambagem

Neste item são apresentadas algumas aplicações com o objetivo de uma revisão de caráter histórico de flambagem.

11.1. Barra de Aço e de Ferro Fundido

11.1.1. Fórmulas de Tet majer no regime plástico

Para Aço 37: (Aço de Baixa Resistência) segue a DIN 17100 ST 37

$0 < \lambda \rightarrow$ resistência ao escoamento

$$60 \leq \lambda \leq 100 \rightarrow \sigma_{cr} = 2891 - 8,175 \lambda \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

$\lambda > 100 \rightarrow$ Fórmula de Euler

Para Aço 52: (Aço de Alta Resistência) segue a DIN 17100 ST 52

$0 < \lambda \rightarrow$ resistência ao escoamento: f_y

$$60 \leq \lambda \leq 100 \rightarrow \sigma_{cr} = 5891 - 38,17 \lambda \text{ (kgf / cm}^2\text{)}$$

Ferro Fundido

$$0 \leq \lambda \leq 80 \rightarrow \sigma_{cr} = 770 - 120 \lambda + 0,53 \lambda^2$$

$0 > 80 \rightarrow$ Fórmula de Euler (kgf/cm²)

Em algumas normas de Engenharia, como norma de estruturas metálicas (NB 14/68 até 1986) e a de estruturas de madeira (NB 11 \equiv NBR 7190) é utilizada a tensão admissível para se dimensionarem as peças.

Denomina-se tensão admissível $\bar{\sigma}_{cr}$ na flambagem, a tensão σ_{cr} dividida por um coeficiente de segurança γ . Assim:

$$\bar{\sigma}_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{\gamma}$$

A NB 14/68 fixa a tensão admissível de flambagem como sendo:

$$\text{Para } \lambda \leq 105 \rightarrow \bar{\sigma}_{cr} = 1200 - 0,023 \lambda^2 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Para } \lambda > 105 \rightarrow \bar{\sigma}_{cr} = \frac{10,363 * 10^6}{\lambda^2}.$$

A comparação entre as equações de Euler e a acima para $\lambda > 105$ (regime elástico).

$$\gamma = \frac{\sigma_{cr}}{\bar{\sigma}_{cr}} = \frac{\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}{\frac{10,363 * 10^6}{\lambda^2}} = 2$$

$$\text{sendo: } E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf / cm}^2 = 2,1 \times 10^4 \text{ KN / cm}^2$$

No regime plástico não podemos tirar conclusões, apenas para $\lambda = 0$, $\bar{\sigma}_{cr} = 1200 \text{ kgf/cm}^2$ (12 KN/cm²). Como o aço CA - 24 (hoje é utilizado o CA - 25) tem limite de escoamento igual a 2400 kgf/cm² (ou 2500 kgf/cm²) (25 KN/cm²), o coeficiente de segurança é 2 ou próximo.

Obs.1: Gráfico de σ_{crit} x λ de uma CA - 25

Obs.2: Alguns tipos de aço fabricados no Brasil: ASMT A 36 ($f_y = 25 \text{ kgf/mm}^2$)
AR 35 - CORTEN C ($f_y = 42 \text{ kgf/mm}^2$)

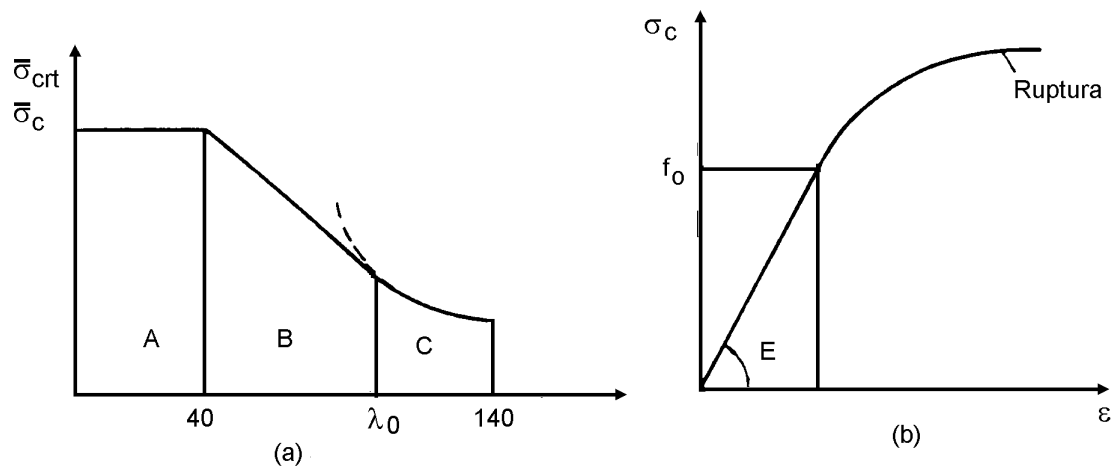


Fig. 22 - Gráfico tensão contra esbeltez.

