Percepção Espacial
e
Geometria Descritiva

Prof. Carlos Kleber
carloskleber@gmail.com

7 de abril de 2009

Capítulo 1

Introdução

O universo é essencialmente tridimensonal. Mas nossa percepção é bidimensional: vemos o que está à frente de nossos olhos. Vemos uma sombra da realidade, uma projeção.

A geometria descritiva (GD) é a base geométrica para realizar projeções de objetos tridimensionais. Esta base é usada no desenho técnico.

1.1 Objetivo da disciplina

- Exercitar a percepção espacial;
- Apresentar aspectos da geometria;
- Apresentar a resolução geométrica de problemas;
- Apresentar exemplos práticos e relacioná-los com a disciplina.

1.1.1 Relação desta disciplina com outros campos da engenharia

Algumas aplicações da geometria descritiva são:

- Desenho técnico: projeção ortográfica.
- Matemática: cálculo vetorial, visualização de funções.
- Computação gráfica: cálculo de cenas tridimensionais.
- Óptica: projeção de imagens, projeto de lentes.

1.2 Noção espacial

Não é possível expressar um objeto tridimensional em uma vista bidimensional. Por exemplo, a foto de uma pessoa de frente não permite saber como ela se parece de lado.

Na GD, usa-se no mínimo duas vistas para expressar os problemas. Obviamente, três ou mais vistas podem esclarecer.

As vistas, individualmente, não servem para contar o todo. Deve-se usa as vistas como um conjunto. Por isso, costumam-se posicionar as vistas de forma alinhada, de acordo com o eixo comum entre as imagens.

Para localizar um objeto no espaço, é necessário:

- um ponto de referencia,
- um sistema de eixos que indiquem o sentido e direção de cada coordenada.

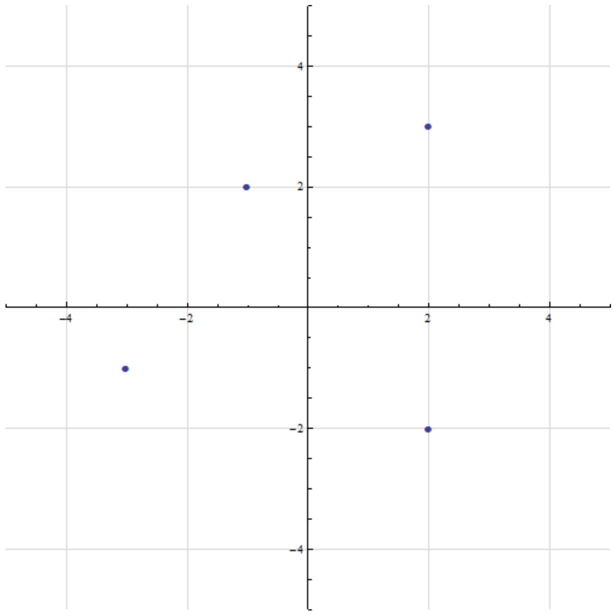

Figura 1.1: Representação de pontos em um espaço bidimensional (convenção matemática).

No sistema cartesiano, os eixos são ortogonais[1] entre si. é importante estar atento na convenção dos eixos, e isto pode variar dependendo da aplicação, pois não há um consenso. Será utilizada a convenção da geometria descritiva que está contida na maioria dos livros.

Seja um plano horizontal, denominado π ("pi", e que não tem nada a ver com 3,1415927...), que conterá os eixos X e Y, no qual já estamos acostumados. Imaginemos uma folha de papel deitada em uma mesa, perfeitamente horizontal. Podemos imaginar uma série de pontos nesta folha, e que possamos "subir" estes pontos. Estamos tirando estes pontos do papel, dando-lhes uma terceira dimensão.

Assim, além das coordenadas X e Y, o ponto agora possui Z, uma altura. Caso esta seja negativa, os pontos "afundariam" na mesa.

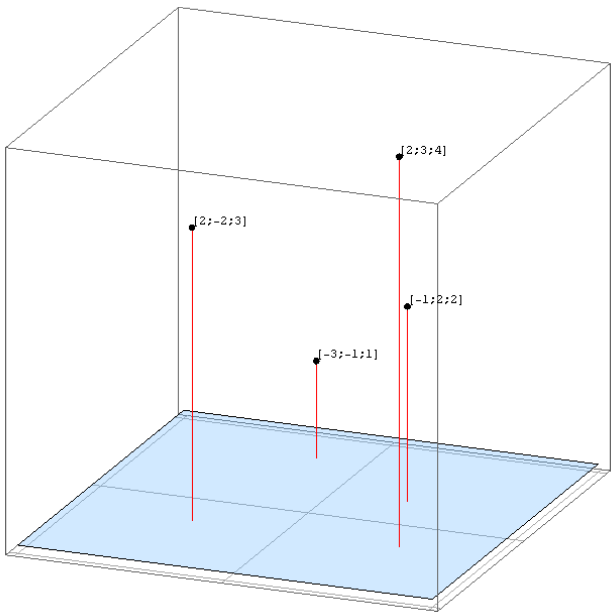

Figura 1.2: Pontos da figura 1.1, acrescidos com alturas.

[1]Formam um ângulo de 90^o.

1.3 Sistemas de coordenadas

1.3.1 Coordenadas absolutas

São as coordenadas baseadas no ponto de origem $[0;0;0]$.

1.3.2 Coordenadas relativas

São as coordenadas baseadas em um ponto arbitrário, suponto um mesmo sistema de eixos[2].

Para obter a coordenada absoluta, basta somar a coordenada relativa e a coordenada do ponto arbitrário.

1.3.3 Sistemas bidimensionais

Em duas dimensões, existem dois sistemas mais utilizados: retangular e polar.

Coordenadas retangulares

Consiste em utilizar as coordenadas X e Y, referenciando-se desta forma aos eixos principais.

Coordenadas polares

Consiste em localizar um ponto pela sua distância da origem e um ângulo em relação a um dos eixos principais.

Note que os dois sistemas podem descrever o mesmo ponto: as coordenadas retangulares serão os catetos do triângulo, e as coordenadas polares serão a hipotenusa e ângulo com o cateto adjacente.

1.3.4 Sistemas tridimensionais

Sistema cartesiano (Descartes) ou retangular

Sistema cilíndrico

Sistema esferico

[2]Pode ocorrer que uma coordenada relativa esteja relacionada a um outro sistema de coordenadas, mas no momento não vamos complicar.

Capítulo 2

Método projetivo

Seja agora um plano na vertical, que chamaremos de π' ("pi linha"). Este plano cortará o plano π. A interseção dos dois planos será uma reta, que chamaremos de linha de terra (LT). Esta linha de terra coincidirá com o eixo X.

Logo, podemos agora contar as coordenadas cartesianas de outra forma: X é a distância ao longo da linha de terra), Y é o afastamento a partir do plano vertical, e Z a altura em relação ao plano horizontal.

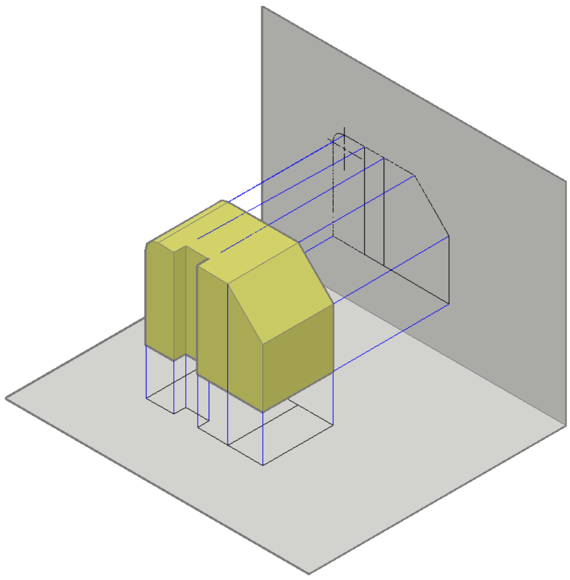

Figura 2.1: Sólido com linhas projetantes em seus vértices.

