



**UNICAMP**

**UNICAMP**

**Faculdade de Engenharia Mecânica**

**Departamento de Mecânica Computacional**

**Laboratório de Mecânica Estrutural Computacional**

**NOTAS DE AULA DE**  
**RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II**

**Josué Labaki**  
**PED Resistência dos Materiais**  
**labaki@fem.unicamp.br**

**VERSÃO 2009b**

## Apresentação

Este material é uma versão expandida das notas que tomei das aulas do Prof. Euclides de Mesquita, meu orientador acadêmico e também no PED.

Meu objetivo com esse trabalho é prover os alunos de um material consistente com a notação e a filosofia do curso de Resistência dos Materiais da Unicamp, tão abrangente que pudesse cobrir todos os assuntos do curso, e tão conciso que pudesse ser usado por inteiro.

O formato do texto está propositalmente condensado, para que a cópia ou impressão sejam o mais barato possível.

Há várias novidades nesta versão 2009b em relação àquela do primeiro semestre de 2009. Além do evidente aumento de conteúdo, fiz uma revisão detalhada eliminando vários erros da versão anterior, melhorando e adicionando figuras, e recheando o texto com mais exemplos resolvidos e sugestões de exercícios. O conteúdo foi dividido em “capítulos”, em vez de “aulas”. Alguns pontos foram pensados exclusivamente para a turma de engenheiros de controle e automação e demais alunos que farão o curso no segundo semestre de 2009.

Por fim, tenha sempre em mente que este não é um material didático: você não conseguirá aprender Resistência dos Materiais *somente* lendo estas notas. Não perca as aulas, tome suas próprias notas, frequente os plantões de dúvidas e use esse texto para apoiar seu aprendizado.

Bons estudos!

**Josué Labaki**

PED Resistência dos Materiais

[labaki@fem.unicamp.br](mailto:labaki@fem.unicamp.br)

## Lembretes

**Plantões de dúvidas:** 317. Outros horários podem ser combinados por e-mail.

**Entrega da prévia da P1 e formulário:** 7 de outubro. **Não falte!**

**P<sub>1</sub> (EM30):** 19 de out., das 18h30 às 21h00. **Revisão:** \_\_\_\_\_ de out., das 13h às 14h.

**Entrega da prévia da P2 e formulário:** 30 de novembro. **Não falte!**

**P<sub>2</sub> (EM30):** 7 de dez., das 18h30 às 21h00. **Revisão:** \_\_\_\_\_ de dez., das 13h às 14h.

**Exame (EM30):** 21 de dez., das 18h30 às 21h00. **Revisão:** tratar por e-mail.

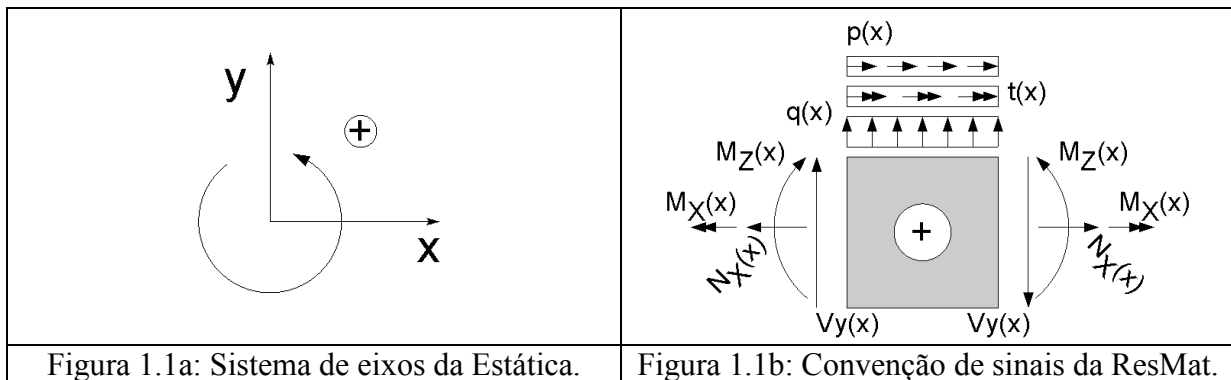
**Critério de Avaliação:**  $M_S = (0,4 \cdot P_1 + 0,6 \cdot P_2)$ ;  $M_F = (0,5 \cdot M_S + 0,5 \cdot \text{Exame})$ .

# CAPÍTULO INTRODUTÓRIO

## REVISÃO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS I

### 1. Eixos e convenções

Em Resistência dos Materiais, temos usado as convenções de sinais da estática e da Resistência dos Materiais como mostrada abaixo:



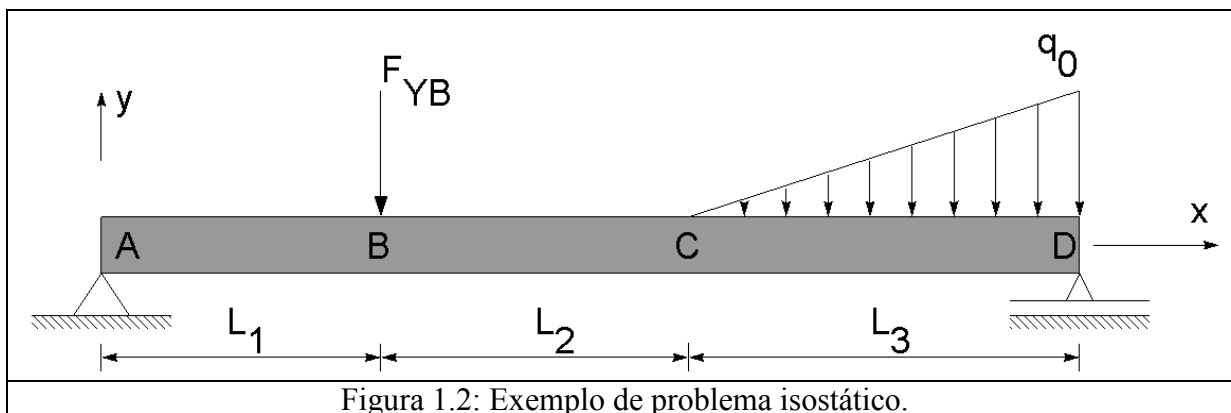
### 2. Método das seções

O método das seções pode ser aplicado para determinar os esforços internos resultantes em sistemas isostáticos. O método consiste em:

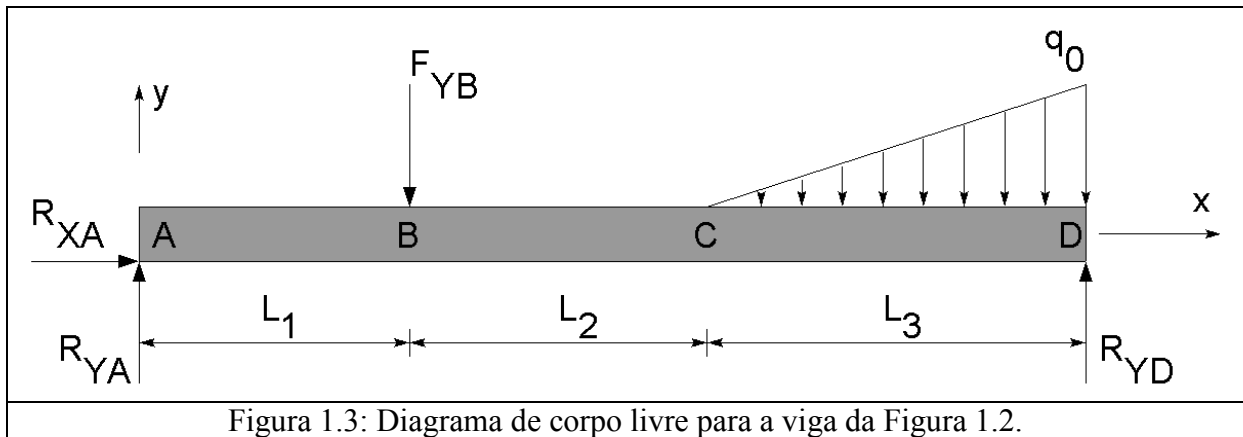
- Analisando as mudanças de carregamento e vinculação, determinar o número de seções em que o problema terá que ser dividido;
- Modelar um diagrama de corpo livre e determinar as reações de apoio;
- Dividindo o problema em seções, determinar os esforços atuantes em cada seção.

### 3. Exemplo

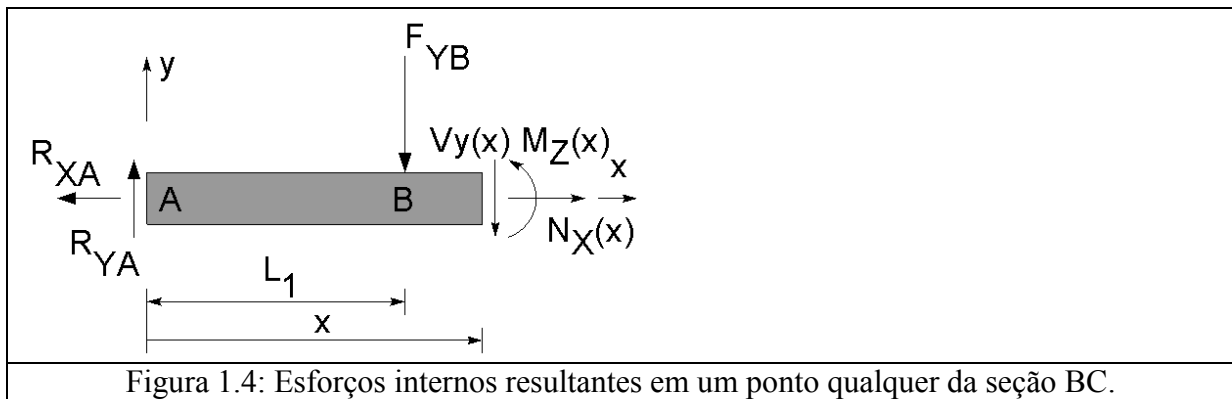
O problema isostático da Figura 1.2 pode ser resolvido pelo método das seções. Serão necessárias três seções: AB ( $0 < x < L_1$ ), BC ( $L_1 < x < 2L_1$ ) e CD ( $2L_1 < x < 2L_1 + L_2$ ).



Faz-se o diagrama de corpo livre (DCL) como mostrado na Figura 1.3. Para este problema, as reações a serem determinadas são  $R_{yA}$ ,  $R_{yD}$  e  $R_{xA}$ . Para determinar estas reações a partir do DCL, usa-se três equações de equilíbrio:  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma M_z(A) = 0$ ,  $\Sigma M_z(D) = 0$  e  $\Sigma F_y = 0$ .



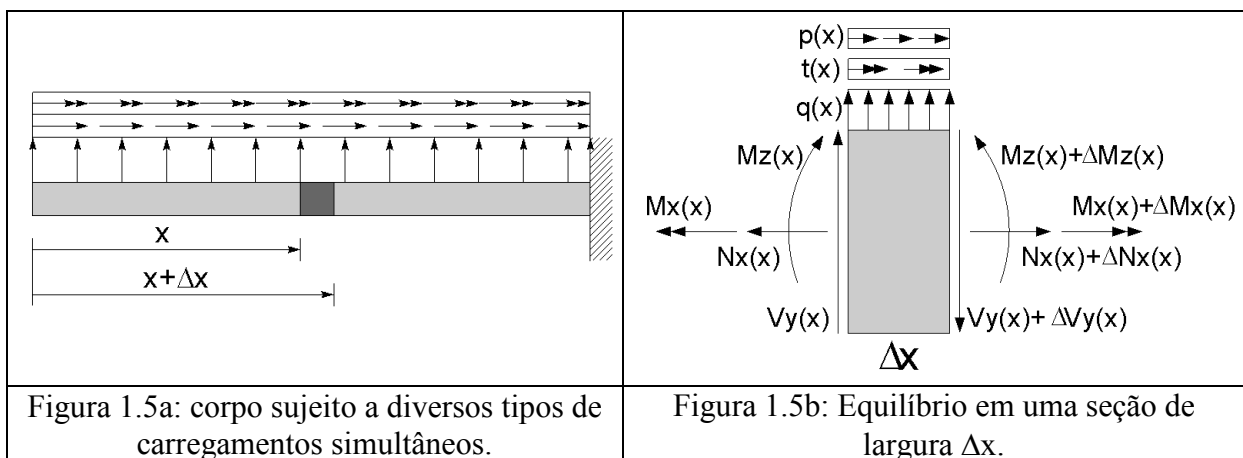
Divide-se então a viga nas seções mostradas, e determina-se os esforços internos resultantes. Por exemplo, na seção BC tem-se os esforços internos mostrados na Figura 1.4.



Finalmente, esses esforços internos são determinados aplicando as equações de equilíbrio neste novo diagrama de corpo livre.

#### 4. Equações diferenciais de equilíbrio

Considere uma seção de um corpo sujeito a vários tipos de carregamento simultâneos (Figura 1.5a). Esta seção é sujeita aos esforços internos mostrados na Figura 1.5b.



Como a pequena seção de largura  $\Delta x$  também deve estar em equilíbrio, tem-se que:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_x(x) + p(x)\Delta x + (N_x(x) + \Delta N_x(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta N_x(x)}{\Delta x} = -p(x) \quad (1)$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -M_x(x) + t(x)\Delta x + (M_x(x) + \Delta M_x(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta M_x(x)}{\Delta x} = -t(x) \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_y(x) + q(x)\Delta x - (V_y(x) + \Delta V_y(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta V_y(x)}{\Delta x} = q(x) \quad (3)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow -V_y(x)\Delta x - M_z(x) + (M_z(x) + \Delta M_z(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta M_z(x)}{\Delta x} = V_y(x) \quad (4)$$

Para se obter as equações diferenciais de equilíbrio, faz-se  $\Delta x$  tender a zero:

$\frac{d}{dx} N_x(x) = -p(x)$	$\frac{d}{dx} M_x(x) = -t(x)$
$\frac{d}{dx} M_z(x) = V_y(x)$	$\frac{d}{dx} V_y(x) = q(x) = \frac{d^2}{dx^2} M_z(x)$

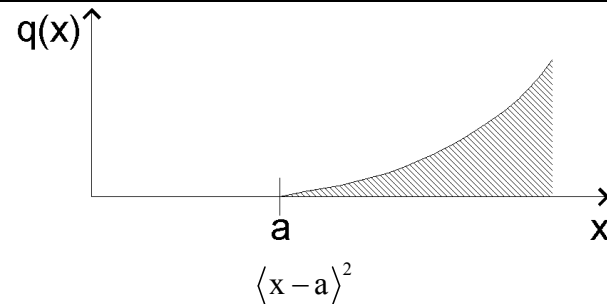
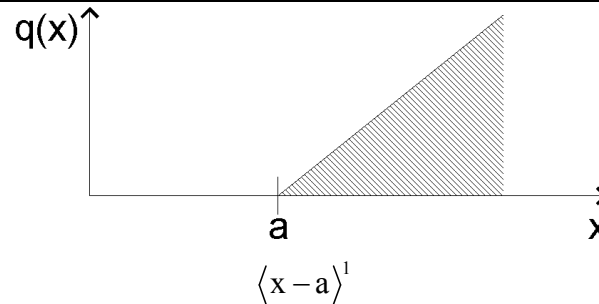
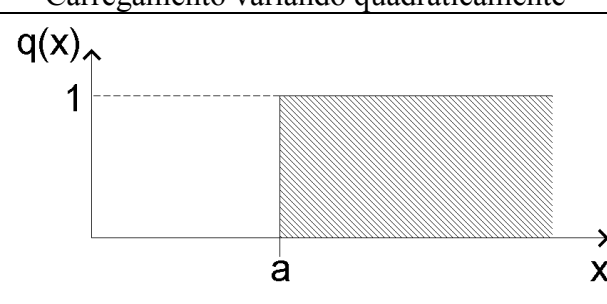
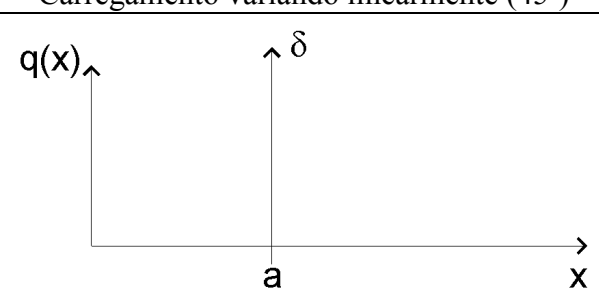
### 5. Modelagem de carregamentos