11.2. Barras de Madeira

A NB 11 (NBR 7190), para o cálculo de estruturas de madeira, fixa as seguintes recomendações:

$$\underline{A} \quad \lambda \leq 40 \rightarrow \bar{\sigma}_{cr} = \bar{\sigma}_c \text{ (peças curtas)}$$

$$\underline{B} \quad 40 < \lambda \leq \lambda_0 \rightarrow \bar{\sigma}_{cr} = \bar{\sigma}_c \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda - 40}{\lambda_0 - 40} \right] \text{ (peças intermediárias)}$$

$$\underline{C} \quad \lambda \geq \lambda_0 \rightarrow \bar{\sigma}_{cr} = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_c \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 \text{ (peças longas)}$$

Obs.1: $\lambda_{\max} = 140$

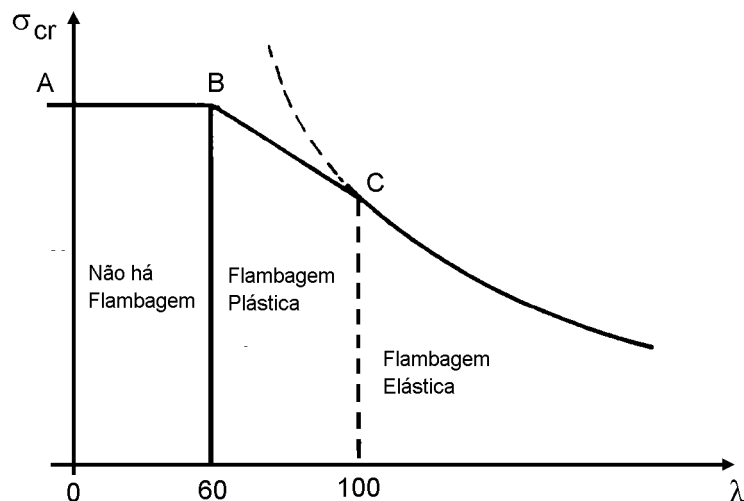


Fig. 23 - Gráfico $\bar{\sigma}_{cr} \times \lambda$ para a madeira.

Obs.2: $f_0 = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_c$

$$\bar{\sigma}_{cr} = f_0 = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_c$$

e:

$$\frac{\pi^2 E}{4\lambda^2} = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_c \Rightarrow \lambda_0 = (3\pi^2 E / 8\bar{\sigma}_c)^{1/2}$$

Obs.3: $\gamma = 4 \rightarrow$ coeficiente de segurança para peças de madeira solicitadas a compressão.

Obs.4: Alguns valores de $\lambda_0, \bar{E}, \bar{\sigma}_c$ para madeira:

	$\bar{\sigma}_c$	E	λ_0
Pinho do Paraná	53,5 kgf / cm ² (0,535 Kn / cm ²)	109.300 kgf / cm ² (1093 kN / cm ²)	87
Peroba Rosa	85 kgf / cm ² (0,85 kN / cm ²)	94.100 kgf / cm ² (941 kN / cm ²)	64
Eucalipto Citriodora	133 kgf / cm ²	165.000 kgf / cm ²	68

$$(1,33 \text{ kN / cm}^2) \quad | \quad (1650 \text{ kN / cm}^2) \quad |$$

11.3. Barras de Concreto

No curso de Concreto o estudo da flambagem terá atenção especial, dispensando-se, neste momento, qualquer outra consideração além das aqui apresentadas.

12 - Influência da força cortante e da deformação axial

12.1. Força cortante

Vamos analisar agora a influência da força cortante V , no cálculo da carga de flambagem.