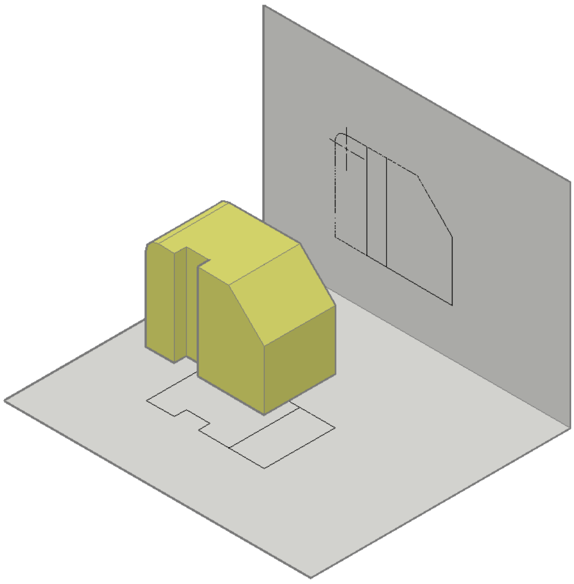

Figura 2.2: Sólido e suas projeções.

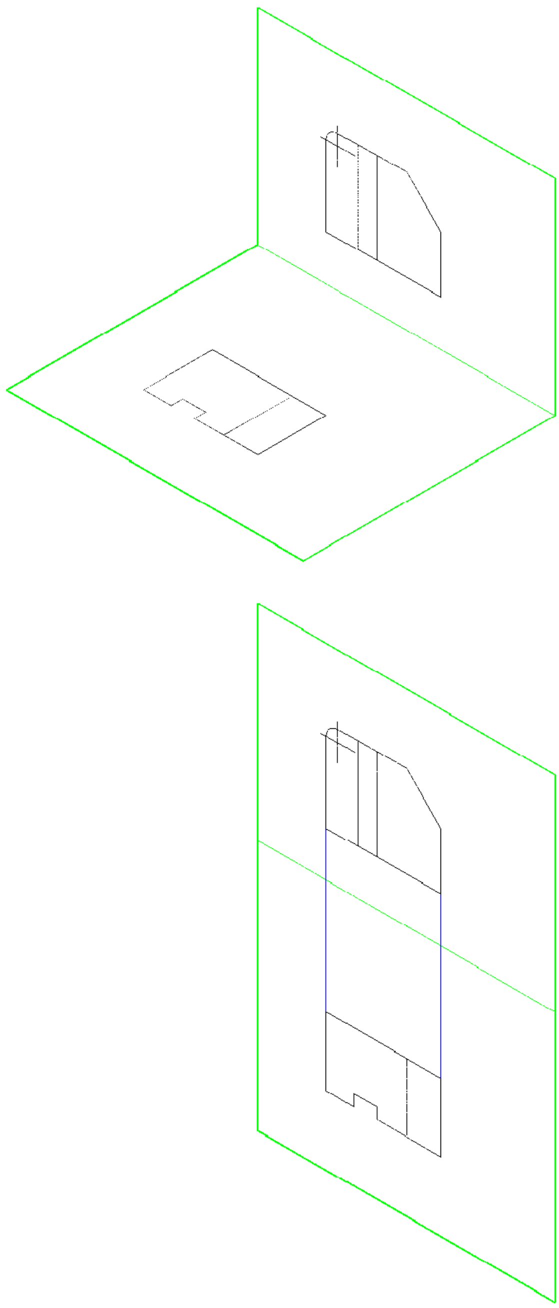

Figura 2.3: Desenvolvimento da épura do sólido.

Assim como π contém os eixos X e Y, o plano π' contém os eixos X e Z.
Os planos π e π' dividem o espaço em 4 diedros, que são sub-espaços com características distintas:

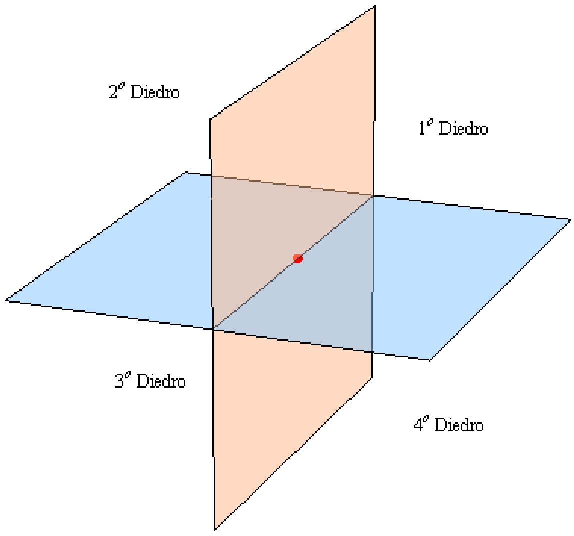

Figura 2.4: divisão do espaço em diedros.

Diedro	Y	Z
1º	+	+
2º	-	+
3º	-	-
4º	+	-

Tabela 2.1: Diedros e coordenadas

Pode acontecer ainda uma situação de fronteira: por exemplo, um ponto com coordenada Y zero estará entre o primeiro e segundo diedros. A própria linha de terra está entre os quatro diedros.

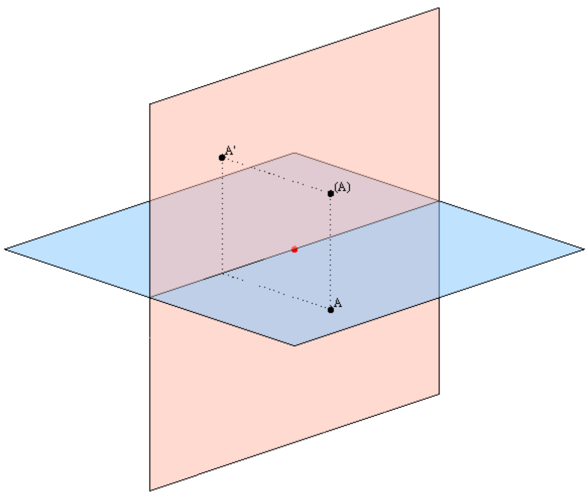

Figura 2.5: Os planos principais com um ponto e suas projeções nos planos.

Em geral os estudos são realizados no primeiro diedro (Y e Z positivos), os estudos no segundo ou quarto diedro são puramente teóricos, pois sua representação é confusa. O estudo no terceiro diedro simplesmente inverte a posição das vistas.

A interseção entre π e π' é a linha de terra (também chamada de $\pi\pi'$)

Qualquer objeto (ponto, reta, plano, sólidos, etc) pode ser projetado em cada um dos planos principais.

Para um objeto no primeiro diedro, teremos:

- uma projeção no plano horizontal (a Vista Superior).
- Uma projeção no plano vertical (a Vista Frontal).

Épura: rebatimento do plano horizontal sobre o vertical, "ficando tudo na mesma folha".

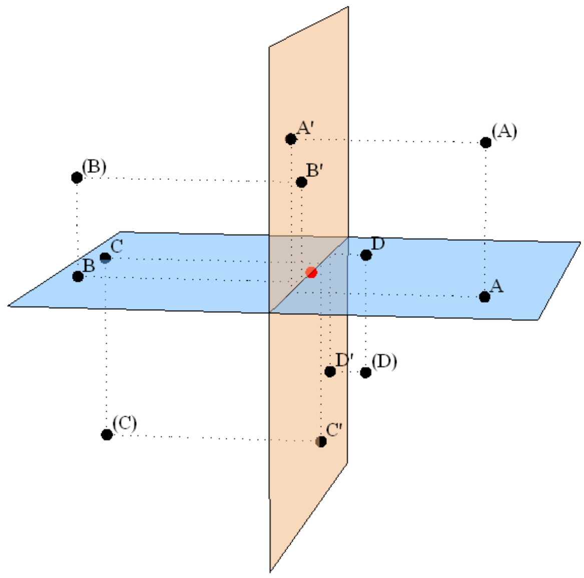

Figura 2.6: Pontos nos quatro diedros e suas projeções.