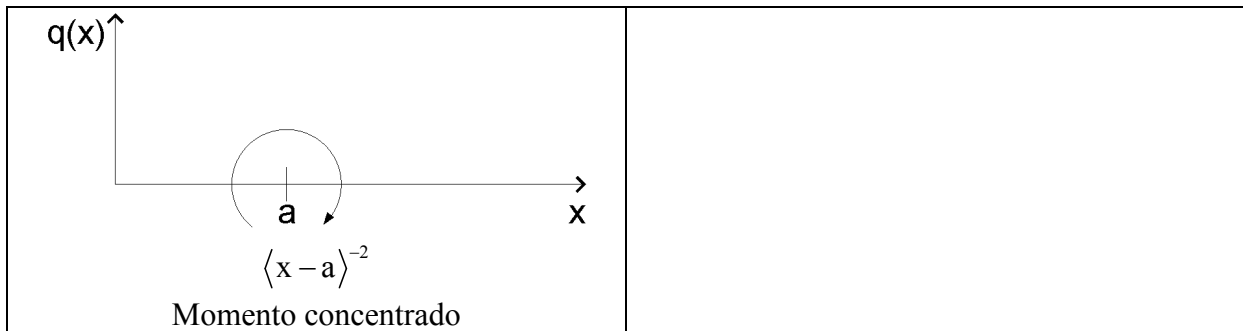
Carregamentos concentrados ou distribuídos podem ser descritos por meio de funções de singularidade. As funções de singularidade seguem algumas regras de integração.

$$\langle x - a \rangle^s = \begin{cases} (x - a)^s, & x > a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad (5)$$

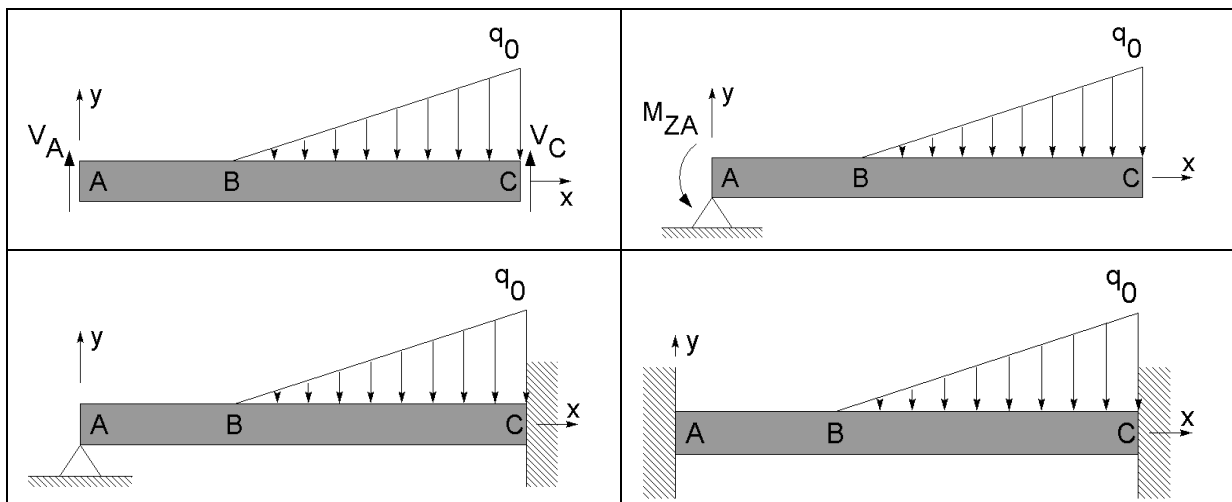
$\int \langle x - a \rangle^s dx = \frac{\langle x - a \rangle^{s+1}}{s+1}$	$\int \langle x - a \rangle^{-1} dx = \langle x - a \rangle^0$	$\int \langle x - a \rangle^{-2} dx = \langle x - a \rangle^{-1}$
---	--	---

Eis as funções de singularidade para cada tipo de carregamento:

 <p><math>\langle x - a \rangle^2</math> Carregamento variando quadraticamente</p>	 <p><math>\langle x - a \rangle^1</math> Carregamento variando linearmente (45°)</p>
 <p><math>\langle x - a \rangle^0</math> Salto unitário (degrau de Heavyside)</p>	 <p><math>\langle x - a \rangle^{-1}</math> Carregamento concentrado (Delta de Dirac)</p>



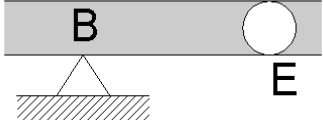
Os quatro componentes mecânicos abaixo são vigas, portanto seu comportamento é regido pela mesma equação diferencial. Além disso, todos têm a mesma equação de carregamento. Contudo, são claramente quatro problemas diferentes! O que os diferencia um do outro?



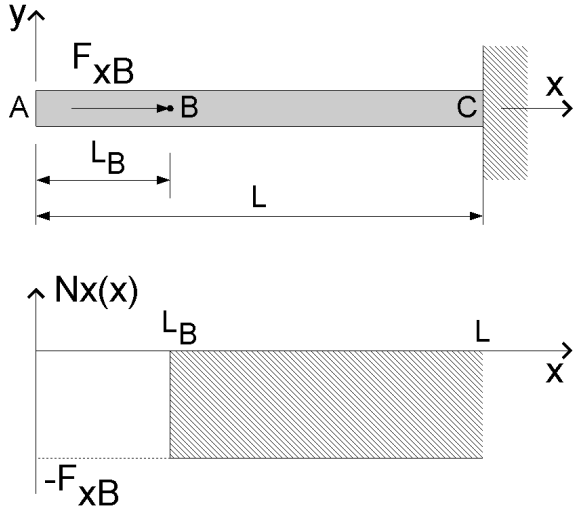
**6. Condições de contorno**

Além das equações diferenciais, são necessárias as condições de contorno para caracterizar completamente um problema. Rótulas e vínculos no domínio do corpo estabelecem ainda equações de restrição.

Vínculo	Condição de contorno/restrrição associada	
	$N_x(A) = 0$ $V_y(A) = ?$ $M_z(A) = 0$	$M_x(A) = 0$ $v(A) = 0$ $\theta_z(A) = ?$
	$N_x(D) = ?$ $V_y(D) = ?$ $M_z(D) = 0$	$M_x(D) = 0$ $v(D) = 0$ $\theta_z(D) = ?$
	$N_x(C) = ?$ $V_y(C) = ?$ $M_z(C) = ?$	$M_x(C) = ?$ $v(C) = 0$ $\theta_z(C) = 0$

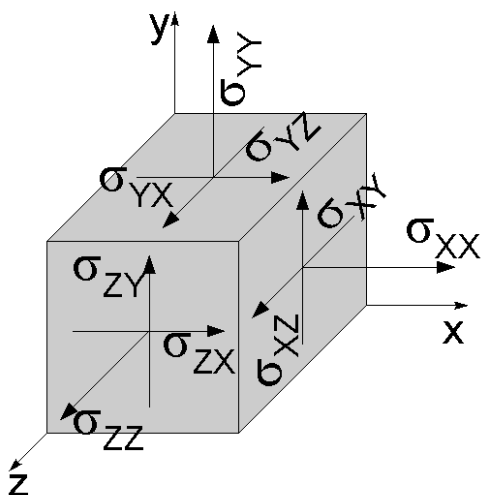
	$M_z(E) = 0$	$v(B) = 0$
---	--------------	------------

**7. Exemplo: carregamento axial**

	<p>Equação do carregamento:  <math>p(x) = +F_{xB} \langle x - L_B \rangle^{-1}</math></p> <p>Condição de contorno:  <math>N_x(x=0) = 0</math></p> <p>Integrando a equação diferencial:  <math>\frac{d}{dx} N_x(x) = -p(x) = -F_{xB} \langle x - L_B \rangle^{-1}</math>  <math>\downarrow \int</math>  <math>N_x(x) = -F_{xB} \langle x - L_B \rangle^0 + C_{p1}</math></p> <p>Da condição de contorno, tem-se:  <math>N_x(x=0) = \underbrace{-F_{xB} \langle x - L_B \rangle^0}_{=0} + C_{p1} = 0</math></p> <p><math>\therefore N_x(x) = -F_{xB} \langle x - L_B \rangle^0 = \begin{cases} 0, &amp; x &lt; L_B \\ -F_{xB}, &amp; x &gt; L_B \end{cases}</math></p> <p>(gráfico à esquerda)</p>
--	--

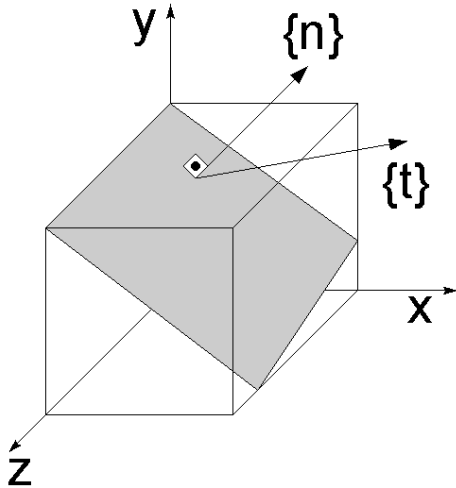
**8. Estado de tensão**

Um ponto qualquer de um sólido pode ser caracterizado por um estado de tensões descrito por um tensor de tensões.

	$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ <p>Tensor de Tensões</p>
---	---

O tensor de tensões é simétrico, isto é,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . As componentes  $\sigma_{ij}$  são chamadas de tensões *normais* se  $i=j$  ( $\sigma_{XX}$ ,  $\sigma_{YY}$  e  $\sigma_{ZZ}$ ). As componentes  $\sigma_{ij}$  são chamadas de tensões *tangenciais* se  $i \neq j$  ( $\sigma_{XY}$ ,  $\sigma_{XZ}$  e  $\sigma_{YZ}$ ).

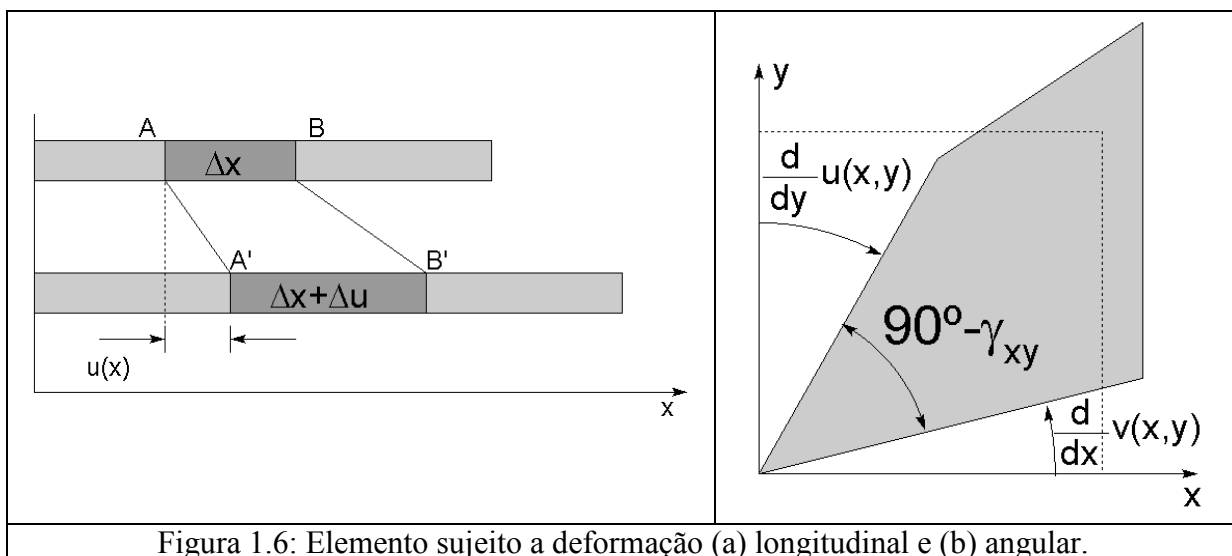
A fórmula de Cauchy permite determinar o vetor força de superfície atuando em um determinado plano. Isso é feito por meio da contração do tensor de tensões pelo vetor normal ao plano de secção.

	<p style="text-align: center;">Fórmula de Cauchy:</p> $\{t\} = [\sigma]\{n\}$ $\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$ <p><math>\{n\}</math>: vetor normal ao plano seccionado.  <math>\{t\}</math>: força de superfície atuante no plano.</p>
---	---

### 9. Estado de deformação

Se um componente mecânico sofre somente alongamento axial (Figura 1.6a), sua deformação pode ser escrita como:  $\epsilon_{XX} = \Delta u / \Delta x$ .

No caso limite, fazendo  $\Delta x$  tender a zero, tem-se que  $\epsilon_{XX} = \frac{d}{dx} u(x)$ . Analogamente,  $\epsilon_{YY} = \frac{d}{dy} v(x)$  e  $\epsilon_{ZZ} = \frac{d}{dz} w(x)$ .



Por outro lado, a deformação angular (distorção) é descrita por:  $\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = \gamma_{yx}$ .



O ângulo  $\gamma_{XY}$  é o ângulo “físico” de deflexão de um elemento infinitesimal. Usando a notação de engenharia, na qual  $\varepsilon_{XY} = \frac{1}{2}\gamma_{XY}$ , o tensor de deformação de um meio contínuo é dado por:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right) & \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \\ \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dy}\right) & \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \\ \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) & \left(\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dz}\right) \end{bmatrix}, \text{ ou } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right), \text{ ou ainda } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

O tensor de deformações mostrado nesta seção vale apenas para pequenas deformações! Assume-se como sendo “pequenas” as deformações  $\varepsilon$  com valores entre 0 e  $10^{-3}$ .

## 10. Equação constitutiva

A Equação constitutiva da mecânica dos sólidos é uma relação entre o estado de deformação e o estado de tensão presentes em um corpo. As propriedades do material é que vão definir que tensões aparecerão no corpo quando ele for deformado. Pode-se escrever que  $[\sigma] = [D][\varepsilon]$ , em que  $[D]$  é uma matriz que contém as propriedades do material.