Então:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}(M + Mv) = -\frac{M}{EI} + c \cdot \frac{1}{GA} \cdot \frac{dV}{dx}$$

lembrando-se:

$$\frac{\bar{d}y}{dx} = \gamma_m$$

$$\frac{\bar{d}y}{dx} = \frac{\tau_m}{G}$$

$$d\bar{y} = \frac{V}{AG} dx$$

e:

$$\frac{\bar{d}y}{dx} = c \frac{V}{GA} \rightarrow \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} = c \frac{1}{GA} \frac{dV}{dx}$$

Portanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c \frac{M}{EI} + c \frac{1}{GA} \frac{dV}{dx}$$

com $M = y \times P$ e:

$$\bar{c} = c \frac{1}{GA}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} \cdot y + c \frac{Pdy^2}{dx^2}$$

daí:

$$\frac{EI}{dx^2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{1-c'P} y = 0$$

que é a mesma equação de barra articulada-articulada:

$$\frac{P_{Cr}}{1-c'P_{Cr}} = P_{Cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{daí: } P_{Cr} = \beta \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{com } \beta = \frac{1}{1+c' \frac{\pi^2 EI}{l^2}} = \frac{1}{1+\pi^2 c \frac{E}{G} \left(\frac{i}{l}\right)^2}$$

Considerando-se uma seção T:

$$\left. \begin{array}{l} c = 2 \\ \frac{E}{G} = 8/3 \\ \frac{l}{i} = 100 \end{array} \right\} \rightarrow \text{a redução } \beta \text{ é de } \sim 0,5\%$$

12.2 Deformação axial

Vamos, agora quantificar o efeito da deformação axial na carga de flambagem.

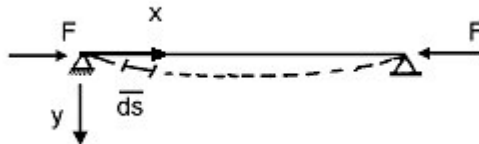


Fig. 24 - Elemento ds da barra.

Encurtamento da barra

$$\varepsilon_0 = \frac{F}{EA}$$

$$ds(1 - \varepsilon_0) = R d\varphi \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds(1 - \varepsilon_0)}$$

$$AB = ds(1 - \varepsilon_0 - \varepsilon) = (R + y) d\varphi$$

entretanto $\rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{M}{EI}$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds(1 - \varepsilon_0)} = \frac{M}{EI(1 - \varepsilon_0)}$$

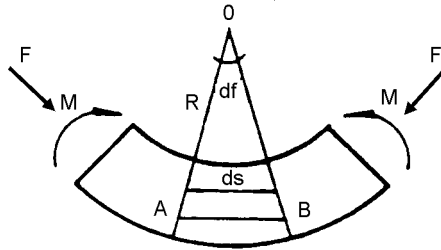


Fig. 25 - Flexão na barra.

A equação da linha elástica fica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI(1 - \varepsilon_0)}$$

Para o caso engastado-livre:

$$\varepsilon_0 = \frac{F \cos \theta}{EA} \quad (\theta \cong 0^\circ)$$

Daí: $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon_0}$

que é praticamente a fórmula sem considerações de ϵ_0 , pois se obtém na prática $\epsilon_0 \sim 0,001$.

13 - Exercícios

13.1. Um certo material segue o diagrama $\bar{\sigma}_{cr} \times \lambda$ indicado calcular \bar{F}_{cr} para a coluna da figura abaixo.

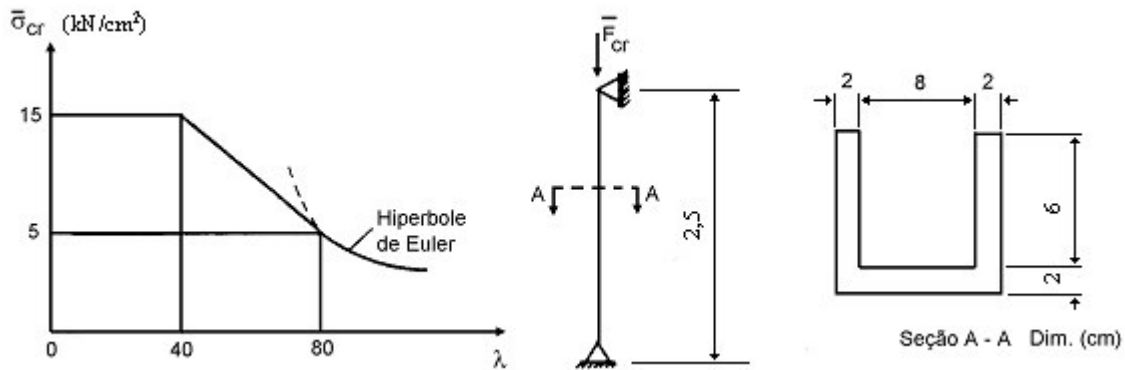


Fig. 26 - Dados do exercício.