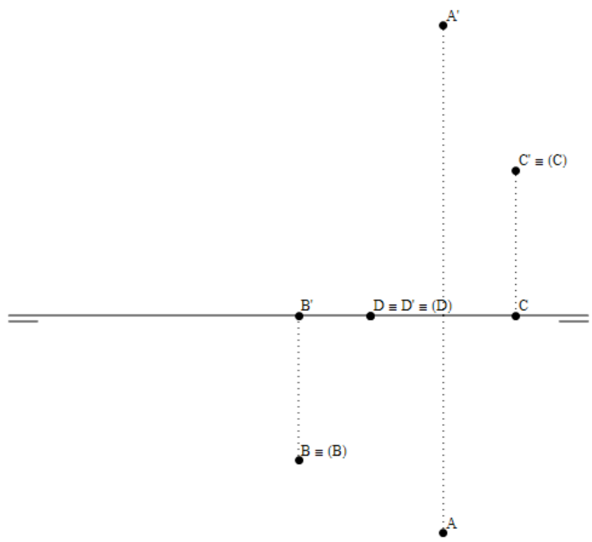

Figura 2.7: Exemplos de pontos da figura 2.6 em épura.

Na prática usaremos três ou mais planos (chamados de π'', π''', seguindo a mesma convenção). O que for ensinado em π e π' é aplicado para qualquer outro plano.

O terceiro plano é usualmente a "vista lateral" do objeto. Sua posição é cortando a coordenada $X = 0$, ficando ortogonal aos outros dois planos principais. Teremos então três "folhas" e um "canto", equivalente ao ponto de origem $[0; 0; 0]$.

Para rebater os três planos em uma folha, teremos que "recortar" uma das arestas, como mostra por exemplo na figura 2.8.

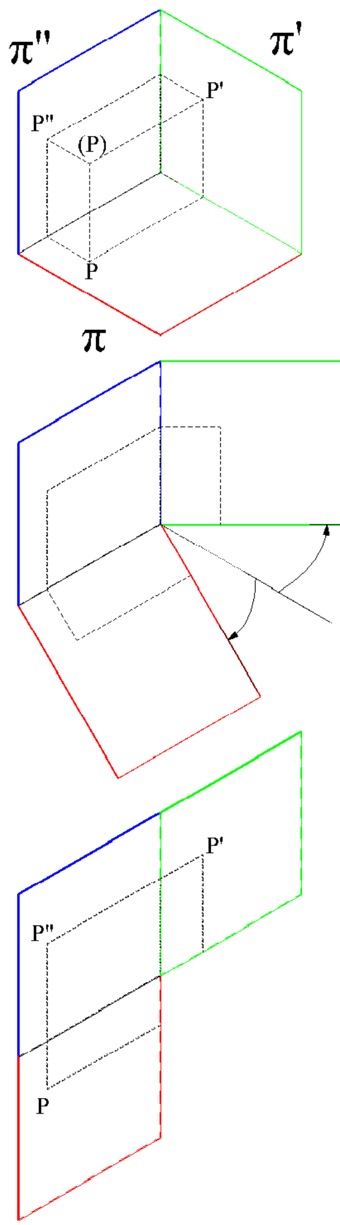

Figura 2.8: Rebatimento de dois planos.

Na figura 2.8 representa o conceito de épura com o terceiro plano, π'', realizando as três vistas principais. Observe no exemplo do ponto, em cada vista/ plano teremos duas coordenadas:

Plano	Coordenadas
π	X e Y
π'	X e Z
π''	Y e Z

Tabela 2.2: Coordenadas espaciais projetadas nos planos principais.

Logo, por exemplo, não temos como ter idéia da altura de um objeto (coordenada Z) em uma projeção que contenha somente coordenadas X e Y. Por isso que a épura é para ser interpretada como um todo. Uma projeção não é suficiente para descrever um objeto no espaço.

2.1 Representação de sólidos no espaço

A geometria descritiva é a base para as vistas ortográficas. Para melhorar o entendimento, vamos mostrar o produto final, para depois entender os seus princípios.

Capítulo 3

Ponto

O ponto é uma entidade abstrata sem dimensão[1]. Usualmente constumamos pegar pequenos objetos e considerá-los como pontos. Também usamos os chamados pontos notáveis,

Coordenadas: X (abscissa), Y (afastamento) e Z (altura ou cota). Representado por [X; Y; Z]

- X é alinhado com a LT;
- Y é a distância do plano vertical (π');
- Z é a distância do plano horizontal (π) - "altura a partir do chão".

O ponto é definido por uma letra maiúscula. A representação do ponto real (no espaço) é dado entre parênteses[2]. As projeções são conforme a sua projeção. Ex. ponto real (A), projeção horizontal A, projeção vertical A'. [3]

As projeções de um ponto na épura sempre estarão alinhadas na vertical.

3.0.1 Projeções coincidentes

Quando duas projeções coincidem-se, indicamos pelo símbolo $\equiv$: $A \equiv B$, $A' \equiv B'$, $C \equiv D'$

Para dois pontos serem coincidentes no espaço, ambas as projeções devem ser coincidentes.

Quando um ponto está contido em um dos planos principais, ele coincide com uma das suas projeções: $(A) \equiv A$, $(B) \equiv B'$.

Quando o ponto está sobre a LT, ele coincide com ambas as projeções: $(A) \equiv A \equiv A'$.

[1] Não possui comprimento, área ou volume, mas isso não quer dizer que não possua coordenadas no espaço.

[2] Representaremos o ponto real em perspectivas. O ponto real somente estará na épura se estiver exatamente sobre um dos planos principais, aonde indicamos que ele coincide com uma das projeções.

[3] Pode-se usar índices para as projeções, por exemplo A_H e A_V, pois existem diversas convenções em GD.

Capítulo 4

Linha

4.1 Definições

4.2 Retas

A reta é um tipo de linha. É composta por infinitos pontos.

Definido por uma letra minúscula. Assim como os pontos, possui duas projeções. Ex. a reta real (r) e suas projeções r e r'.

Uma reta tem extensão infinita. Uma semi-reta possui um ponto inicial (ou final). Um segmento de reta possui um ponto inicial e um ponto final.

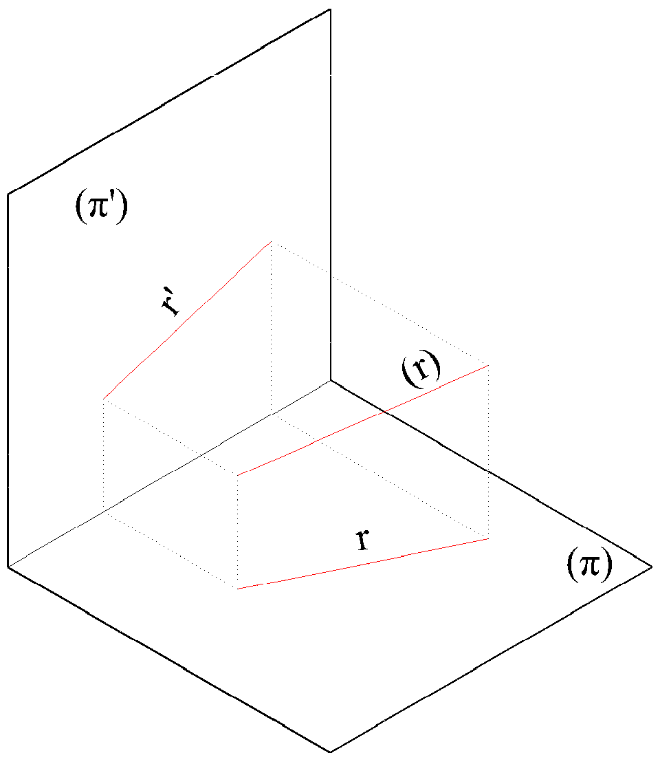

Figura 4.1: Exemplo de reta no espaço e suas projeções

Contém uma série de pontos. As projeções A, B, C, estarão em cima de r; as projeções A', B', C' estarão em cima de r'. Lembrando que as projeções de cada ponto devem estar alinhados entre si.