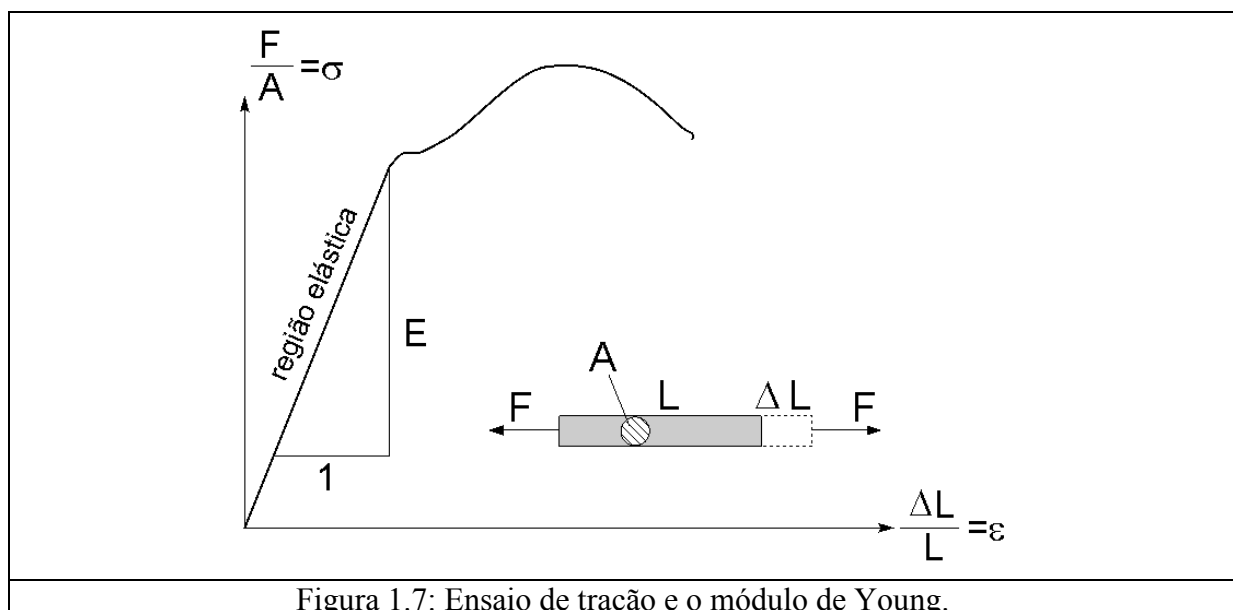
## 11. Ensaio de tração

O ensaio de tração (Figura 1.7) permite determinar uma das propriedades do material que estarão representados na matriz  $[D]$ : o módulo de elasticidade (ou módulo de Young).

O módulo de Young estabelece uma relação entre a tensão normal  $\sigma_{ij}$  e o alongamento  $\varepsilon_{ij}$  tal que  $\sigma_{ij} = E \cdot \varepsilon_{ij}$ , para  $i = x, y, z$  e  $i = j$ . Esta relação só é válida no regime elástico de deformação.

## 12. Ensaio de torção

Analogamente ao ensaio de tração, o ensaio de torção (Figura 1.8) permite estabelecer uma relação linear entre as deformações angulares (distorções) e as tensões tangenciais (cisalhamento) da seguinte forma:  $\tau_{ij} = G \cdot \gamma_{ij}$ , para  $i \neq j$ . A grandeza  $G$  também é uma propriedade do material, chamada de módulo de elasticidade transversal.



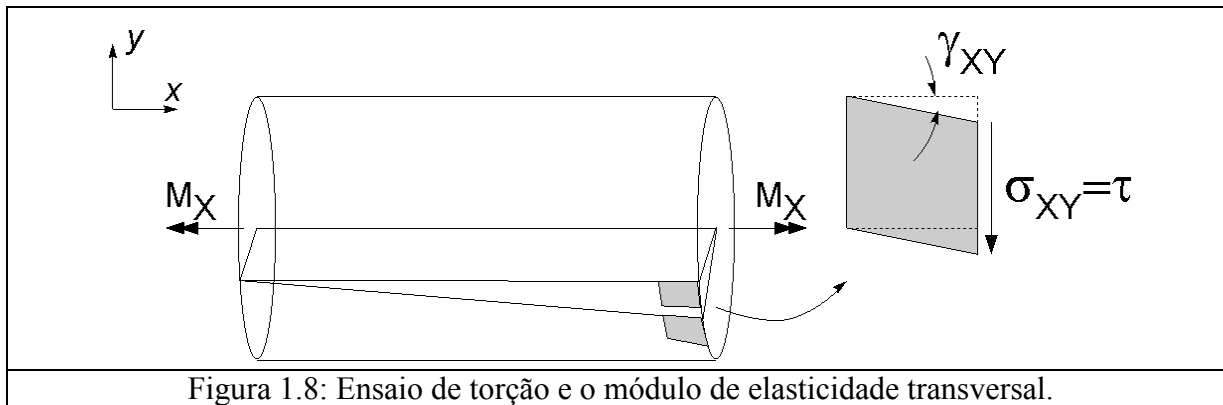


Figura 1.8: Ensaio de torção e o módulo de elasticidade transversal.

### 13. Razão de Poisson

Quando um corpo se alonga em uma direção, encurta nas outras duas direções. A relação entre estas deformações é conhecida como Razão de Poisson, representada pela letra grega  $\nu$ .

Deformação na direção de x:  
 $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$  (positiva: alongou-se)

Deformação na direção de y:  
 $\epsilon_{yy} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$  (negativa: encurtou-se)

Relação entre as deformações:  

$$\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = -\nu$$

A equação tem um sinal negativo porque um alongamento positivo em x implica em um encurtamento em y.

Figura 1.9: Razão de Poisson.

Tendo como base as propriedades  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  que caracterizam completamente um dado material, uma forma de escrever a equação constitutiva da mecânica dos sólidos é:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Dada a natureza dos experimentos nos quais se determinam as grandezas  $E$ ,  $G$  e  $\nu$ , a Equação 6 só vale sob as seguintes hipóteses: o material é homogêneo, isotrópico e elástico.

Existe ainda uma relação empírica entre as grandezas  $E$ ,  $G$  e  $\nu$ , dada por:  $E = 2G(1+\nu)$ . Esta relação já foi verificada para vários tipos de materiais.

## 14. Teoria técnica: Barras (solicitação axial)

Teorias técnicas consistem na aplicação da análise de tensões para os casos particulares de barras, vigas e eixos, que são corpos sujeitos a tipos específicos de carregamento.

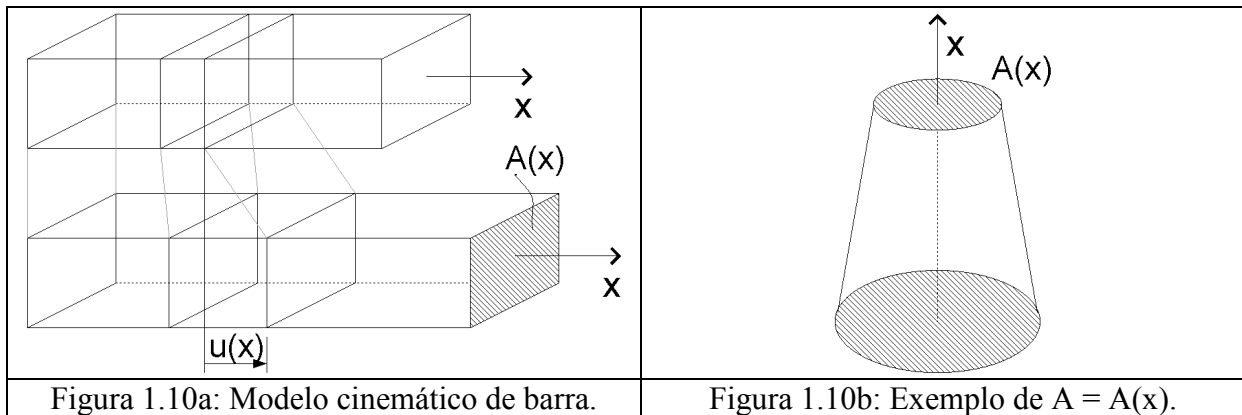


Figura 1.10a: Modelo cinemático de barra.

Figura 1.10b: Exemplo de  $A = A(x)$ .

Barras são elementos estruturais sujeitos somente a carregamento axial. Estabelece-se para as barras um modelo cinemático de que as faces planas e paralelas, transversais ao eixo longitudinal, permanecem planas e paralelas após a aplicação do carregamento (Figura 1.10a). Sob este modelo cinemático, tem-se que o deslocamento na direção  $x$  não é mais função de  $y$  e  $z$ . Assim, o problema passa a ser unidimensional, e uma particularização da equação constitutiva pode ser feita:

$$\text{Da equação constitutiva: } \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E \frac{d}{dx} u(x)$$

$$\text{Do equilíbrio de um trecho da barra: } N_x(x) = \sigma_{xx} A = AE \frac{d}{dx} u(x)$$

$$\text{Mas } \frac{d}{dx} N_x(x) = -p(x), \text{ então } \frac{d}{dx} \left[ A(x)E(x) \frac{d}{dx} u(x) \right] = -p(x).$$

Tanto o módulo de elasticidade quanto a área podem de fato variar ao longo da barra (Figura 1.10b). Contudo, se estes parâmetros não variam ao longo da barra, então se tem que:

$$AE \frac{d^2}{dx^2} u(x) = -p(x) \quad (7)$$

## 15. Teoria técnica: Eixos (solicitação torcional)

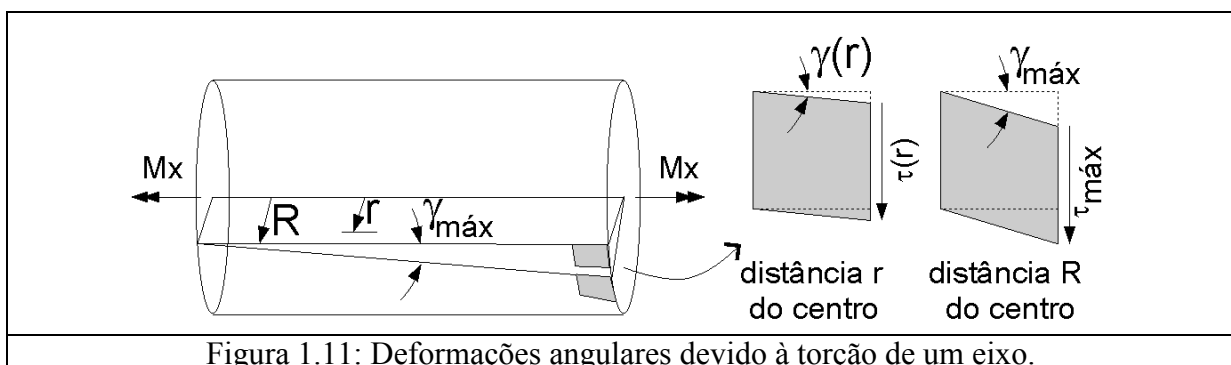


Figura 1.11: Deformações angulares devido à torção de um eixo.

Eixos são elementos estruturais sujeitos somente a carregamento de torção. Como modelo cinemático, assume-se que qualquer seção plana e paralela permaneça plana e paralela após a solitação.

Existe uma relação linear entre a distorção no interior do eixo e em sua superfície, dada por:

$$\frac{\gamma_{\max}}{R} = \frac{\gamma(r)}{r} \Rightarrow \gamma(r) = \frac{r}{R} \gamma_{\max} . \text{ Como } \tau(r) = G \cdot \gamma(r), \text{ tem-se também que: } \tau(r) = \frac{r}{R} \tau_{\max} .$$

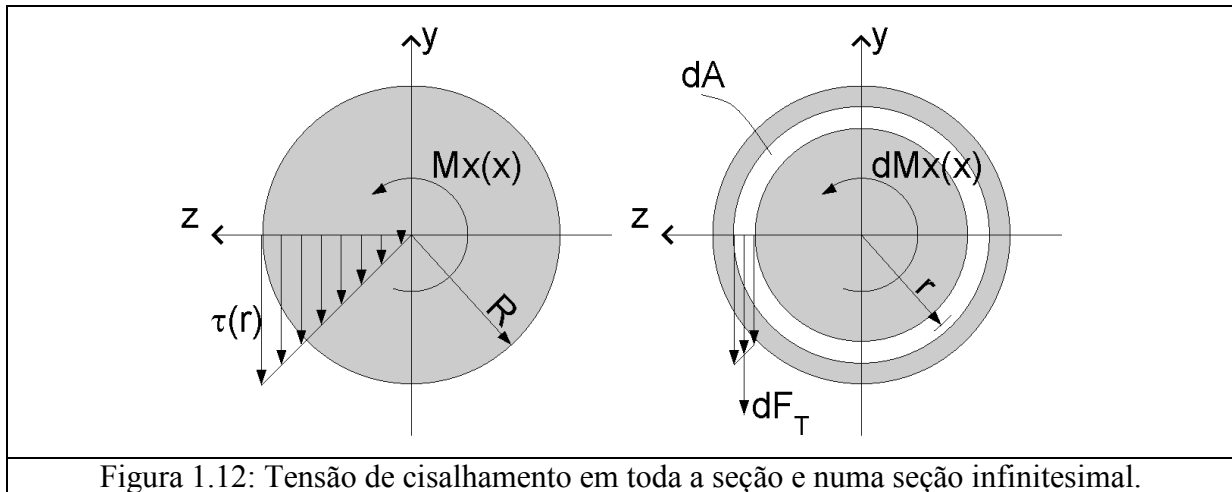


Figura 1.12: Tensão de cisalhamento em toda a seção e numa seção infinitesimal.

Com auxílio da Figura 1.12, pode-se desenvolver a expressão para o momento torsor como:

$$M_x(x) = \int_{A(x)} dM_x(x) = \int_{A(x)} r \cdot dF_T = \int_{A(x)} r \cdot \tau(r) dA = \int_{A(x)} r \cdot \left( \tau_{\max} \frac{r}{R} \right) dA = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_{A(x)} r^2 dA$$

$$M_x(x) = \frac{\tau_{\max}}{R} J_p(x), \text{ sendo } J_p(x) \text{ o momento polar de inércia.}$$

	<p>Exemplo de momento polar de inércia – eixo vazado:</p> $A = 2\pi r \Rightarrow dA = 2\pi dr$ $J_p(x) = \int_{r=R_i}^{r=R_e} r^2 \{2\pi r dr\} = 2\pi \int_{R_i}^{R_e} r^3 dr$ $J_p(x) = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$
--	---

Pode-se estabelecer uma relação geométrica entre os ângulos da lateral e da face do eixo mostrado na Figura 1.12a da seguinte forma:

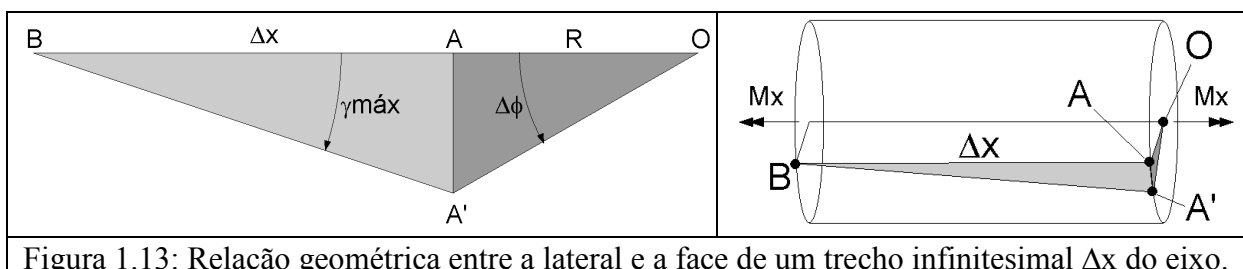


Figura 1.13: Relação geométrica entre a lateral e a face de um trecho infinitesimal Δx do eixo.