$$E = 13.000 \text{ kN} / \text{cm}^2 \text{ (1.300.000 kgf} / \text{cm}^2)$$

Solução

a) Cálculo das características geométricas

C.G.

$$A = 48 \text{ cm}^2$$

$$y = \frac{(0 \times 12 \times 2) + 2(-4 \times 2 \times 6)}{2(2 \times 6) + (12 \times 2)} = -2 \text{ cm}$$

$$ZCG = 0$$

- Momentos Principais de Inércia

Seção simétrica \rightarrow x, y os eixos principais de inércia.

$$I_z = 2 \times \frac{2 \times 6^2}{12} + 2 \times 2 \times 6 \times 2^2 + \frac{12 \times 2^3}{12} + 2 \times 12 \times 2^2 = 272 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2 \times \left(\frac{6 \times 2^3}{12} + 2 \times 6 \times 5^2 \right) + \frac{12 \times 12^3}{12} = 896 \text{ cm}^4$$

$$\underline{\underline{I_{\min} = I_z = 272 \text{ cm}^4}}$$

b) Barra articulada-articulada

$$\ell_{cr} = 250 \text{ cm}$$

c) Cálculo do coeficiente de segurança adotado

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{272}{48}} = 2,38 \text{ cm}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\ell_{cr}}{i_{\min}} = \frac{250}{2,38} \cong 105$$

Obs 1: Este cálculo foi feito para se posicionar segundo o diagrama $\bar{\sigma}_{cr} \times \lambda$.

De acordo com o diagrama $\bar{\sigma}_{cr} \times \lambda$, para valores $\lambda \geq 80$ vale:

$$\bar{\sigma}_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\gamma \lambda^2}$$

Para $\lambda = 80$

$$S = \frac{\pi^2 \times 1300}{\gamma \times 80^2}$$

$$\gamma = 4,0$$

d) Cálculo de \bar{F}_{cr}

$$\bar{F}_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{\gamma \lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 13000 \times 48}{4,0 \times 105^2}$$

$$\underline{\underline{\bar{F}_{cr} = 139,6 \text{ KN}}}$$

13.2. Dimensionar a barra AB de seção circular, para que o sistema estrutural resista à máxima carga F possível de ser aplicada. A barra CD tem seção 6 cm x 6 cm

Obs: Utilizar as fórmulas da NB 14.

As barras AB e CD são de aço com $\bar{\sigma} = 1200 \text{ Kgf/cm}^2$
 ou $\bar{\sigma} = 12 \text{ KN/cm}^2$

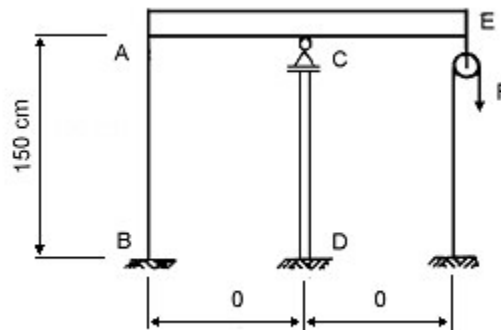


Fig. 27 - Sistema Estrutural.