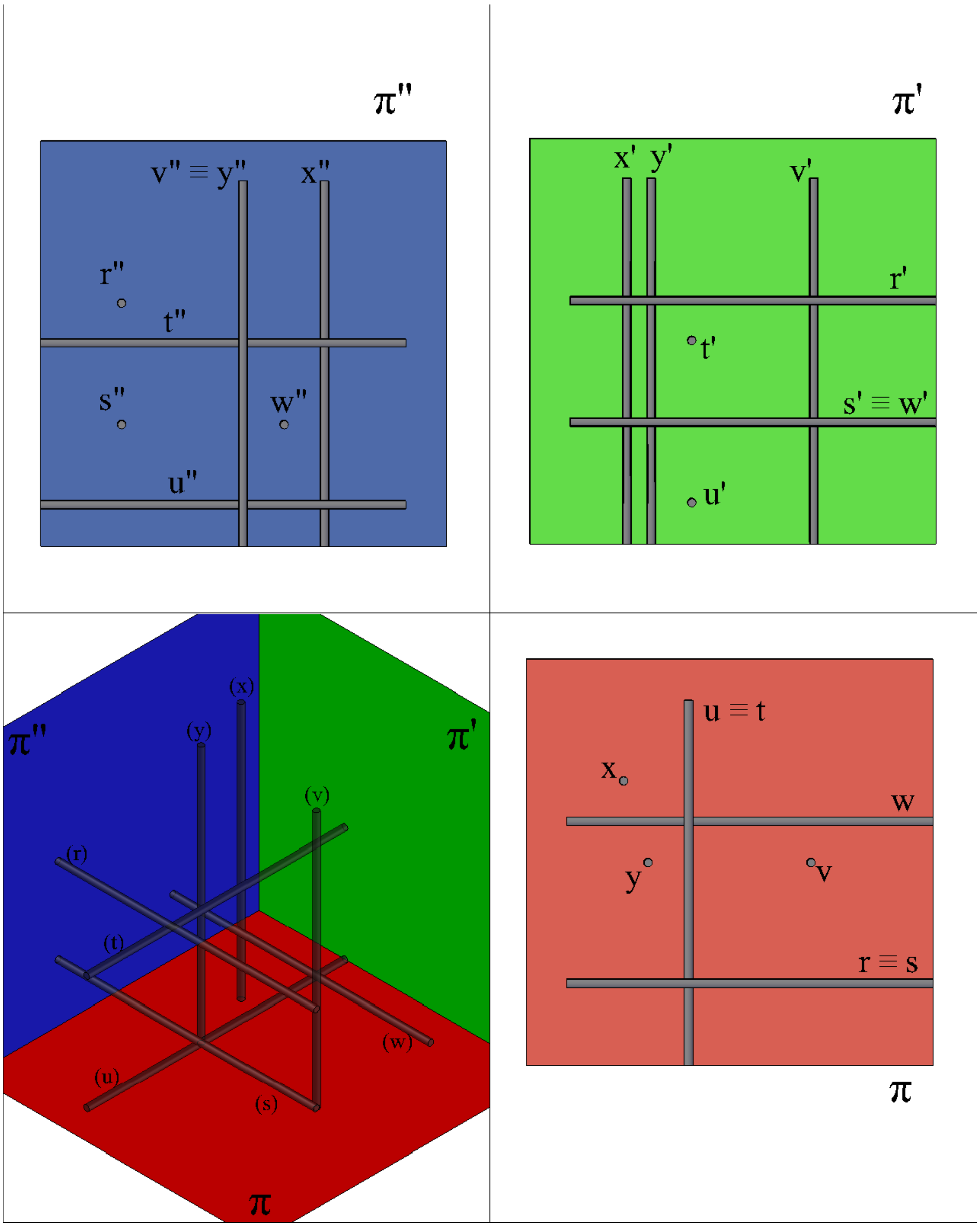

Figura 4.2: Exemplo de retas no espaço e suas projeções

Definindo uma reta: a partir das projeções de dois pontos, ligando A' e B' encontra-se r', ligando A e B encontra-se r.

Pontos principais da reta: (V) (aonde a reta "fura"π') e (H) (aonde a reta fura π). sdsd Ponto (V) está contido no π', ou seja, possui coordenada $Y = 0$ e a projeção V estará sobre a LT.

Ponto (H) está contido no π, ou seja, possui coordenada $Z = 0$ e a projeção H' estará sobre a LT.

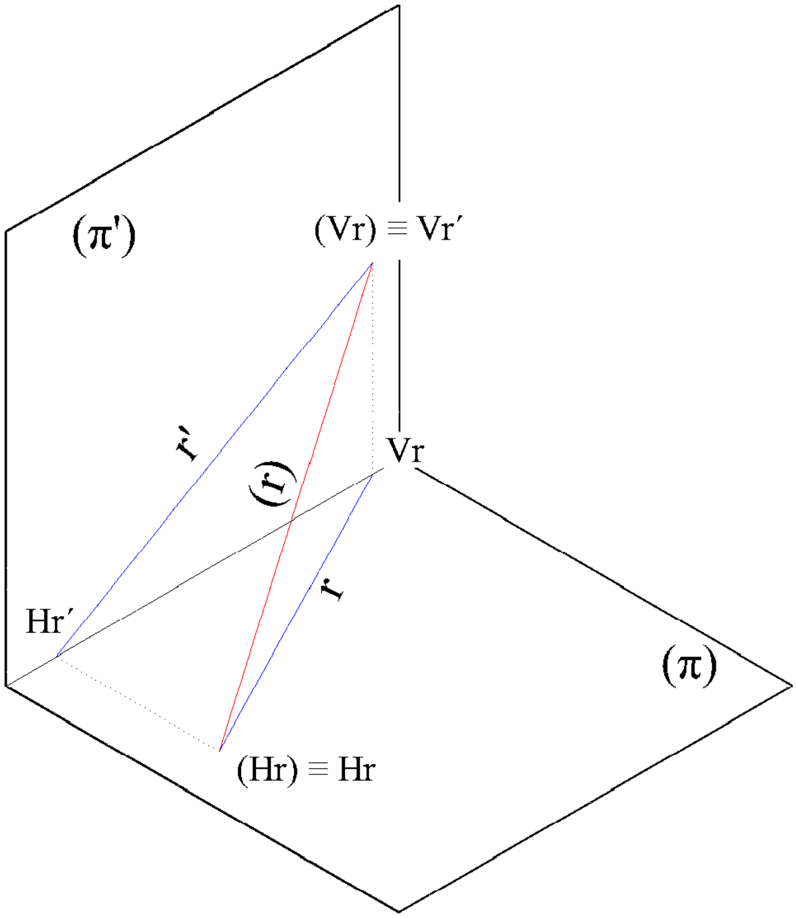

Figura 4.3: Reta interceptando os planos principais.