Sob a hipótese de pequenas deformações, as distorções são tais que  $\gamma_{\max} \ll 1$  e  $\Delta\phi \ll 1$ .

$$\begin{cases} \tan(\gamma_{\max}) \approx \gamma_{\max} = \frac{\overline{AA'}}{\Delta x} \\ \tan(\Delta\phi) \approx \Delta\phi = \frac{\overline{AA'}}{R} \end{cases} \Rightarrow \gamma_{\max} \Delta x = \Delta\phi R \xrightarrow{\lim_{\Delta x \rightarrow 0}} \frac{d}{dx} \phi(x) = \frac{\gamma_{\max}}{R}$$

Por outro lado, de  $Mx(x) = \frac{\tau_{\max}}{R} J_p(x)$  e  $\tau(r) = \frac{r}{R} \tau_{\max}$ , pode-se escrever que:

$$\frac{\gamma_{\max}}{R} = \frac{Mx(x)}{J_p(x)G} = \frac{d}{dx} \phi(x)$$

$$\therefore Mx(x) = J_p(x)G \frac{d}{dx} \phi(x)$$

Como  $\frac{d}{dx} Mx(x) = -t(x)$ , então:

$$\frac{d}{dx} \left[ J_p(x)G(x) \frac{d}{dx} \phi(x) \right] = -t(x)$$

Se o momento polar de inércia e módulo de elasticidade transversal são constantes ao longo do eixo longitudinal, tem-se finalmente:

$$J_p G \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = -t(x) \tag{8}$$

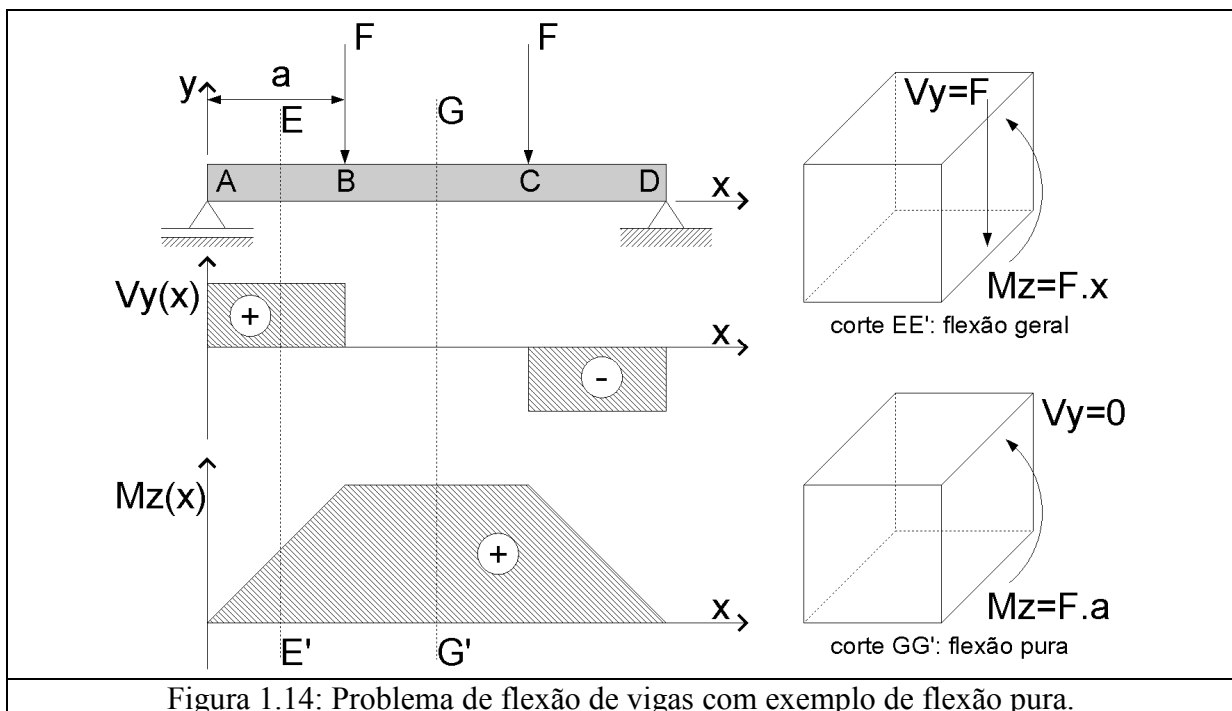
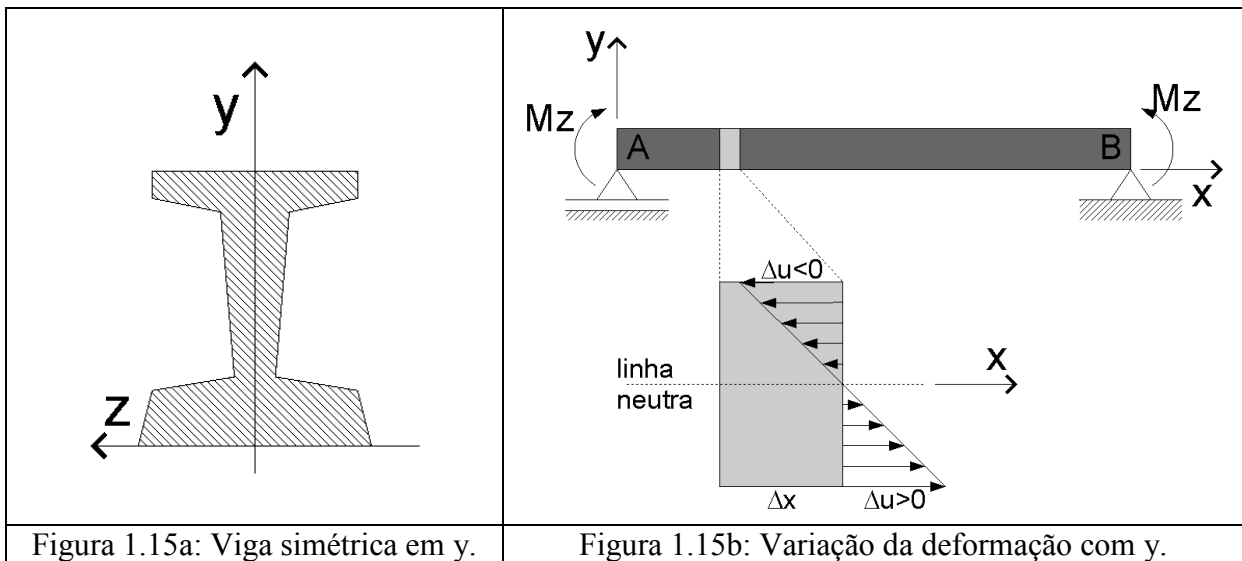


Figura 1.14: Problema de flexão de vigas com exemplo de flexão pura.

Observe como a equação que descreve o comportamento de eixos é análoga à equação para as barras (Equação 7). Ambas as equações envolvem um termo puramente geométrico (área e momento polar de inércia) e um termo de propriedade do material (módulos de elasticidade). Aparece ainda a segunda derivada de uma medida de deslocamento (linear ou angular), e as equações são diretamente proporcionais ao carregamento aplicado.

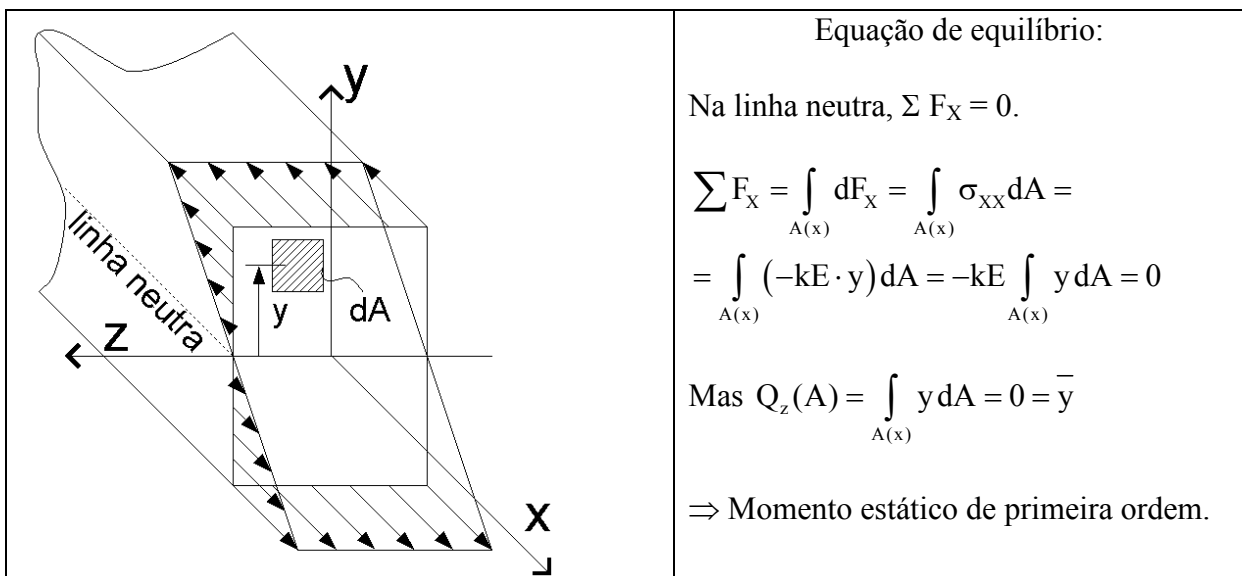
**16. Teoria técnica: Vigas (flexão pura)**

Denomina-se flexão pura a situação em que uma viga solicitada transversalmente não está sujeita a esforço cortante. Veja um exemplo de flexão pura e flexão geral na Figura 1.14. A dedução da equação de vigas considera a hipótese de pequenas deformações e simetria em relação ao eixo y (Figura 1.15a).



Considere uma viga sujeita a flexão pura (Figura 1.15b). Como se vê pela figura, a deformação de um trecho  $\Delta x$  da viga varia com  $y$ : em um ponto a deformação é positiva, e no outro é negativa. Isto é,  $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = -k \cdot y$ , sendo  $k$  uma constante de proporcionalidade.

Da equação constitutiva, tem-se que  $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} \Rightarrow \sigma_{xx}(y) = -kE \cdot y$ .



Como o momento estático deve ser nulo para satisfazer esta equação de equilíbrio, a única forma é fazendo  $y = 0$ . Ou seja, o sistema de coordenadas está no CG. Isso só vale para materiais homogêneos.

Além disso,  $Mz(x) = \sum Mz \Rightarrow$  Momento resultante na seção.

$$Mz(x) = -\int_{A(x)} dMz = -\int_{A(x)} y dF_x = -\int_{A(x)} y (\sigma_{xx} dA) = -\int_{A(x)} y (-kE \cdot y) dA$$

$$Mz(x) = kE \underbrace{\int_{A(x)} y^2 dA}_{I_{zz}(x)} \Rightarrow \therefore k = \frac{Mz(x)}{EI_{zz}(x)}$$

O sinal negativo na expressão da integral de  $dM_z$  aparece porque, quando se aplica um momento positivo à estrutura, a tensão normal fica negativa quando  $y$  é positivo. O sinal é incluído para corrigir isso.

Portanto,

$$\sigma_{xx}(x, y) = -kE \cdot y = -\frac{Mz(x)}{I_{zz}(x)} y \quad (1)$$

Este é um importante resultado. Pela Equação 1, vemos que a tensão normal atuante em uma viga independe das propriedades do material: é função apenas de características geométricas ( $y$  e  $I_{zz}$ ) e do carregamento ( $M_z$ ).

## 17. Equação da linha elástica

Determina-se a equação da linha elástica, que caracteriza a flecha  $v(x)$  e a rotação  $\theta_z(x)$  conforme mostradas na Figura 1.16.

Com o auxílio da Figura 1.17a, pode-se reescrever a expressão da deformação linear como:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{-y}{\rho} \quad (\text{semelhança de triângulos}).$$

Por outro lado, a curvatura  $\rho$  de uma curva como a da Figura 1.17b é dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2}{dx^2} v(x) \left\{ 1 + \left[ \frac{d}{dx} v(x) \right]^2 \right\}^{-\frac{3}{2}}$$

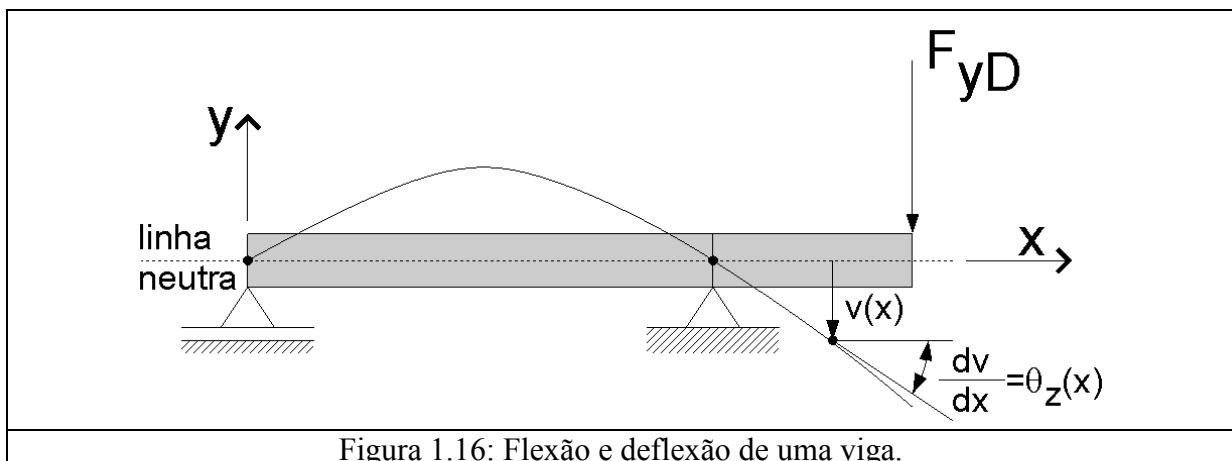


Figura 1.16: Flexão e deflexão de uma viga.