Para se dimensionar a barra AB é necessário se conhecer a força que atua na mesma. Desta forma valem os seguintes esquemas estáticos.

$$\sum M_C = N_1 \times a - 2 F a = 0 \rightarrow N_1 = 2F$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow N_2 = -4F$$

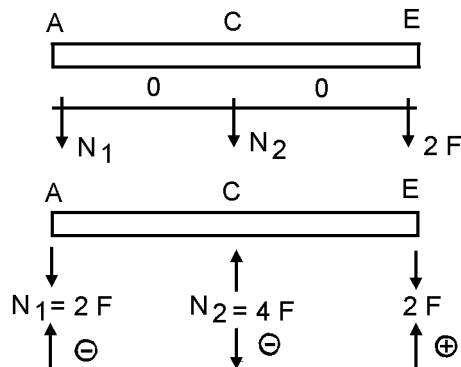


Fig 28 - Esquema Estático.

a) Cálculo da carga admissível N_2

$$I = \frac{6 \times 6^2}{12} = 108 \text{ cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{108}{36}} = 1,73 \text{ cm}$$

A barra CD é engastada livre, onde se apoia a viga AE, portanto:

$$\ell_{cr} = 2\ell = 300 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{\ell_{cr}}{i} = \frac{300}{1,73} = 173,2$$

De acordo com a NB 14: $\lambda > 105$ tem-se que:

$$\bar{\sigma}_{cr} = \frac{10363000}{(173,2)^2} = 245,45 \text{ Kgf/cm}^2 = 3,46 \text{ KN/cm}^2$$

$$\bar{N} = \bar{\sigma}_{cr} \cdot A \rightarrow \bar{N}_2 = 3,46 \times 36 = 124,56 \text{ KN}$$

b) Dimensionamento da barra AB

sendo: $\bar{N}_2 = 124,56 \text{ KN}$ vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N}_1 = 62,28 \text{ KN} \\ F = 31,14 \text{ KN} \end{array} \right.$$

Como a barra AB é de aço, com seção transversal circular e submetida a força de tração vem:

$$\bar{\sigma} = \frac{N_1}{A} \rightarrow 12 = \frac{62,28}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

$$\underline{\underline{D = 2,57 \text{ cm}}}$$

13.3. O escoramento da vala esquematizada é feito com madeira da espécie Peroba Rosa. Sabendo-se que as peças disponíveis para as escoras são de 6 cm x 12 cm, escolher a mais conveniente.

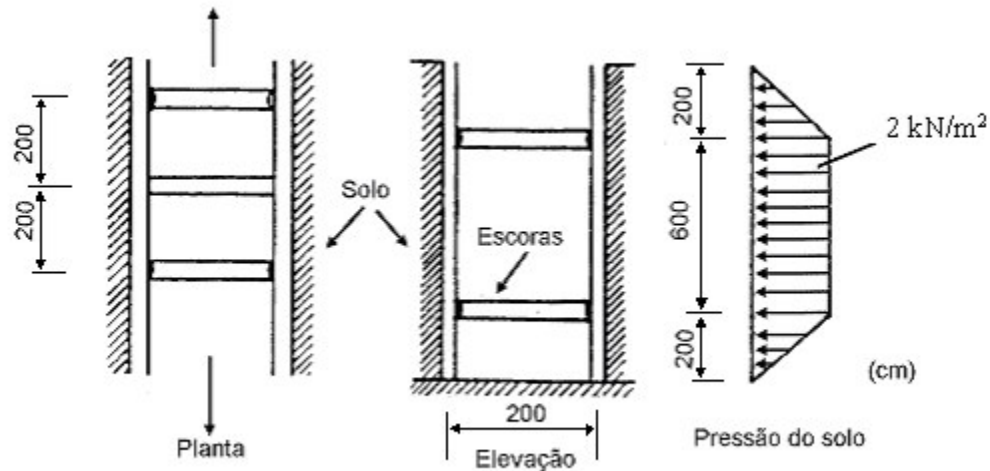


Fig. 29 - Dados para exercício (Dimensões em cm).

$$E (\text{Peroba Rosa}) = 942,5 \text{ KN} / \text{cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_c = 0,85 \text{ KN} / \text{cm}^2$$

Solução:

A idéia da solução do problema é determinar a carga axial e a partir desta verificar qual suporta tal carga sem romper.

a) Esforço em uma escora genérica

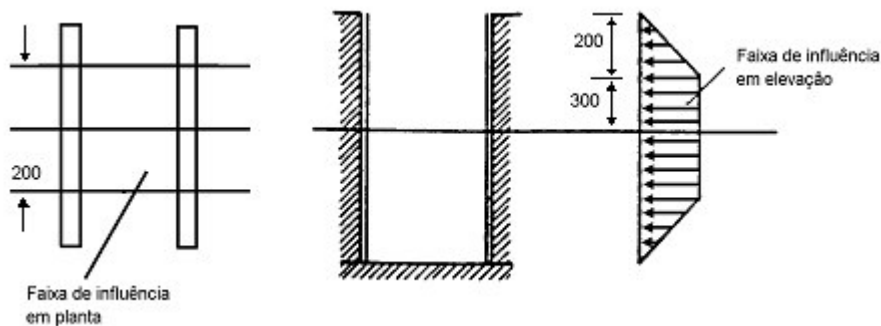


Fig. 30 - Esquema de Cálculo.