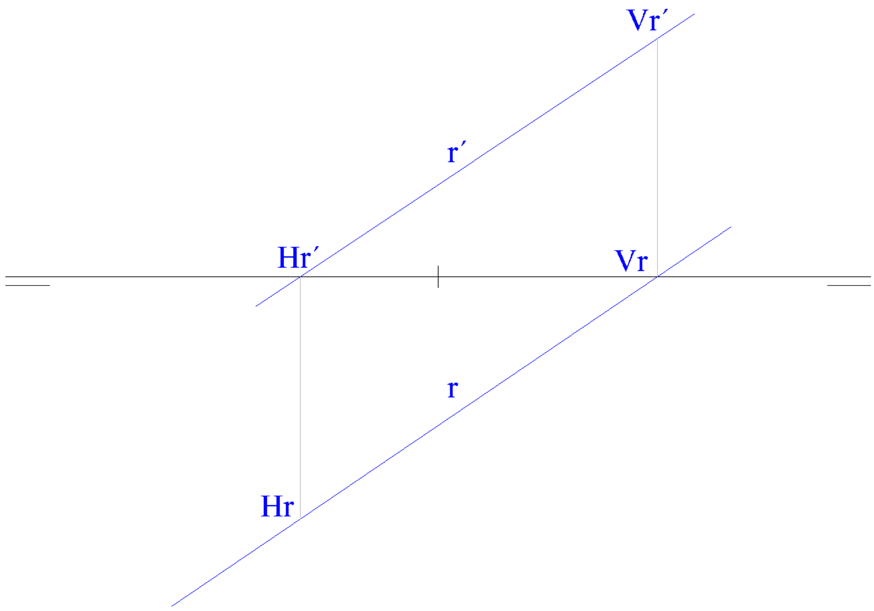

Figura 4.4: Épura da figura anterior.

Uma reta não conterá obrigatoriamente (V) ou (H), como veremos adiante.

Classificação de retas

Se a reta for paralela a π, ela não irá cruzá-lo, logo não existe ponto (H). A reta tem coordenada Z constante. A projeção r' será paralela à LT.

Se a reta for paralela a π', ela não irá cruzá-lo, logo não existe ponto (V). A reta tem coordenada Y constante. A projeção r será paralela à LT.

Se a reta for paralela a ambos os planos principais, não haverá (V) nem (H). A reta tem coordenadas Y e Z constantes. As projeções serão paralelas à LT (a reta é do tipo fronto-horizontal).

Tradicionalmente classificam-se as retas por:

- Horizontal (ou de nível) - paralela a π, coordenada Z constante;
- Frontal - paralela a π', coordenada Y constante;
- Fronto-horizontal - paralela a π e π', (consequentemente, paralela a LT), coordenadas Y e Z constantes;
- de Topo - perpendicular a π', coordenadas X e Z constantes, paralela a π;
- Vertical - perpendicular a π, coordenadas X e Y constantes, paralela a π';
- de Perfil - perpendicular a LT, coordenada X constante;
- Qualquer - qualquer outra reta que não é classificada pelos itens anteriores.

4.2.1 Interação entre retas

Interseção de retas: possuem um ponto em comum. Lembre-se que um ponto tem as projeções alinhadas na vertical. Podemos ter cada projeção de reta se cruzando, ou um par de projeções coincidir.

Retas paralelas: quando cada projeção é paralela entre si. Uma par de projeções pode coincidir.

4.3 Curvas

Sua definição é de uma sequência de pontos contínuos. A reta pode ser interpretada como um caso específico de curva. Outros tipos são as linhas definidas por funções matemáticas. As curvas podem percorrer qualquer direção no espaço.

Neste curso serão abordados os tipos mais simples de curvas, como as circunferências.

4.3.1 Circunferências

Sua definição é do lugar geométrico cuja distância (raio) de qualquer posição a um determinado ponto (centro) será sempre constante.

Neste curso será ilustrado a circunferência em posições ortogonais (alinhadas aos planos principais). Desta forma teremos sempre a circunferência em verdadeira grandeza em alguma projeção. Nas projeções restantes, sua projeção será um segmento de reta com comprimento igual ao diâmetro.

Pontos de uma circunferência

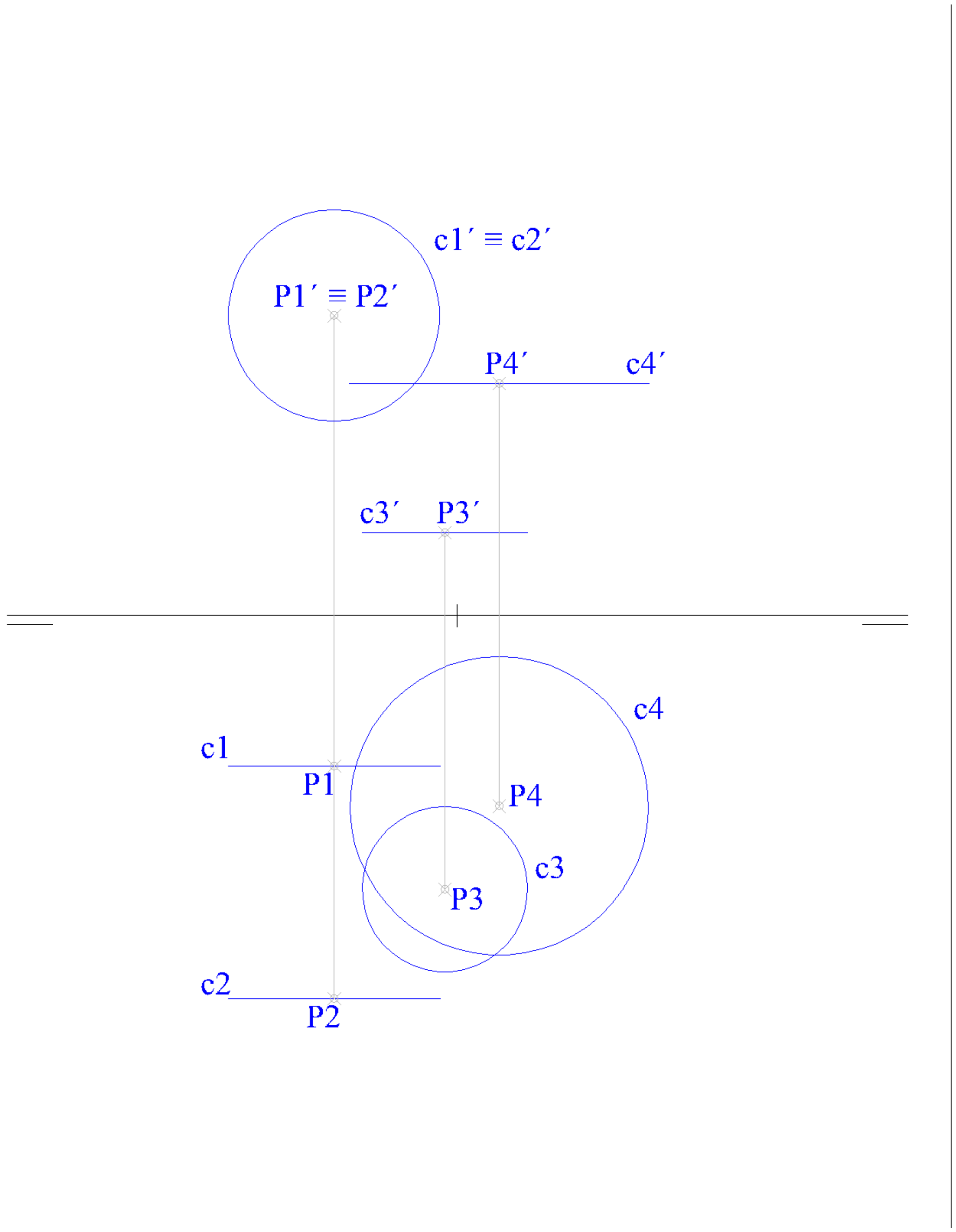

Figura 4.5: Exemplo de circunferências em épura.

4.4 Polígonos

Polígonos regulares
Relação de polígonos regulares e circunferências
Posições ortogonais

4.5 Outros tipos de linhas

4.5.1 Elipses

4.5.2 Espirais

4.5.3 Helicoidais

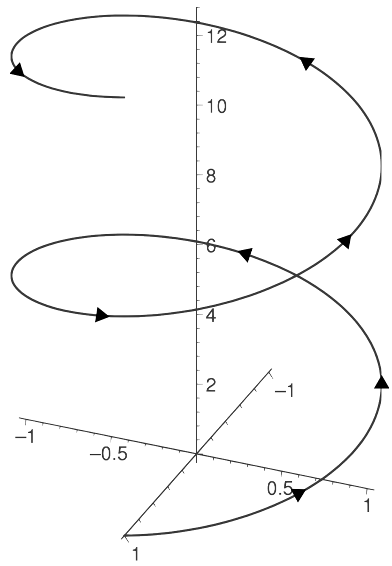

Figura 4.6: Exemplo de helicoidal em torno do eixo z.