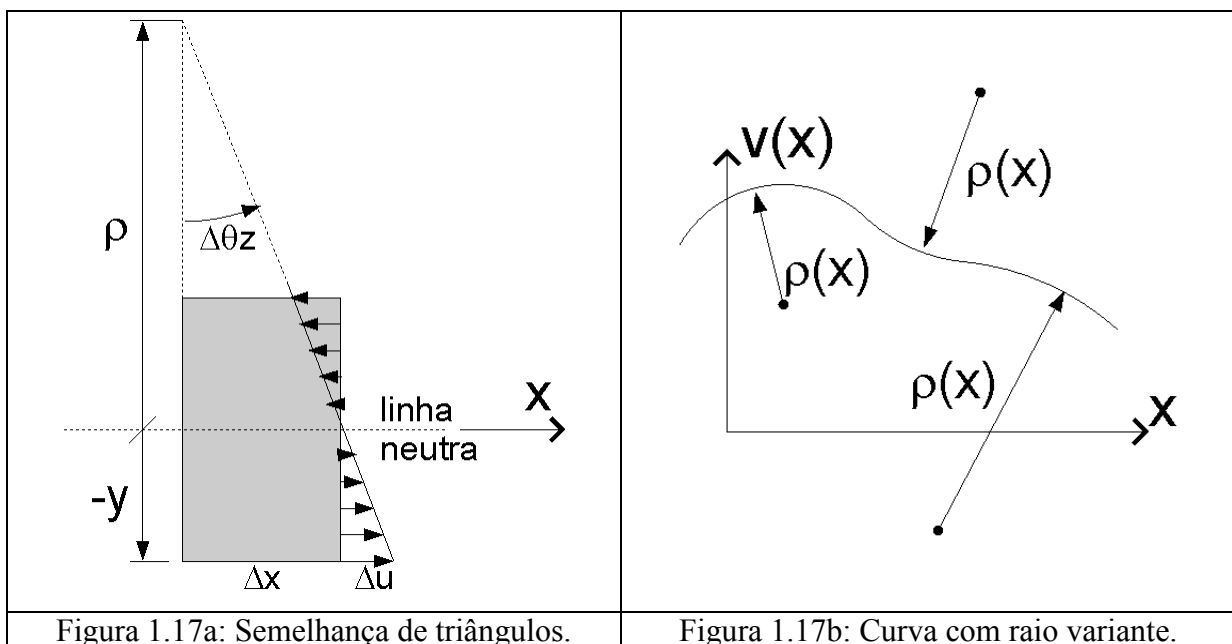
Sob a hipótese de pequenas deformações, a deflexão de uma viga é tão pequena que é razoável admitir que:

$$\frac{d}{dx} v(x) \ll 1 \Rightarrow \left( \frac{d}{dx} v(x) \right)^2 \approx 0. \text{ Assim, } \frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2}{dx^2} v(x).$$

$$\epsilon_{xx}(x, y) = - \left( \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) y = - \frac{Mz(x)}{EI_{zz}} y \Rightarrow Mz(x) = EI_{zz}(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x)$$

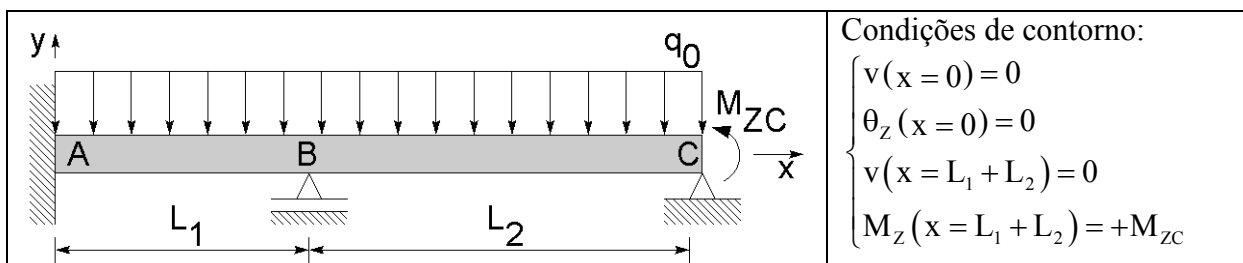
Mas  $\frac{d^2}{dx^2} Mz(x) = q(x)$ , então  $\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI_{zz}(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right] = q(x)$ . Se  $EI_{zz}$  for constante, tem-se:

$$EI_{zz} \frac{d^4}{dx^4} v(x) = q(x) \tag{2}$$



### 18. Exemplo

No exemplo seguinte, vê-se um problema hiperestático que pode ser resolvido pelas equações diferenciais de equilíbrio.



Equação de restrição:  $v(x=L_1) = 0$

Equação do carregamento:  $q(x) = q_0 + Ry_B < x - L_1 >^{-1}$



Neste problema, além das constantes de integração, surge como incógnita a reação no apoio B,  $R_{yB}$ , que deverá ser incluída na expressão do carregamento. Em contrapartida, surge mais um valor conhecido que é a flecha nula no ponto B.

## 19. Rótulas

Rótulas são características construtivas que têm a propriedade de não permitir passagem de momento fletor em uma viga. Assim como forças concentradas implicam em descontinuidade do esforço cortante e momentos concentrados implicam em descontinuidade do momento fletor atuante, a presença de uma rótula introduz uma descontinuidade na deflexão  $\theta_z$  da viga (Figura 1.18).

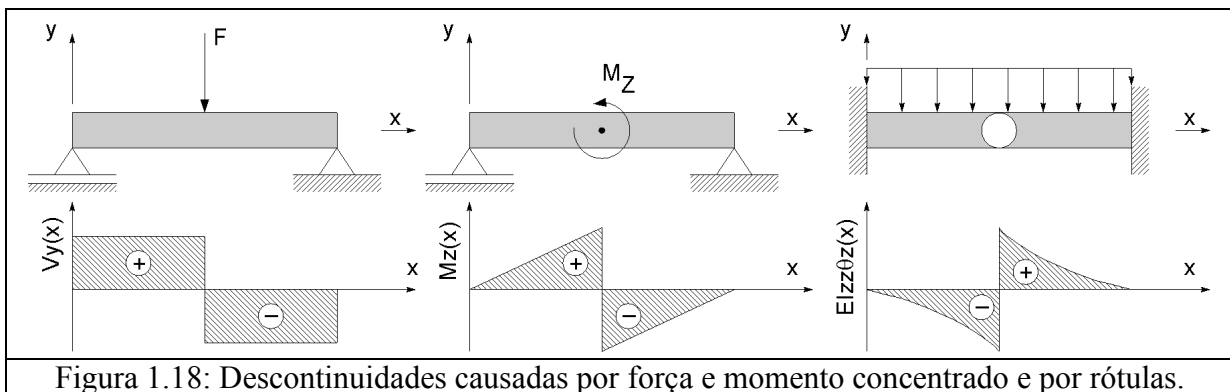


Figura 1.18: Descontinuidades causadas por força e momento concentrado e por rótulas.

A presença de uma rótula em um ponto  $x = a$  deve ser representada na equação do carregamento da seguinte forma:  $q(x) = EI_{zz}\Delta\theta_z < x - a >^{-3}$ .

## 20. Exercícios

Determine as expressões de esforços internos (momento fletor e esforço cortante), deflexões (flecha e rotação) e reações de apoio para as vigas hiperestáticas mostradas abaixo.

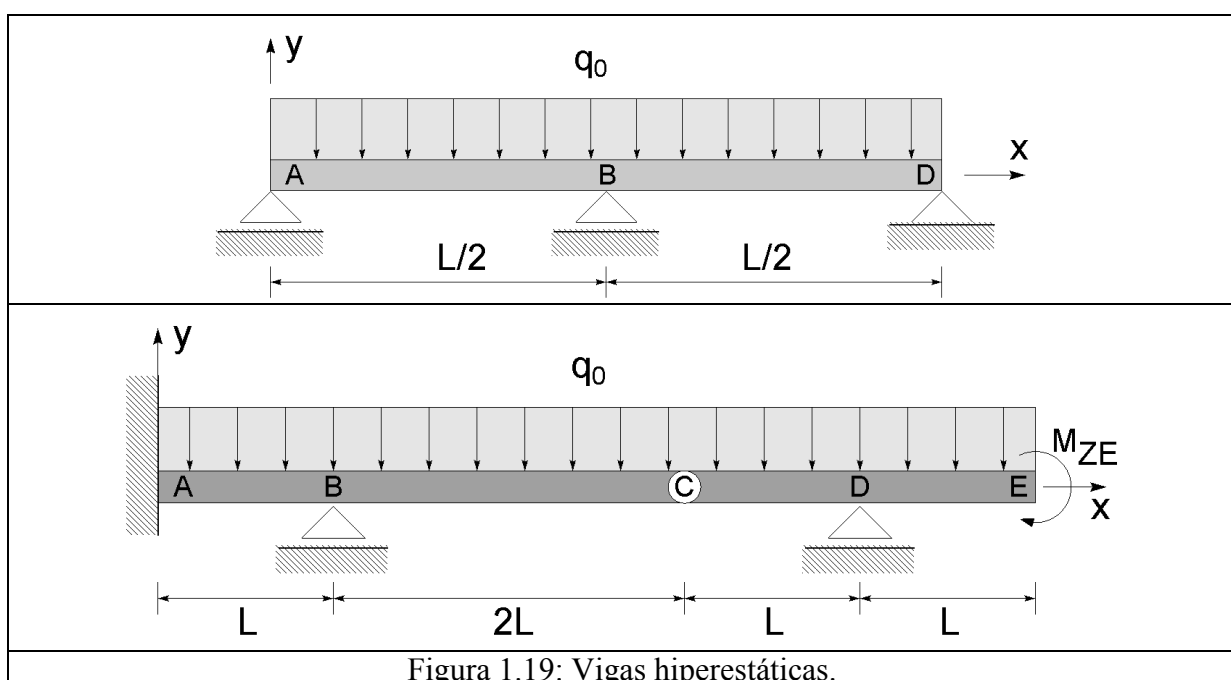


Figura 1.19: Vigas hiperestáticas.

# CAPÍTULO VIII

## PARTE B – VIGAS DE MÚLTIPLOS MATERIAIS

### 1. Introdução

Na engenharia é comum haver vigas constituídas de materiais diferentes. Pode-se construir vigas compostas para tomar vantagem das propriedades dos diversos materiais em situações diferentes.

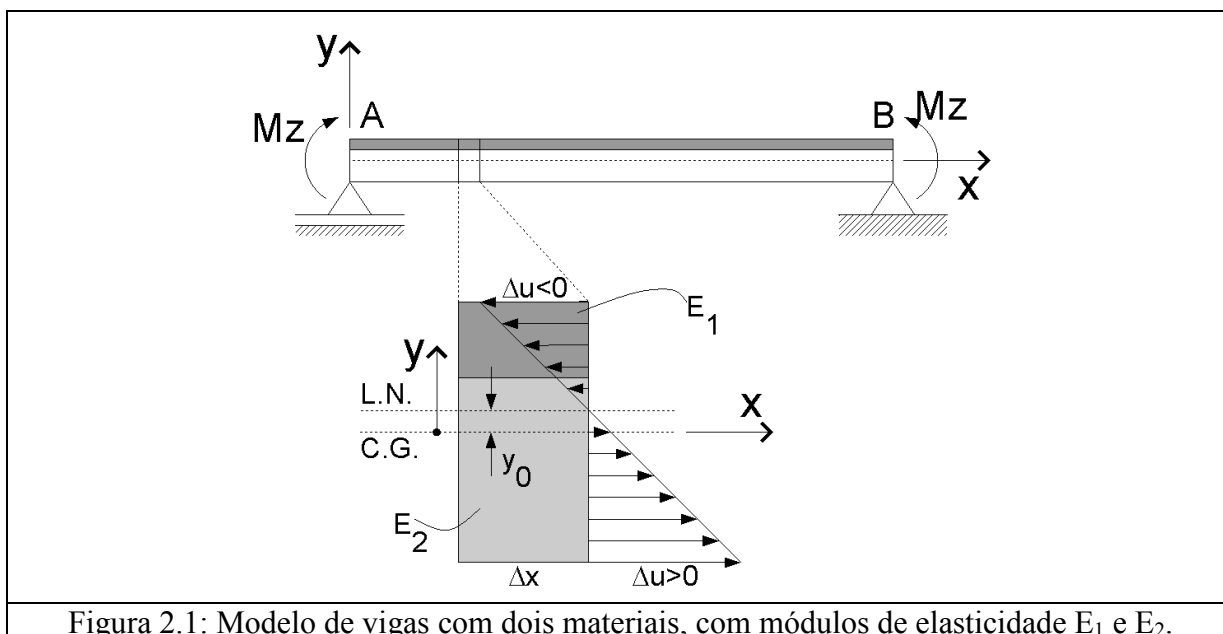
Por exemplo, sabe-se que o concreto suporta bem tensões de compressão, mas resiste mal a tensões de tração. Assim, uma boa idéia ao construir uma viga de concreto é dispor cabos de aço na região que estará sujeita a tração, para que o aço resista a essa tração pelo concreto.

Em alguns projetos de viga, observa-se que as tensões nos extremos da seção transversal são bem maiores que no centro. Nesse caso, essas extremidades poderiam ser reforçadas com materiais que suportassem melhor essas tensões, enquanto o centro da seção transversal poderia ser feito com um material mais barato ou mais leve.

O equacionamento que foi desenvolvido para estudar vigas homogêneas não pode ser aplicado no estudo de vigas compostas. Agora, veremos que a linha neutra, onde as tensões normais são nulas, não necessariamente coincide com o centro geométrico (CG) da seção transversal (Figura 2.1).

### 2. Equacionamento

No estudo de vigas de múltiplos materiais, continuaremos admitindo a hipótese de que as seções transversais planas permanecem planas após a aplicação de um esforço fletor.



Para que a seção deformada permaneça plana, é necessário que a deformação ao longo da seção transversal tenha um comportamento linear, como mostrado na Figura 2.1.

Considerando o carregamento aplicado na viga da Figura 2.1, sabe-se que a parte superior da viga será encurtada (deformação negativa), enquanto a parte inferior será alongada

(deformação positiva). A deformação então deverá ser nula em algum ponto; chamamos este ponto de *linha neutra*.

Dispondo o eixo  $y$  sobre o CG da viga e dizendo que a linha neutra está a uma posição  $y_0$ , a expressão da deformação pode ser escrita como:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = -k \cdot (y - y_0) \quad (1)$$

Como o material é contínuo, na interface entre os materiais as deformações também têm que ser iguais. Observe que a interface entre os materiais não está necessariamente sobre a linha neutra!

Para satisfazer essa continuidade, ao mesmo tempo em que  $E_1 \neq E_2$ , as tensões atuantes na interface terão que ser diferentes. Por exemplo, se  $E_1 > E_2$ , então  $\sigma_{xx1} > \sigma_{xx2}$ .

Da equação constitutiva, tem-se que:

$$\sigma_{xx1}(y) = \epsilon_{xx}(y)E_1 = -kE_1(y - y_0) \quad (2)$$

$$\sigma_{xx2}(y) = \epsilon_{xx}(y)E_2 = -kE_2(y - y_0) \quad (3)$$

Para que a seção transversal esteja em equilíbrio, é necessário que:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \int_{A(x)} dF_x = \int_{A(x)} \sigma_{xx}(y) dA = \underbrace{\int_{A_1(x)} \sigma_{xx1}(y) dA}_{\text{material1}} + \underbrace{\int_{A_2(x)} \sigma_{xx2}(y) dA}_{\text{material2}} = \\ &= \underbrace{-kE_1 \int_{A_1(x)} (y - y_0) dA}_{\text{material1}} - \underbrace{kE_2 \int_{A_2(x)} (y - y_0) dA}_{\text{material2}} = \\ &= -k \left[ \underbrace{E_1 \int_{A_1(x)} y dA - E_1 y_0 \int_{A_1(x)} dA}_{\text{material1}} \right] - k \left[ \underbrace{E_2 \int_{A_2(x)} y dA - E_2 y_0 \int_{A_2(x)} dA}_{\text{material2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$(E_1 Q_{z1} - E_1 y_0 A_1) + (E_2 Q_{z2} - E_2 y_0 A_2) = 0 \quad (4)$$

Isolando-se  $y_0$  na Equação 4, obtém-se a posição da linha neutra para vigas de dois materiais:

$$y_0 = \frac{E_1 Q_{z1} + E_2 Q_{z2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad (5)$$

Para uma viga composta por  $N$  múltiplos materiais, tem-se:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N E_i Q_{zi}}{\sum_{i=1}^N E_i A_i} \quad (6)$$

Embora tenhamos determinado a posição da linha neutra, ainda resta uma incógnita nas expressões de tensão e deformação (Equações 1 a 3), que é a inclinação  $k$ .