$$F = \left(\frac{20 \times 200}{2} + 20 \times 300 \right) \times 200 \times 10^{-4} = 16 \text{ kN}$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 Triângulo Retângulo faixa \equiv planta

b) análise dos perfis disponíveis

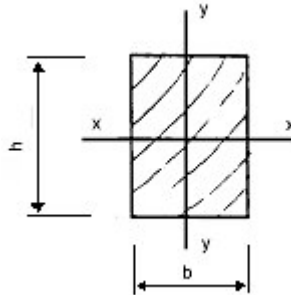


Fig. 31 - Seção transversal.

$$l_{cr} = l \text{ (art - art e NB11} \equiv \text{NBR 7190)}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{3}{8} \pi^2 \frac{E}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\pi^2 942,5}{0,85}} \cong 64$$

b.1) Seção 6 cm x 12 cm

$$\lambda = \frac{\pi^2 E}{4 \sigma_c} = \frac{\pi^2 \times 942,5}{4 \times 115,47^2} = 0,17 \text{ KN/cm}^2$$

$$\bar{F}_{cr} = \bar{\sigma}_{cr} \times A = 0,17 \times 6 \times 12,24 \text{ KN} < F$$

Como a carga admissível é menor do que a atuante esta peça com esta seção não poderá ser utilizada.

b.2. Seção 6 cm x 12 cm

$$\lambda = 115,47 > \lambda_0 \rightarrow \text{peça longa}$$

$$\bar{\sigma}_{cr} = 0,17 \text{ KN/cm}^2$$

$$\bar{F}_{cr} = 0,17 \times 6 \times 16 = 16,32 \text{ KN}$$
$$\bar{F}_{cr} > F \text{ - OK}$$

Com esta peça e esta seção é possível a escora suportar tal esforço.

BIBLIOGRAFIA

FEDOSIEV, V. Resistência dos Materiais. Edição Lopes da Silva. 1977

POPOV, E. P. Introdução à Mecânica dos Materiais. Ed. Edgar Blücher. 1978.

SCHIEL, F. Introdução à Resistência dos Materiais. Harper & Row do Brasil. 1984.

SILVA JR, J. F. S. Resistência dos Materiais. Ed. Ao Livro Técnico S.A. 1972.

ANEXO

- Barra engastada - livre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

$$M_0 - yF + M = 0$$

$$M = yF - M_0$$

$$M = yF - F\delta \quad (2)$$

(2) em (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Fy}{EI} - \frac{F\delta}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -K^2y + K^2\delta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2y = K^3\delta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2y = K^3\delta \quad (3) \text{ Equação Diferencial não homogênea}$$

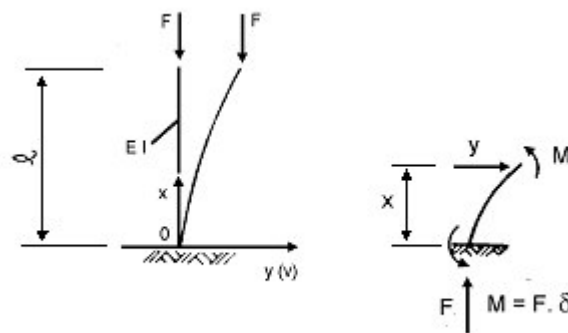


Fig. 32 - Elástica barra eng. - livre. Momento em x.