Capítulo 5

Superficies

5.1 Definições

5.1.1 Superficies abertas e fechadas

5.1.2 Superfícies convexas e côncavas

5.2 Planos

Definido por uma letra grega (α, β, γ, δ, π, etc).

A interseção de dois planos é uma reta.

5.2.1 Representação em épura

Não usamos a projeção do plano, pois seria confuso.

É mostrado o local aonde intercepta os planos principais. Ex. aonde o plano (α) corta π, reta $\alpha\pi$; aonde o plano (α) corta π', reta $\alpha\pi'$.

Estas retas irão cruzar a LT no mesmo ponto.

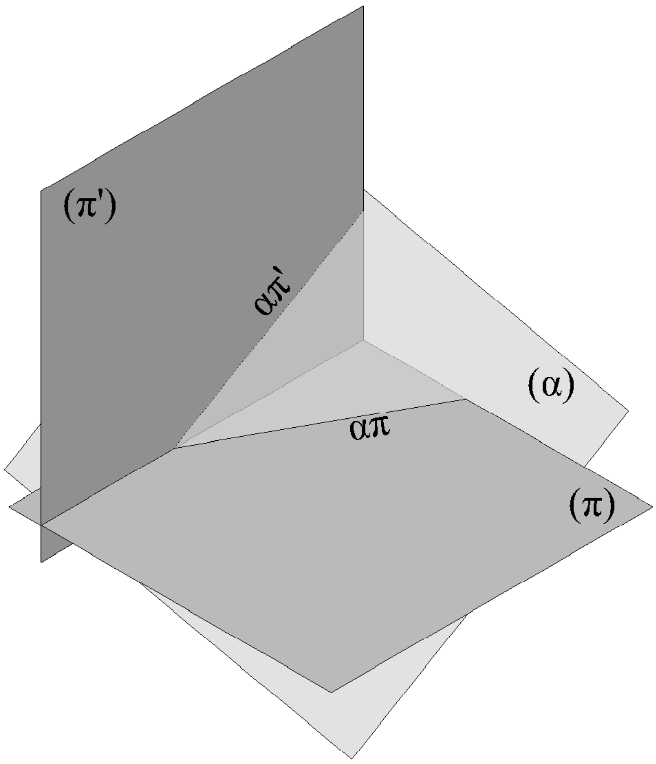

Figura 5.1: Exemplo de plano genérico, mostrando suas interseções com os planos principais e a LT.

Se o plano é paralelo a π, não haverá $\alpha\pi$. Se o plano é paralelo a π', não haverá $\alpha\pi'$.
Se o plano é perpendicular a π, a projeção $\alpha\pi'$ será perpendicular à LT.
Se o plano é perpendicular a π', a projeção $\alpha\pi$ será perpendicular à LT.
Reta contida em um plano - o ponto V' está em cima de $\alpha\pi'$, o ponto H está em cima de $\alpha\pi$.
Ponto contido no plano- encontrar uma reta contida no plano que passam pelo ponto. Ex. sabendo a projeção A', passa uma projeção de reta r'. Através dos pontos V e H, encontrar a projeção r. A projeção A estará na vertical de A', cruzando com r.

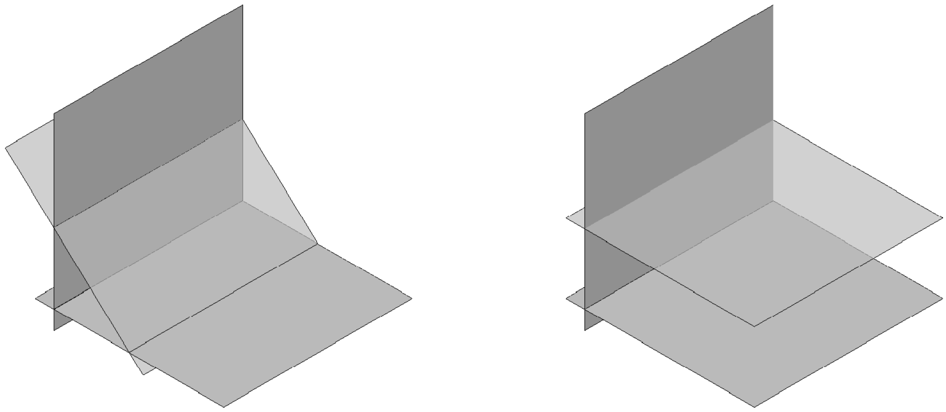

Figura 5.2: Exemplos de planos.

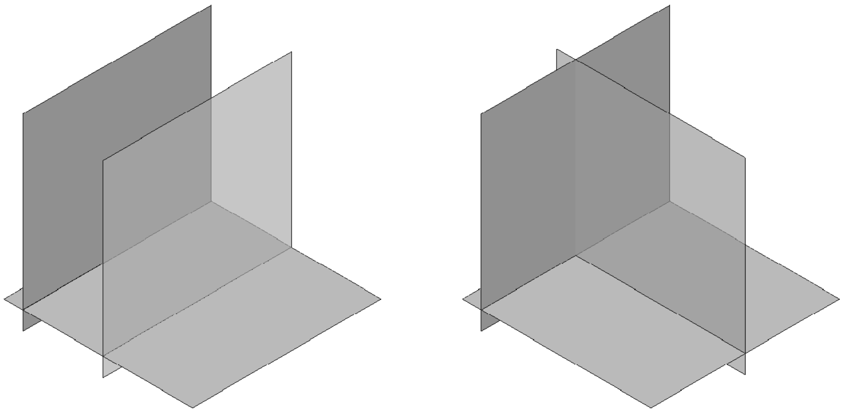

Figura 5.3: Exemplos de planos.

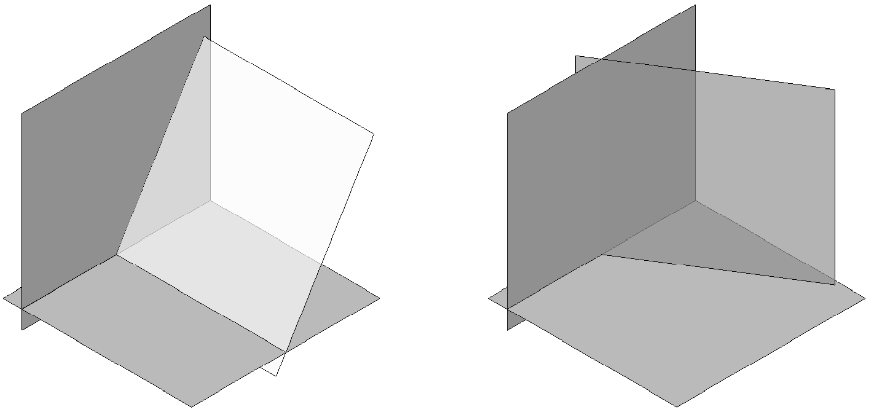

Figura 5.4: Exemplos de planos.

5.2.2 Definindo um plano

Duas retas paralelas - achar os pontos principais de cada reta. Ligar V' com V', achando $\alpha\pi'$; ligar H com H, achando $\alpha\pi$.

Duas retas concorrentes (se cruzando) - idem acima.