Assim como deve haver equilíbrio entre as forças normais atuantes na seção (Eq. 4), também deve haver equilíbrio entre os momentos fletores. Assim,

$$Mz(x) = \sum Mz \quad (7)$$

$$-Mz(x) = \int_{A(x)} dMz = \int_{A(x)} y dF_x = \int_{A(x)} y (\sigma_{xx} dA) = \int_{A_1(x)} y \cdot \sigma_{xx1} dA + \int_{A_2(x)} y \cdot \sigma_{xx2} dA$$

$$\begin{aligned} -Mz(x) &= -kE_1 \int_{A_1(x)} y(y-y_0) dA - kE_2 \int_{A_2(x)} y(y-y_0) dA = \\ &= -k \left[ E_1 \int_{A_1(x)} y^2 dA - E_1 y_0 \int_{A_1(x)} y dA \right] + -k \left[ E_2 \int_{A_2(x)} y^2 dA - E_2 y_0 \int_{A_2(x)} y dA \right] \\ &= -k \left[ \underbrace{E_1 \int_{A_1(x)} y^2 dA}_{I_{ZZ1}} - E_1 y_0 \underbrace{\int_{A_1(x)} y dA}_{Q_{Z1}} \right] + -k \left[ \underbrace{E_2 \int_{A_2(x)} y^2 dA}_{I_{ZZ2}} - E_2 y_0 \underbrace{\int_{A_2(x)} y dA}_{Q_{Z2}} \right] \end{aligned}$$

$$-Mz(x) = -k \{ E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2} - y_0 (E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2}) \} = 0$$

$$k = \frac{Mz(x)}{E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2} - y_0 (E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2})} \quad (8)$$

Para uma viga composta por N múltiplos materiais, tem-se:

$$k = \frac{Mz(x)}{\sum_{i=1}^N E_i I_{ZZi} - y_0 E_i Q_{Zi}} \quad (9)$$

Se a viga é homogênea,  $E_1 = E_2$  e  $y_0 = 0$ , e a Equação 9 resulta na expressão de  $k$  para vigas homogêneas:

$$k = \frac{Mz(x)}{EI_{ZZ}} \quad (10)$$

Substituindo (10) em (2) e (3), tem-se

$$\sigma_{xx1} = -E_1 \frac{Mz(x)}{E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2} - y_0 (E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2})} (y - y_0) \quad (11)$$

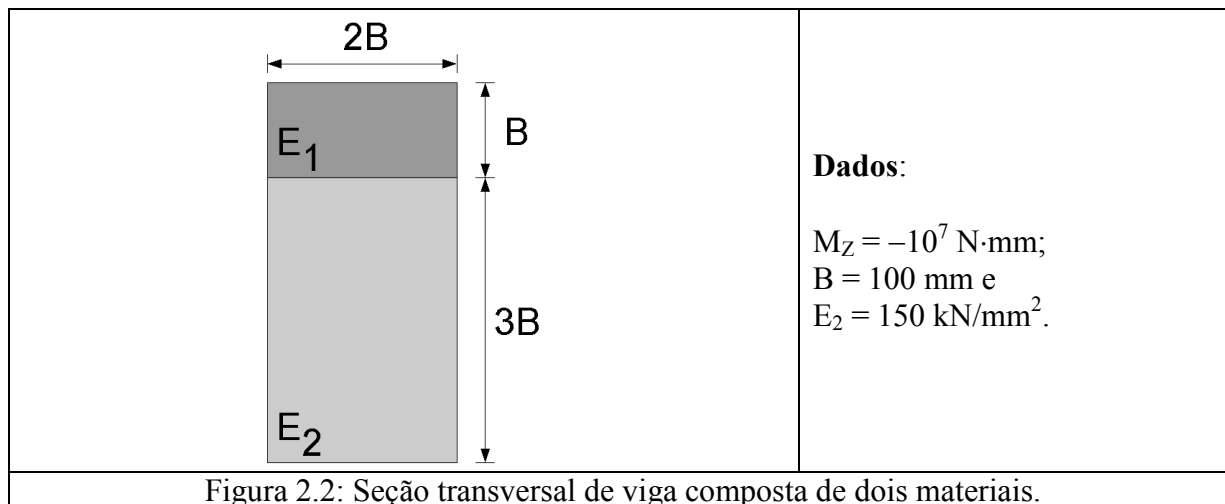
$$\sigma_{xx2} = -E_2 \frac{Mz(x)}{E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2} - y_0 (E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2})} (y - y_0) \quad (12)$$

Para uma viga composta por N múltiplos materiais, a tensão no material  $i$  é dada por:

$$\sigma_{xxi} = -E_i \frac{Mz(x)}{\sum_{i=1}^N E_i I_{ZZi} - y_0 \sum_{i=1}^N E_i Q_{Zi}} (y - y_0) \quad (13)$$

### 3. Exemplo 1 (Da P1 de 06/05/2009; 3,0 pontos)

Uma seção transversal composta por dois materiais com propriedades  $E_1 = 2E_2$  (Figura 2.2), está submetida a um momento fletor  $M_Z$ . Esboce a distribuição de tensões ao longo da seção transversal, e determine o valor da maior tensão atuante na seção.



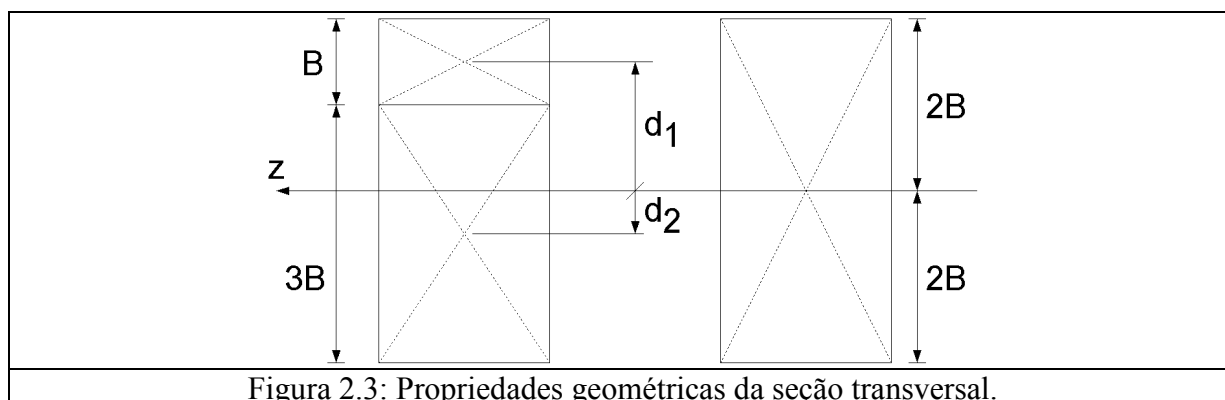
#### 3.1 Determinação das propriedades geométricas

Áreas das seções transversais:

$$A_1 = 2B \cdot B = 20 \cdot 10^3 \text{ mm}^2, \quad A_2 = 2B \cdot 3B = 60 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Distâncias dos centros geométricos das áreas dos distintos materiais até o CG da figura total:

$$d_1 = \frac{3}{2}B = 150 \text{ mm}, \quad d_2 = -\frac{1}{2}B = -50 \text{ mm}$$



Momentos estáticos das áreas dos distintos materiais em relação ao CG da figura total:

$$Q_{Z1} = A_1 d_1 = 2B^2 \frac{3}{2}B = 3B^3 = 3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3, \quad Q_{Z2} = A_2 d_2 = 6B^2 \left(-\frac{1}{2}B\right) = -3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Momentos de inércia das áreas dos distintos materiais em relação ao CG da figura total (usando o Teorema de Steiner, ou Teorema dos Eixos Paralelos):

$$I_{ZZ \text{ Steiner}} = \frac{1}{12} \text{base} \cdot \text{altura}^3 + \text{área} \cdot \text{distância}^2$$

$$I_{ZZ1} = \frac{1}{12} 2B \cdot B^3 + 2B^2 \cdot \left(\frac{3}{2}B\right)^2 = 4,667 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{ZZ2} = \frac{1}{12} 2B \cdot (3B)^3 + 6B^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 = 6 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

### 3.2 Determinação da posição da linha neutra, $y_0$

$$y_0 = \frac{\sum E_i Q_{Zi}}{\sum E_i A_i} = \frac{E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{2E_2 (3B^3) + E_2 (-3B^3)}{2E_2 (2B^2) + E_2 (6B^2)} = \frac{3}{10} B = 30 \text{ mm} \quad (14)$$

### 3.3 Determinação das tensões normais de flexão

$$\sigma_{xx_i} = -\frac{M_z E_i (y - y_0)}{(E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2}) - y_0 (E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2})}$$

$$(E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2}) - y_0 (E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2}) = 2,165 \cdot 10^{14} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad (15)$$

Material 1:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx1}(y) &= -\frac{M_z E_1 (y - y_0)}{(E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2}) - y_0 (E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2})} = \\ &= -\frac{(-10^7 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 2 \cdot 150 \cdot 10^3 \text{ N} / \text{mm}^2)(y - 30 \text{ mm})}{2,165 \cdot 10^{14} \text{ N} \cdot \text{mm}^2} = -13,9 \cdot 10^{-3} (y - 30) \text{ N} / \text{mm}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Material 2:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx2}(y) &= -\frac{M_z E_2 (y - y_0)}{(E_1 I_{ZZ1} + E_2 I_{ZZ2}) - y_0 (E_1 Q_{Z1} + E_2 Q_{Z2})} = \\ &= -\frac{(-10^7 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 150 \cdot 10^3 \text{ N} / \text{mm}^2)(y - 30 \text{ mm})}{2,165 \cdot 10^{14} \text{ N} \cdot \text{mm}^2} = -6,9 \cdot 10^{-3} (y - 30) \text{ N} / \text{mm}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

### 3.4 Esboço das tensões na seção transversal

Tensão normal no topo da seção transversal:

$$\sigma_{xx1}(y = 2B) = -13,9 \cdot 10^{-3} (200 - 30) = -2,3557 \text{ N} / \text{mm}^2$$

Tensão normal do material 1 na interface entre os materiais:

$$\sigma_{xx1}(y = B) = -13,9 \cdot 10^{-3} (100 - 30) = -0,97 \text{ N} / \text{mm}^2$$

4. Exemplo 2

Considere a viga composta de uma matriz de resina com cabos de aço em seu interior, conforme a Figura 2.3. O ensaio de tração da resina é visto na figura, assim como a disposição dos fios de aço na seção transversal da viga.

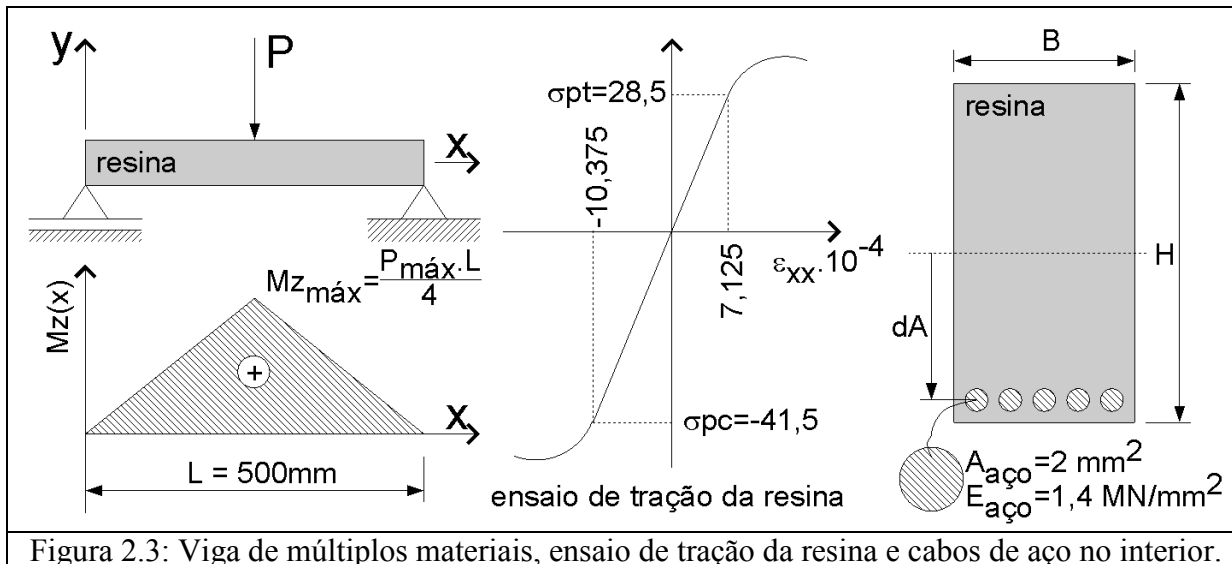


Figura 2.3: Viga de múltiplos materiais, ensaio de tração da resina e cabos de aço no interior.

O objetivo do projeto é fazer com que haja um aproveitamento máximo das propriedades mecânicas da resina. Deseja-se que, quando ocorrer o carregamento máximo, a resina esteja simultaneamente sujeita à sua máxima tensão de compressão na parte superior ( $41,5\text{ N/mm}^2$ ), e à sua máxima tensão de tração na parte inferior ( $28,5\text{ N/mm}^2$ ).

Pode-se ajustar a posição da linha neutra para que essas duas tensões ocorram na resina, como mostrado na Figura 2.4. Por meio da introdução de fios de aço, pode-se levantar ou abaixar a posição da linha neutra.

Dados  $H = 70\text{mm}$ ,  $B = 30\text{mm}$  e  $dA = 32\text{mm}$ , qual é o número de fios de aço a serem adicionados para que esse requisito de projeto seja satisfeito? Nesta situação, qual é a carga  $P_{\text{máx}}$  que a viga pode suportar, e quais são as tensões máximas atuantes no aço?

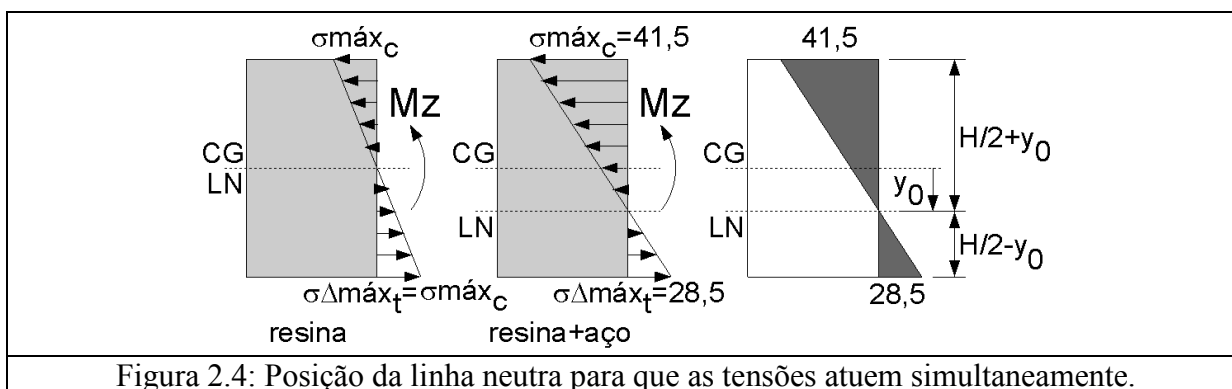


Figura 2.4: Posição da linha neutra para que as tensões atuem simultaneamente.

Se o requisito de projeto for atendido como mostrado na Figura 2.4, a posição da linha neutra pode ser determinada por semelhança de triângulos:

$$\frac{41,5}{\frac{H}{2} + y_0} = \frac{28,5}{\frac{H}{2} - y_0} \Rightarrow y_0 = -6,5\text{mm} \tag{18}$$

#### 4.1 Número de fios de aço

Da Equação 5, sabe-se que a linha neutra é dada por:

$$y_0 = \frac{E_{\text{resina}} QZ_{\text{resina}} + E_{\text{aço}} QZ_{\text{aço}}}{E_{\text{resina}} A_{\text{resina}} + E_{\text{aço}} A_{\text{aço}}} \quad (19)$$

em que:

$$A_{\text{resina}} = BH - A_{\text{açototal}} = BH - N_{\text{fios}} A_{\text{aço}} \quad (20)$$

O momento estático de área da resina,  $QZ_{\text{resina}}$ , é difícil de ser calculado pela sua expressão geral,

$$QZ_{\text{resina}} = \int_{A_{\text{resina}}} y dA_{\text{resina}} \quad (21)$$

Porém, lembre-se que este parâmetro é uma propriedade puramente geométrica, e o resultado dessa integração sobre toda a seção transversal é nulo quando dispomos o eixo  $y$  sobre o CG da seção. Foi dessa forma que determinamos a posição da linha neutra de vigas homogêneas.