Solução: $y = y_h + y_p$

$$y_h = C_1 \operatorname{sen} Kx + C_2 \cos Kx \quad (4)$$

$$\begin{cases} y_p = Ax^2 + Bx + C \\ y'_p = 2Ax + B \\ y''_p = 2A \end{cases}$$

Em (3)

$$2A + K^2(Ax^2 + Bx + C) = K^2\delta$$

$$A = 0; \quad B = 0; \quad C = \delta \rightarrow y_p = \delta$$

$$\text{Solução: } y = C_1 \operatorname{sen} Kx + \delta \quad (5)$$

Condições de Contorno:

$$1^{\text{a}} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = C_2 + \delta \rightarrow \underline{\underline{C_2 = -\delta}}$$

$$2^{\text{a}} \begin{cases} \text{Giro em } (0) \\ \text{é zero} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow y' = KC_1 \cos Kx + \delta K \operatorname{sen} Kx = 0$$

$$C_1 \cos 0^0 = 0$$

$$\rightarrow C_1 = 0$$

$$3^{\text{a}} \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = -\delta \cos Kx + \delta \\ y = \delta \quad \delta = -\delta \cos K1 + \delta \end{cases}$$

$$\delta \cos K1 = 0$$

$$\delta \neq 0, \cos K1 = 0$$

$$K1 = \frac{\pi}{2} + n\pi; n = 0, 1, 2, \dots$$

$n = 0 \equiv 1^{\text{a}}$ situação que nos interessa

$$K1 = \frac{\pi}{2}$$

$$K = \frac{\pi}{2l} \rightarrow \frac{F}{EI} = \frac{\pi^2}{4l^2} \rightarrow F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (6)$$

- Barra engastada-articulada

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

$$Hx - Fy + M = 0$$

$$M = Fy - Hx \quad (2)$$

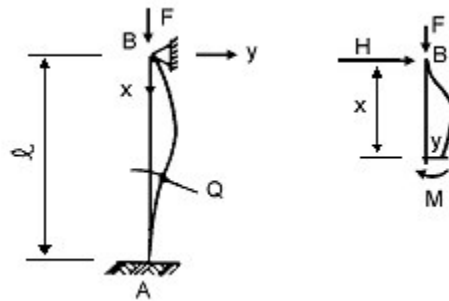


Fig. 33 - Elástica barra eng. Art. Momento em x.

(2) em (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Fy}{EI} + \frac{Hx}{EI}$$

chamando $K^2 = \frac{F}{EI}$ vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2y = \frac{Hx}{EI} \quad (3)$$

Equação diferencial não homogênea

- Assim $y = y_h + y_p$

$$y_h = C_1 \operatorname{sen} Kx + C_2 \operatorname{cos} Kx$$

$$\begin{cases} y_p = Ax^2 + Bx + C \\ y'_p = 2Ax + B \\ y''_p = 2A \end{cases}$$

Em (3)

$$2A + K^2(Ax^2 + Bx + C) = \frac{H}{EI}x$$

$$A = 0; C = 0 \text{ e } B = \frac{H}{EI K^2} \rightarrow y_p = \frac{H}{EI} \frac{x}{K^2} \quad (4)$$

Solução

$$1^{\text{a}} \text{ condição de contorno } \begin{cases} x = \ell \\ y' = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{C_2 = 0}}$$

$$2^{\text{a}} \text{ condição de contorno } \begin{cases} x = \ell \\ y' = 0 \end{cases} \text{ (giro no engaste)}$$

$$\rightarrow y' = KC_1 \cos Kx + \frac{H}{EI K^2} = 0$$

$$\underline{\underline{C_1 = -\frac{H}{EI K^3 \cos K\ell}}}$$

$$3^{\text{a}} \text{ condição de contorno } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow -\frac{H}{EI K^3 \cos K\ell} \operatorname{sen} Kl + \frac{H}{EI K^2} \ell$$

$\operatorname{tg} K\ell \approx K\ell$ (solução gráfica)

daí: $K\ell \cong 4,454$

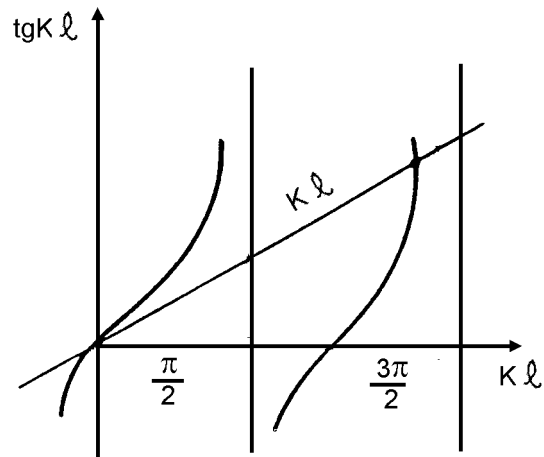


Fig. 34 - Solução gráfica.

$$K = \frac{4,454}{l}$$

$$F_{cr} = \left(\frac{4,454}{l}\right)^2 EI \cong 2 \frac{\pi^2}{l^2} EI$$

com: $l_{cr} = \frac{l}{\sqrt{2}}$

- Barra Engastada-Engastada

- Solução Prática

A barra, seu engastamento e os apoios são simétricos em relação ao eixo horizontal (1-1) que passa por (C). Esta simetria leva à condição da cortante em (C) ser nula, e as componentes horizontais também.