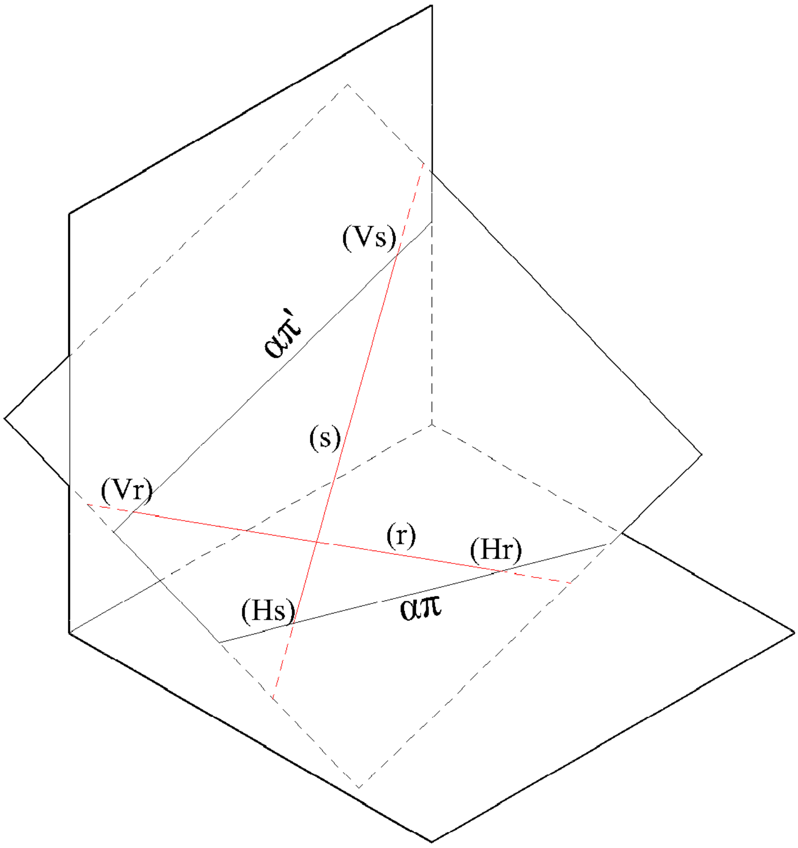

Figura 5.5: Duas retas cruzando-se no espaço e o plano que as contém.

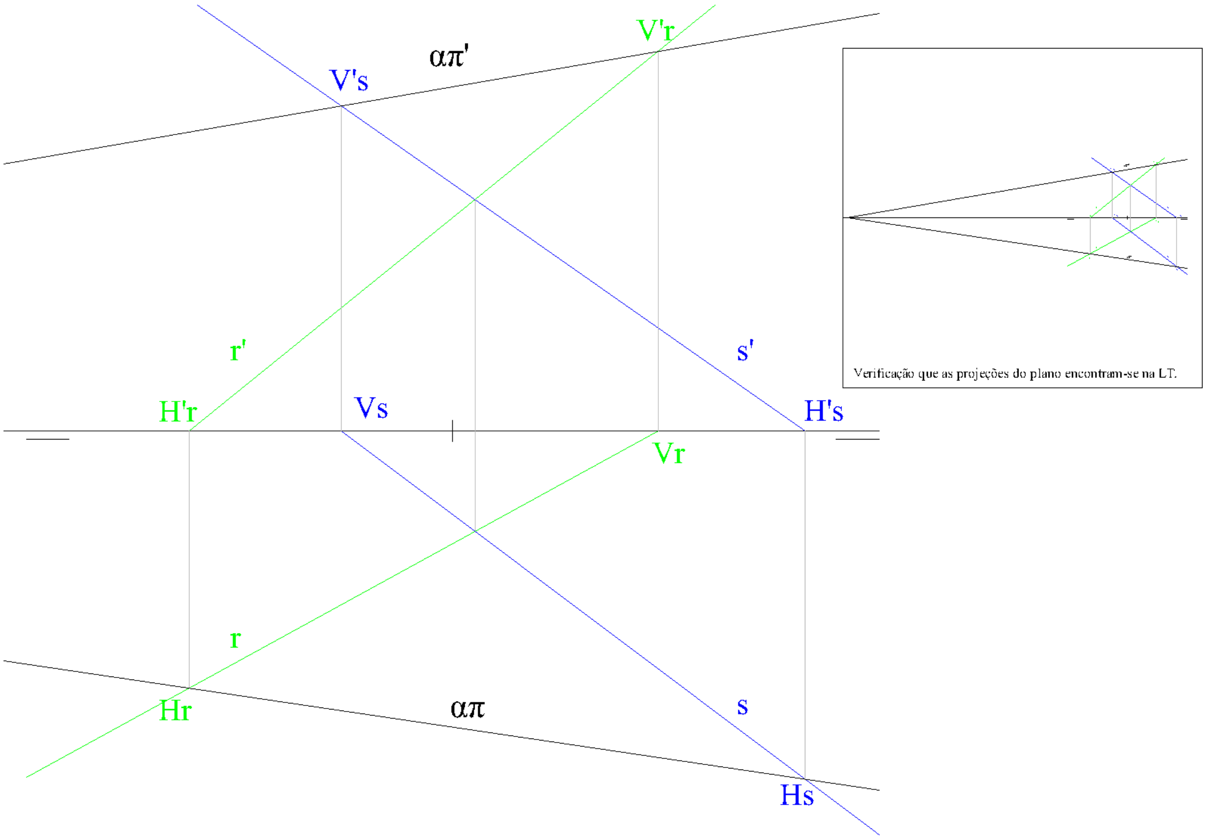

Figura 5.6: Exemplo de traçado de plano a partir de duas retas concorrentes. No detalhe, comprova-se que os traços do plano encontram-se na LT

Três pontos não-colineares (que não estejam na mesma reta) - encontrar duas retas (ligar A com B e B com C), o resto idem acima.

Interseção de planos - possuem uma reta em comum. O cruzamento de $\alpha\pi'$ e $\beta\pi'$ define o V' da reta. O cruzamento de $\alpha\pi$ e $\beta\pi$ define o H da reta. Achar V e H', na LT. Ligar V com V' e H com H'.

Planos paralelos - Quando cada projeção é paralela entre si.

5.3 Superfícies curvas

5.3.1 Cilindros

"Superfície gerada por uma reta móvel (geratriz) que se apóia numa curva (diretriz), conservando-se paralela."

5.3.2 Cones

"Superfície gerada por uma reta móvel (geratriz) passante por um ponto fixo (vértice) e que se apóia por numa curva (diretriz)". A diretriz mais conhecida é uma circunferência, mas podemos obter uma pirâmide a partir de um quadrado.

5.3.3 Esferas

"Lugar geométrico dos pontos cuja distância a um ponto fixo (centro) é constante."

5.3.4 Elipsóides

5.3.5 Hiperbolóides

5.3.6 Toróides

Superfície de revolução gerado por uma circunferência em torno de um eixo coplanar.

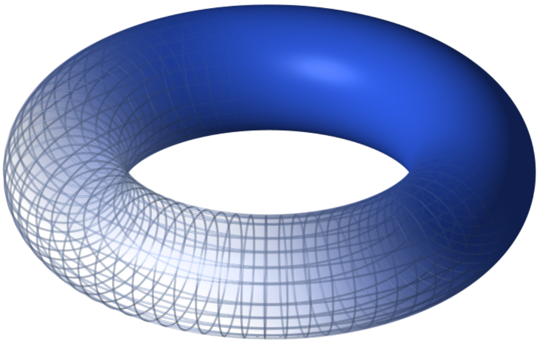

Figura 5.7: Toróide (fonte: Wikipedia).