Portanto, para que  $QZ$  da seção seja nulo, é necessário que  $QZ_{\text{resina}}$  seja o oposto do  $QZ$  do aço:

$$QZ_{\text{resina}} = -QZ_{\text{aço}} = -N_{\text{fios}} A_{\text{aço}} dA \quad (22)$$

Substituindo (22) e (18) em (19), obtém-se:

$$y_0 = \frac{E_{\text{resina}} (-N_{\text{fios}} A_{\text{aço}} dA) + E_{\text{aço}} (N_{\text{fios}} A_{\text{aço}} dA)}{E_{\text{resina}} (BH - N_{\text{fios}} A_{\text{aço}}) + E_{\text{aço}} (N_{\text{fios}} A_{\text{aço}})} = -6,5 \text{ mm} \quad (23)$$

Rearranja-se a Equação 23 isolando-se o número de fios de aço:

$$N_{\text{fios}} = -y_0 \frac{E_{\text{resina}} BH}{A_{\text{aço}} (E_{\text{resina}} - E_{\text{aço}}) (dA - y_0)} \quad (24)$$

Observe que o módulo de elasticidade da resina não é dado explicitamente pelo enunciado do exemplo, mas ele pode ser tirado do diagrama de tensão-deformação da resina. Quando a tensão atinge 28,5 MPa, a deformação atinge  $7,125 \cdot 10^{-4}$ . Pela equação constitutiva, tem-se que  $\sigma = E\varepsilon$ , de forma que  $E_{\text{resina}} = 40 \text{ kN/mm}^2$ . Assim, da Equação 24 chega-se a:

$$N_{\text{fios}} = 7,87 \approx 8 \text{ fios} . \quad (25)$$

Para o número arredondado de  $N_{\text{fios}} = 8$  fios de aço, é necessário recalcular a posição da linha neutra. Usando a Equação 23, tem-se  $y_0 = -6,584 \text{ mm}$ .



## 4.2 Carregamento máximo $P_{\text{máx}}$

Tendo determinado o número de fios de aço, o cálculo da carga máxima  $P_{\text{máx}}$  é similar ao exemplo anterior: consiste em determinar a carga  $P$  que induz as tensões  $\sigma_{XX\text{máxC}} = 41,5 \text{ N/mm}^2$  e  $\sigma_{XX\text{máxT}} = 28,5 \text{ N/mm}^2$ . Na verdade, como a posição da linha neutra foi recalculada como sendo  $y_0 = -6,584 \text{ mm}$ , quando a máxima tensão de compressão de  $41,5 \text{ N/mm}^2$  for atingida, a tensão de tração será de  $28,36 \text{ N/mm}^2$  (recalculada por semelhança de triângulos como na Equação 18).

$$Q_{Z_{\text{aço}}} = 8A_{\text{aço}}(-dA) = -512\text{mm}^3; \quad Q_{Z_{\text{resina}}} = -Q_{Z_{\text{aço}}} = 512\text{mm}^3$$

O momento de inércia dos oito fios de aço é calculado pelo Teorema dos Eixos Paralelos,

$$\begin{aligned} I_{ZZ_{\text{aço}}}^{(8\text{fios})} &= I_{ZZ_{\text{aço}}}^{*(8\text{fios})} + A_{\text{aço}}^{(8\text{fios})}dA^2 = 8I_{ZZ_{\text{aço}}}^* + A_{\text{aço}}^{(8\text{fios})}dA^2 = 8\left(\frac{\pi}{64}d_{\text{aço}}^4\right) + 8A_{\text{aço}}dA^2 = \\ &= 8\left[\underbrace{\frac{\pi}{64}\left(\frac{4A_{\text{aço}}}{\pi}\right)^2}_{2,5465\text{mm}^4}\right] + \underbrace{8A_{\text{aço}}dA^2}_{16384\text{mm}^4} = 16386,5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Observe que, neste caso, como a distância  $dA^2$  é muito grande comparada com a área do aço, o termo do momento de inércia dos fios de aço em relação ao seu próprio eixo ( $I_{ZZ_{\text{aço}}}^*$ ) é desprezível.

$$\begin{aligned} I_{ZZ_{\text{resina}}} &= \frac{BH^3}{12} - I_{ZZ_{\text{aço}}}^{(8\text{fios})} = 841,1 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \\ EI_{ZZ_{\text{equ.}}} &= E_{\text{aço}}I_{ZZ_{\text{aço}}}^{(8\text{fios})} + E_{\text{resina}}I_{ZZ_{\text{resina}}} - y_0(E_{\text{aço}}Q_{Z_{\text{aço}}} + E_{\text{resina}}Q_{Z_{\text{resina}}}) = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \\ \sigma_{XX_{\text{resina}}}(y) &= -\frac{Mz \cdot E_{\text{resina}}(y - y_0)}{EI_{ZZ_{\text{equ.}}}} = -\frac{\left(\frac{P_{\text{máx}}L}{4}\right)(40 \text{ kN/mm}^2)\left(\frac{H}{2} - y_0\right)}{(5,2 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{mm}^2)} = \\ &= -\frac{\left(\frac{P_{\text{máx}}500 \text{ mm}}{4}\right)(40 \text{ kN/mm}^2)(35 + 6,584 \text{ mm})}{(5,2 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{mm}^2)} = -41,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \therefore P_{\text{máx}} &= 15,189 \text{ kN} \end{aligned} \tag{26}$$

## 4.3 Tensão máxima no aço

Se esta carga máxima for aplicada, a tensão máxima atuante no aço será de:

$$\begin{aligned} \sigma_{XX_{\text{aço}}}(y) &= -\frac{Mz \cdot E_{\text{aço}}(y - y_0)}{EI_{ZZ_{\text{equ.}}}} = -\frac{\left(\frac{P_{\text{máx}}L}{4}\right)(14 \text{ MN/mm}^2)(-dA - y_0)}{(5,2 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{mm}^2)} = \\ &= -\frac{\left(\frac{15,189 \text{ kN} \cdot 500 \text{ mm}}{4}\right)(14 \text{ MN/mm}^2)(-32 + 6,584 \text{ mm})}{(5,2 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{mm}^2)} = 19,722 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \tag{27}$$

### 5. Equação da linha elástica para vigas de múltiplos materiais

Com ajuda da Figura 2.5, vê-se que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = -k(y - y_0) \text{ e } \frac{\Delta u}{-(y - y_0)} = \frac{\Delta x}{\rho}.$$

$$\text{Assim, } \frac{\Delta u}{\Delta x} = -(y - y_0) \frac{1}{\rho} = \varepsilon_{xx}.$$

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{-(y - y_0)} = \frac{1}{\rho} = k = \frac{d^2}{dx^2} v(x)$$

$$\frac{\sigma_{xx_i}}{-(y - y_0) E_i} = \frac{d^2}{dx^2} v(x) \quad (28)$$

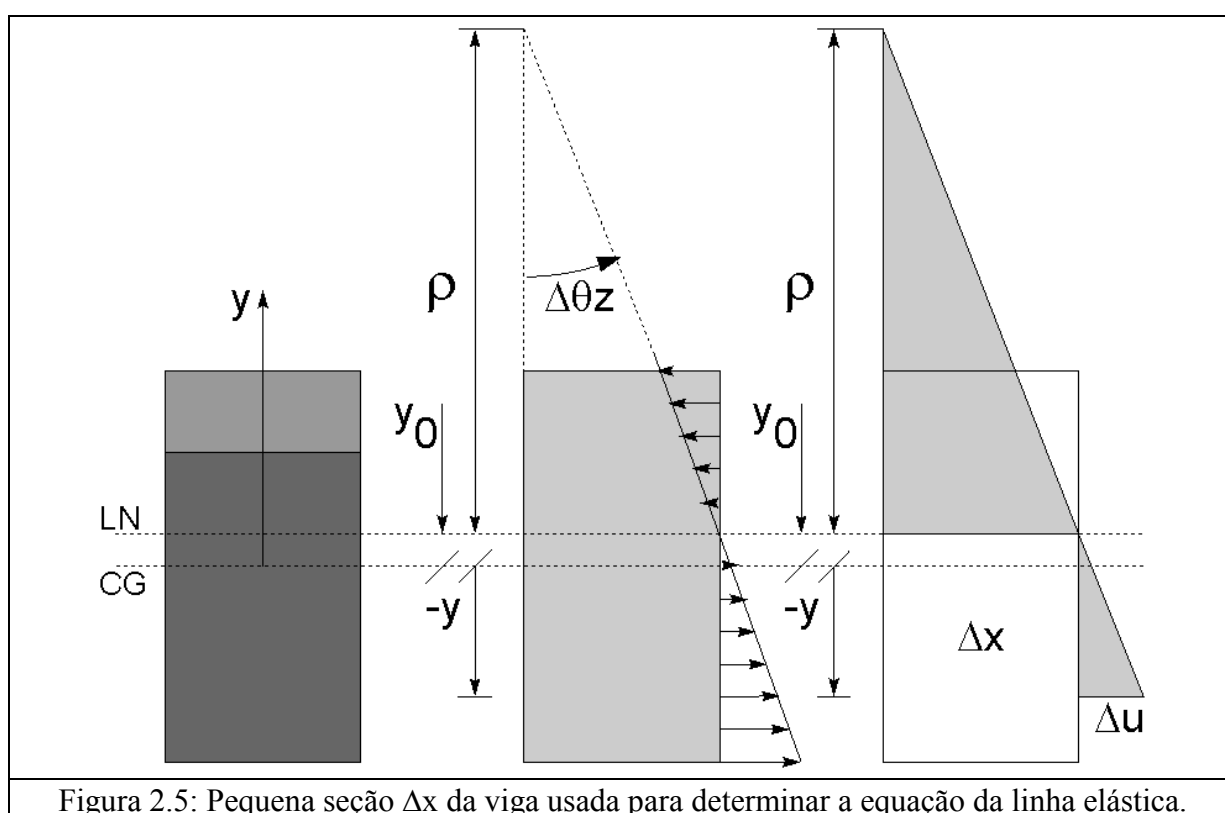


Figura 2.5: Pequena seção  $\Delta x$  da viga usada para determinar a equação da linha elástica.

Mas também,

$$\sigma_{xx_i} = \frac{-Mz(x)E_i(y - y_0)}{EI_{zz_{eq}}} \quad (29)$$

Juntando (28) e (29), tem-se então:

$$Mz(x) = EI_{zz_{eq}} \frac{d^2}{dx^2} v(x) \quad (30)$$

### 6. Exemplo 3

Considere uma viga homogênea de madeira conforme mostrada na Figura 4.3a. A viga é sujeita ao carregamento mostrado na Figura 4.3b. Numa segunda situação, adicionam-se dois reforços de aço à viga. Calcule a flecha máxima e as tensões máximas atuantes na madeira antes e depois da aplicação dos reforços. São dados  $B = 80 \text{ mm}$ ,  $H = 250 \text{ mm}$ ,  $L = 1500 \text{ mm}$ ,  $P = 10 \text{ kN}$ ,  $E_{\text{madeira}} = 10 \text{ GPa}$ ,  $E_{\text{aço}} = 210 \text{ kN/mm}^2$  e  $e_A = 5 \text{ mm}$ .

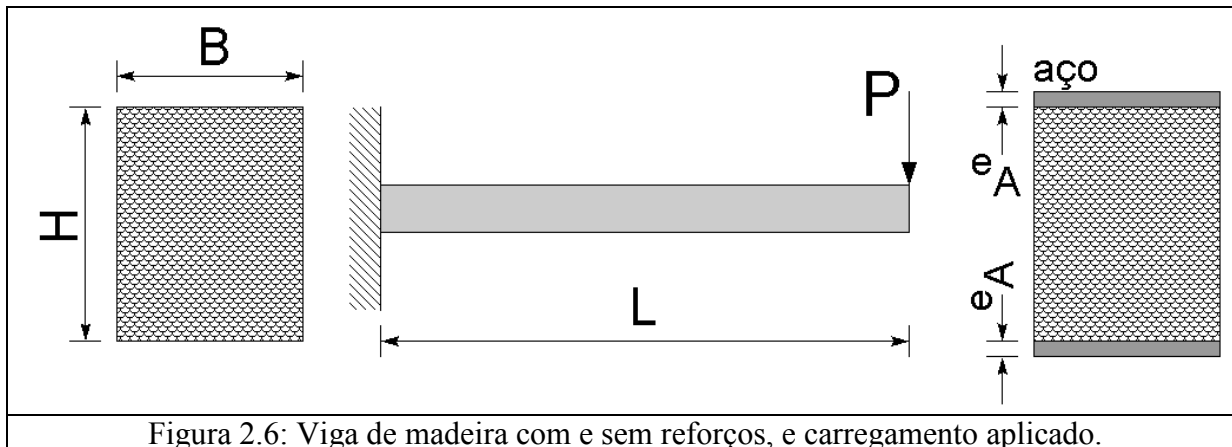


Figura 2.6: Viga de madeira com e sem reforços, e carregamento aplicado.

#### 6.1 Flecha máxima na viga homogênea

Este é um problema clássico. A flecha máxima ocorre em  $x=L$ , e é dada por:

$$v_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{3E_{\text{madeira}} I_{ZZ_{\text{original}}}} = \frac{4PL^3}{E_{\text{madeira}} BH^3} = \frac{4(10^4 \text{ N})(1,5\text{m})^3}{(10^{10} \text{ Pa})0,08\text{m}(0,25\text{m})^3} = 10,8 \text{ mm} \quad (31)$$

#### 6.2 Flecha máxima na viga reforçada

Propriedades geométricas:

$$A_{\text{madeira}} = BH = 20.000 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{aço}} = B \cdot e_A = 400 \text{ mm}^2 \text{ (duas áreas iguais a essa)}$$

$$d_{1\text{aço}} = \frac{1}{2}(H + e_A) = 127,5 \text{ mm} \text{ (posição do centróide do reforço superior)}$$

$$d_{2\text{aço}} = -\frac{1}{2}(H + e_A) = -127,5 \text{ mm} \text{ (posição do centróide do reforço inferior)}$$

$$QZ_{1\text{aço}} = A_{\text{aço}} d_{1\text{aço}} = 51.000 \text{ mm}^3 = -QZ_{2\text{aço}}$$

$$I_{ZZ_{\text{madeira}}} = \frac{BH^3}{12} = 1,042 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{ZZ_{\text{aço}1}} = \frac{B \cdot e_A^3}{12} + A_{\text{aço}} d_{1\text{aço}}^2 = 6,503 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = I_{ZZ_{\text{aço}2}}$$

$$I_{ZZ_{\text{total}}} = I_{ZZ_{\text{madeira}}} + I_{ZZ_{\text{aço}1}} + I_{ZZ_{\text{aço}2}} = 1,172 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Por simetria,  $y_0 = 0$ , então:

$$EI_{ZZ_{\text{equ.}}} = 2E_{\text{aço}} I_{ZZ_{\text{aço}}} + E_{\text{madeira}} I_{ZZ_{\text{madeira}}} - X_0 (2E_{\text{aço}} QZ_{\text{aço}} + E_{\text{madeira}} QZ_{\text{madeira}}) = 3,773 \cdot 10^{12} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad (32)$$

Flecha máxima:

$$v_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{3EI_{ZZ_{\text{eq.}}}} = \frac{(10^4 \text{ N})(1,5\text{m})^3}{3(3,773 \cdot 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2})} = 2,981 \text{ mm}$$