A parte AC deve ser simétrica em relação ao ponto D, e desse modo em (D) o momento fletor é nulo. Vale também esta consideração para parte CF. Ainda sabemos que o momento fletor é nulo nas articulações de uma barra bi-articulada. Portanto a solução do problema é determinar F_{cr} de uma barra bi-articulada de comprimento $l/2$.

Assim: $F_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$

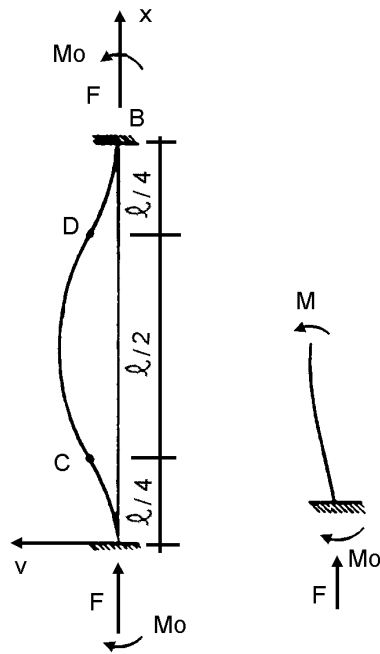


Fig. 35 - Elástica barra eng. -eng. Momento em x .

- Solução Matemática

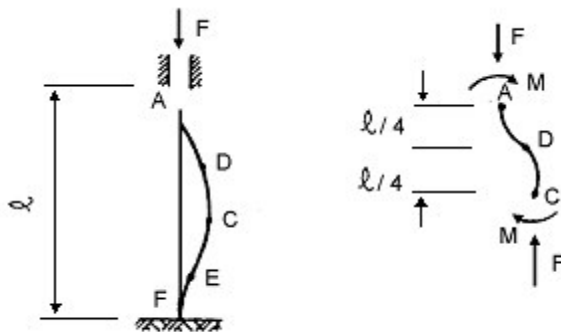


Fig. 36 - Elástica e momento.

$$M = M_0 - Fv$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -Fv + M_0$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{F}{EI} v = \frac{M_0}{EI}$$

- Solução particular: $v_p = \frac{M_0}{F}$

$$K^2 = \frac{F}{EI}$$

- $V_h = A_1 \cos Kx + B_1 \sin Kx \rightarrow$ solução homogênea

- $V = V_h + V_p \rightarrow$ solução geral

Condição de Contorno:

$$1^a) \begin{matrix} x=0 \\ v=0 \end{matrix} \rightarrow C_2 = -\frac{M_0}{F}$$

$$2^a) \begin{matrix} x=0 \\ v'=0 \end{matrix} \rightarrow C_1 K \cos Kx - C_2 \sin Kx = 0 \quad C_1 = 0 \rightarrow$$

$$v = C_2 \cos Kx + \frac{M_0}{F}$$

$$3^a) \begin{matrix} v=1 \\ v=0 \end{matrix} \rightarrow \frac{-M_0}{F} \cos Kl + \frac{M_0}{F} = 0$$

$$\frac{M_0}{F} (1 - \cos Kl) = 0$$

$$\cos Kl = 1$$

Daí: $Kl = n \cdot 2\pi$

$$K^2 = \frac{n^2 4\pi^2}{\ell^2}$$

$n = 0, 1, \dots$

$n = 1 \Rightarrow$

$$F_{\text{Cr}} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$4_{-}^a) \begin{matrix} x=\ell \\ v'=0 \end{matrix} \rightarrow \frac{M_o K}{F} \text{sen } K\ell = 0$$

$$\text{sen } K\ell = 0$$

$$K\ell = n\pi \rightarrow n = 2$$

$$(3^a)$$