5.4 Curiosidades

5.4.1 Fita de Möbius

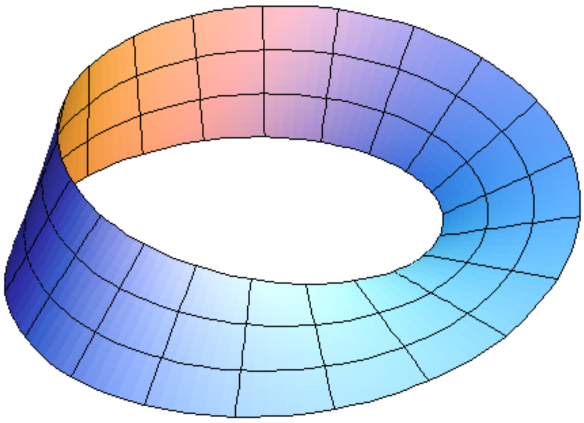

Figura 5.8: Fita de Möbius.

5.4.2 Garrafa de Klein

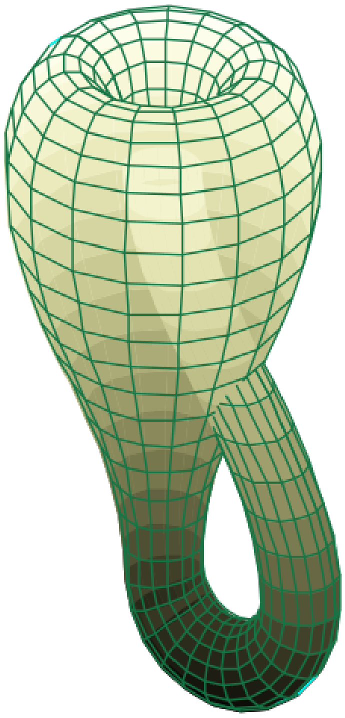

Figura 5.9: Garrafa de Klein.

Capítulo 6

Sólidos

São limitados por superfícies fechadas.

Poliedros são um tipo particular, no qual todas as faces são planas, formando necessariamente arestas (segmentos de reta) nas junções, que por sua vez formam vértices (pontos).

6.1 Cubo

Desenho de arestas

Projeção das faces

6.2 Prismas

Desenho das arestas

Projeção das faces

6.3 Pirâmides

6.4 Cones

6.5 Poliedros regulares

Cubo (hexaedro), tetraedro (4 faces triangulares), dodecaedro (12 faces pentagonais), octaedro (8 faces triangulares), icosaedro (20 faces triangulares);

Capítulo 7

Relações básicas entre entidades geométricas

7.1 Paralelismo

7.2 Perpendicularidade

7.3 Tangência

7.4 Interseção

7.5 Manipulações geométricas básicas

7.5.1 Translação

7.5.2 Rotação

7.6 Rebatimento (vista lateral)

Quando duas projeções não é suficiente para um entendimento claro, pode-se usar uma terceira projeção, realizada em um plano lateral (π''). Este plano é perpendicular a π e π'. As projeções neste plano serão chamadas de A", r", $\alpha\pi''$...

O plano π'' pode ser alocado aonde for mais conveniente, e seu rebatimento pode ser feito à direita ou à esquerda da épura.

Observe então que cada projeção conterá duas coordenadas do objeto original. Por exemplo, um ponto (A):

- A projeção A é localizada pelas coordenadas X, Y;
- A projeção A' é localizada pelas coordenadas X, Z;
- A projeção A'' é localizada pelas coordenadas Y, Z.

Podemos usar a vista lateral para visualizar e solucionar:

- Retas de perfil (X constante);
- Planos paralelos a LT e retas contidas neste plano;
- Planos de perfil (X constante);
- Planos que passam pela LT (exemplo particular: planos bissetores).

7.7 Poliedros

Os poliedros são sólidos cujas faces são planas. No poliedro regular, suas faces são polígonos regulares.

- Vértices: pontos;

- Arestas: segmentos de reta;
- Faces: segmentos de plano.

7.8 Métodos descritivos

7.8.1 Rotação

Para haver a rotação, é preciso:

- Um eixo de rotação (uma reta);
- O ângulo de rotação;
- O sentido de rotação (horário ou anti-horário).

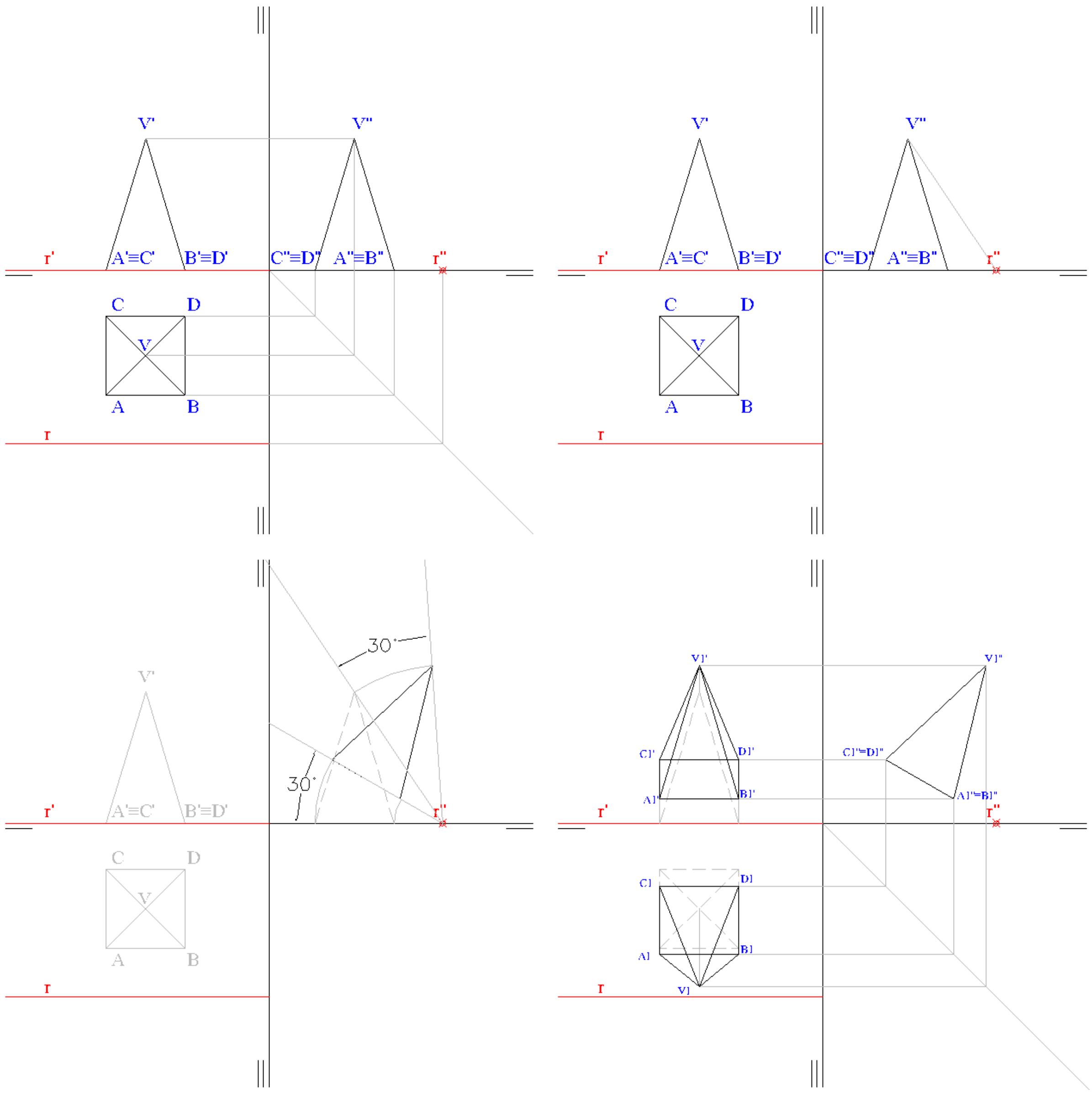

Figura 7.1: Exemplo de rotação de 30^o uma pirâmide em torno de uma reta horizontal

7.8.2 Rebatimento (genérico)

Consiste em projetar um elemento em um plano, com o objetivo de visualizá-lo em verdadeira grandeza. Logo, o plano que será rebatido deve ficar paralelo ao elemento.