### 6.3 Tensões máximas na madeira e no aço

$$\sigma_{XX_{\text{madeira}}}(y) = -\frac{Mz_{\text{máx}} \cdot E_{\text{madeira}} (y - X_0)}{EI_{ZZ_{\text{equ.}}}} = -\frac{PL(10 \text{ kN/mm}^2)}{(3,773 \cdot 10^{12} \text{ N} \cdot \text{mm}^2)} y = -0,0398 \cdot y \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (33)$$

$$\sigma_{XX_{\text{aço}}}(y) = -\frac{Mz_{\text{máx}} \cdot E_{\text{aço}} (y - X_0)}{EI_{ZZ_{\text{equ.}}}} = -\frac{PL(210 \text{ kN/mm}^2)}{(3,773 \cdot 10^{12} \text{ N} \cdot \text{mm}^2)} y = -0,8349 \cdot y \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{XX_{\text{madeira}}}(y = \frac{H}{2}^-) = 4,969 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_{XX_{\text{madeira}}}(y = y_0 = 0) = 0 \\ \sigma_{XX_{\text{madeira}}}(y = -\frac{H}{2}^+) = -4,969 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_{XX_{\text{aço}}}(y = \pm \frac{H}{2}) = \pm 104,458 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_{XX_{\text{aço}}}(y = \pm (\frac{H}{2} + e_A)^\pm) = \pm 108,53 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{array} \right.$$

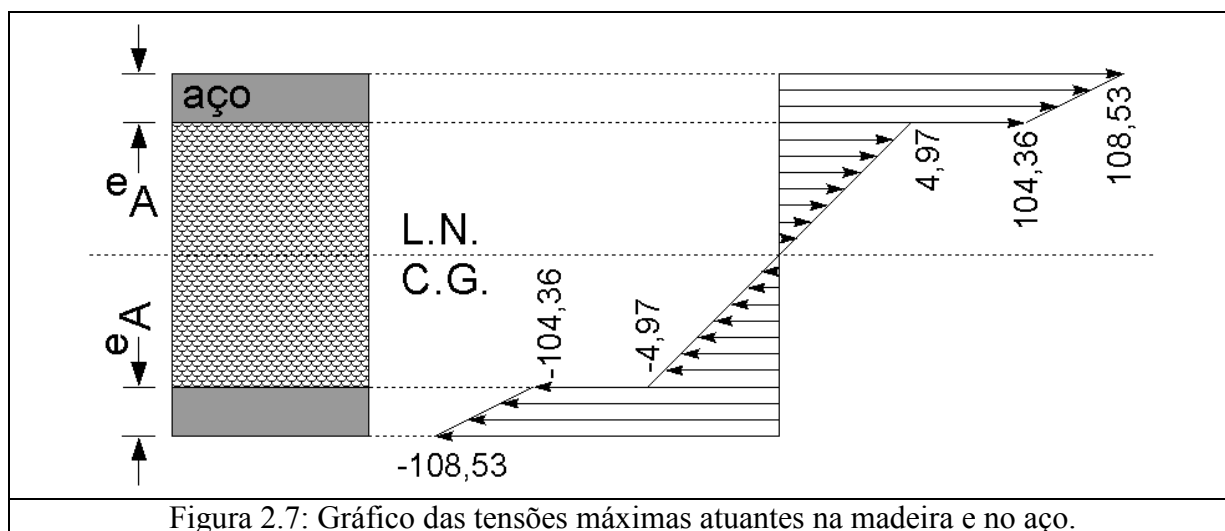


Figura 2.7: Gráfico das tensões máximas atuantes na madeira e no aço.

# CAPÍTULO VIII

## PARTE C – TENSÕES DE CISALHAMENTO NA FLEXÃO

### 1. Flexão pura versus flexão geral

Já foram vistas, numa aula anterior, as diferenças entre um caso de flexão pura (não há presença de esforço cortante na seção) e flexão geral (Figura 2.1). Na flexão pura, tem-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_{A(x)} dF_x = \int_{A(x)} \sigma_{xx} dA = N_x(x) = 0$$

$$\sum M_z = M_z(x) \Rightarrow \int_{A(x)} dM_z = - \int_{A(x)} y dF_x = - \int_{A(x)} \sigma_{xx}(x, y) y dA = M_z(x)$$

Na flexão geral, além disso, surgem tensões tangenciais para equilibrar o esforço cortante:

$$\sum F_y = V_y(x) \Rightarrow \int_{A(x)} dF_y = \int_{A(x)} \sigma_{xy}(x, y) dA = V_y(x), \text{ com } \sigma_{xy} = \sigma_{yx}.$$

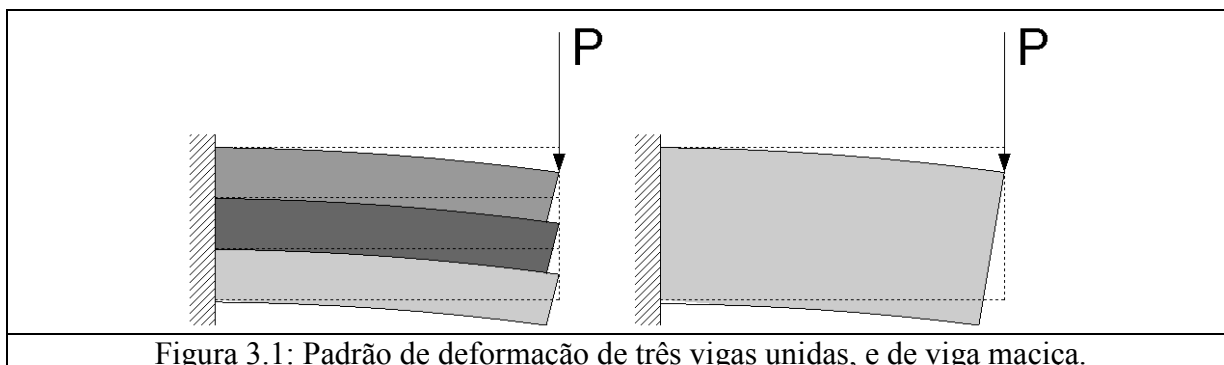


Figura 3.1: Padrão de deformação de três vigas unidas, e de viga maciça.

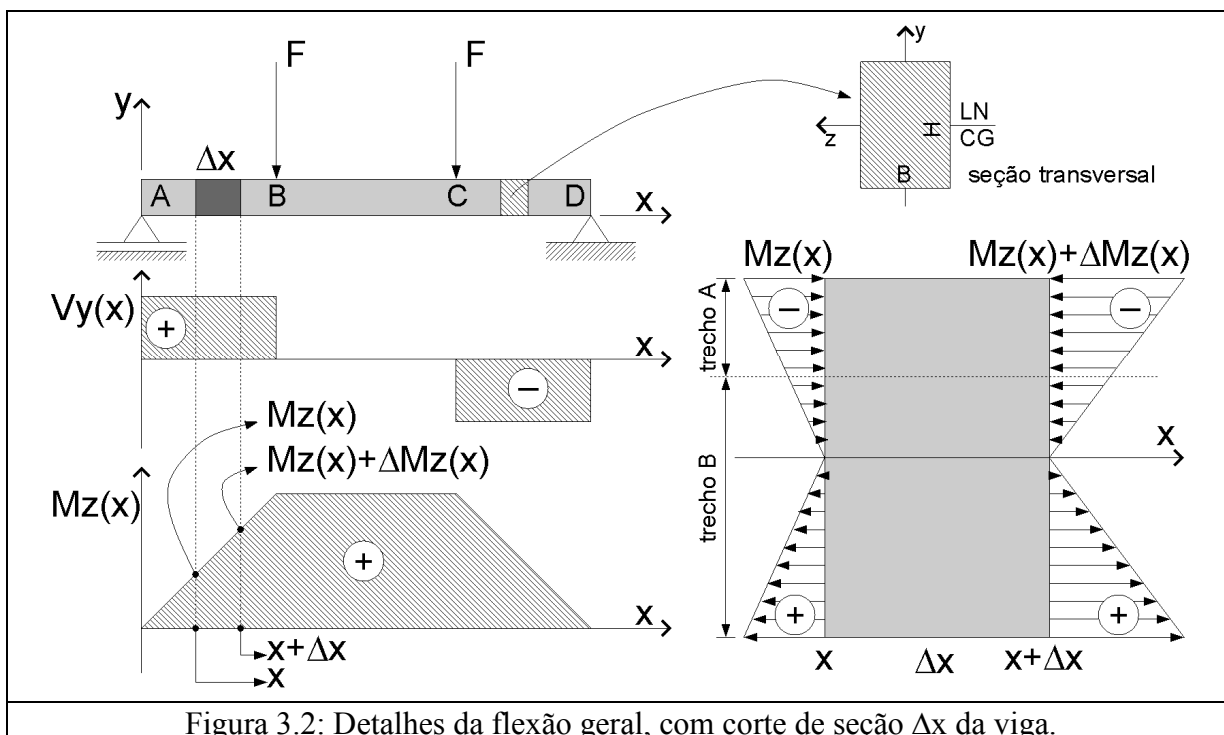


Figura 3.2: Detalhes da flexão geral, com corte de seção  $\Delta x$  da viga.

## 2. Determinação das tensões de cisalhamento na flexão

Considere uma parte de viga sujeita a flexão geral, da qual se retira um trecho de comprimento  $\Delta x$ , conforme a Figura 5.2. Separando os trechos A e B, como na Figura 3.3, observa-se o aparecimento de tensões  $\sigma_{YX}$ . Estas tensões tangenciais surgem para equilibrar os esforços que surgem devido à diferença entre os momentos  $M_Z(x)$  e  $M_Z(x+\Delta x)$ .

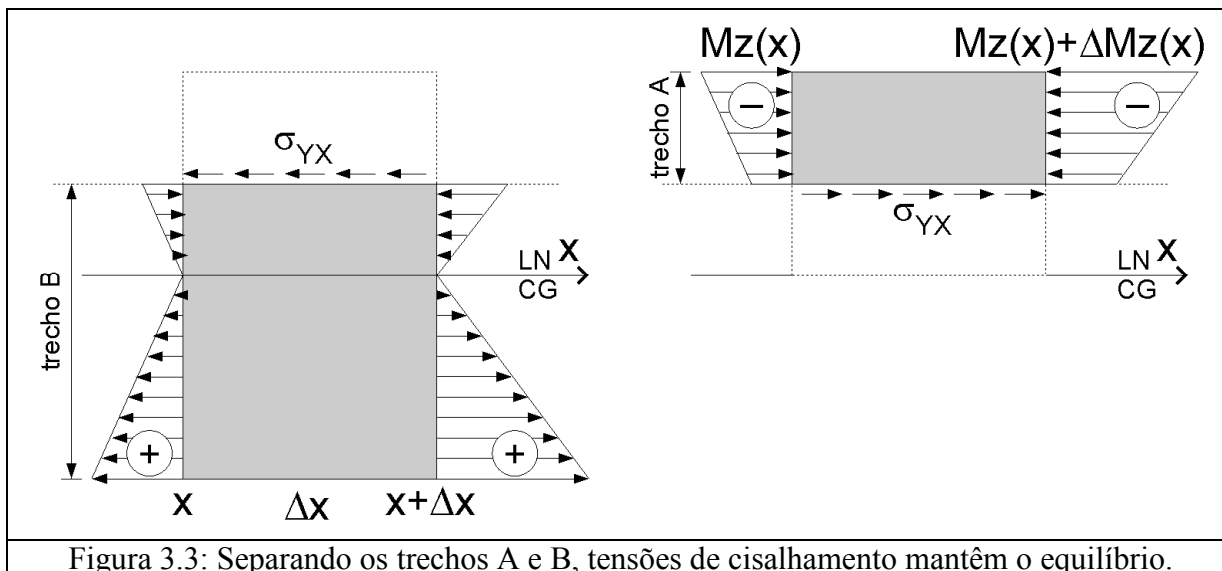


Figura 3.3: Separando os trechos A e B, tensões de cisalhamento mantêm o equilíbrio.

Com ajuda da Figura 3.4, pode-se ver que:

$$\frac{F_T}{A_T} = \frac{F_T}{\Delta x \cdot B} = \frac{F_N(x + \Delta x) - F_N(x)}{A_T} = \sigma_{XY\text{médio}}$$

$$F_N(x) = \int_{A_p(y)} \sigma_{XX}(\xi) dA. \text{ Mas } \sigma_{XX}(\xi) = -\frac{Mz(x) \cdot \xi}{Izz(x)}, \text{ então:}$$

$$F_N(x) = -\int_{A_p(y)} \frac{Mz(x) \cdot \xi}{Izz(x)} dA = -\frac{Mz(x)}{Izz(x)} \underbrace{\int_{A_p(y)} \xi dA}_{Qz_p(y)} \Rightarrow \therefore F_{N(\text{médio})}(x, y) = -\frac{Mz(x)}{Izz(x)} Qz_p(y)$$

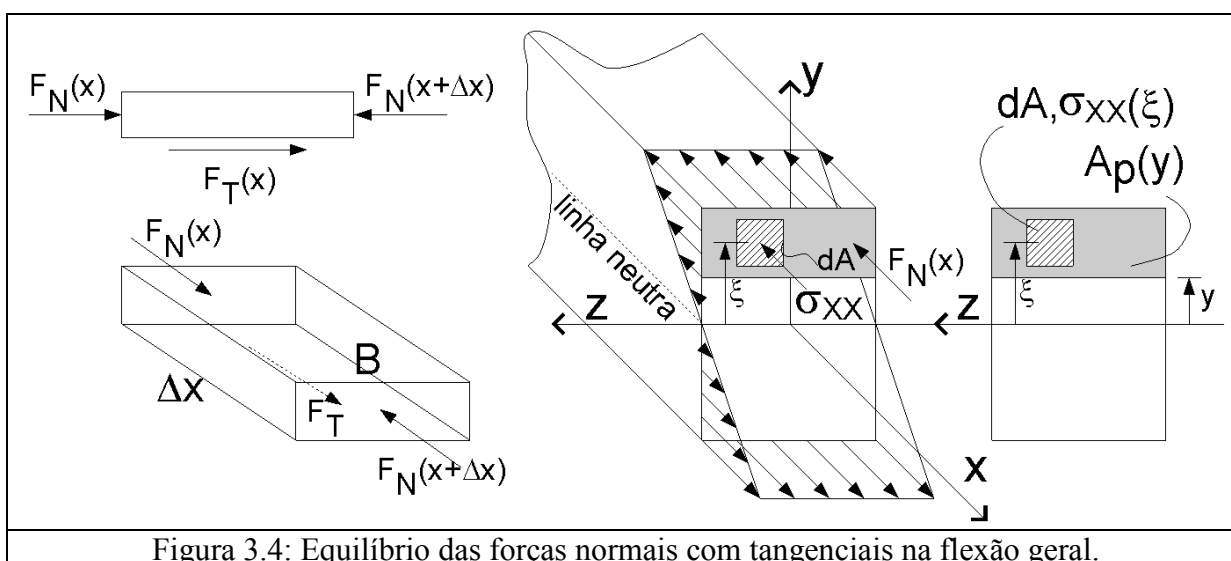


Figura 3.4: Equilíbrio das forças normais com tangenciais na flexão geral.

$$F_{N(\text{médio})}(x + \Delta x) = -\frac{(Mz(x) + \Delta Mz(x))}{I_{zz}(x)} Q_{zp}(y)$$

$$F_{T(\text{médio})}(x) = -\frac{(Mz(x) + \Delta Mz(x))}{I_{zz}(x)} Q_{zp}(y) - \left[ -\frac{Mz(x)}{I_{zz}(x)} Q_{zp}(y) \right] = -\frac{\Delta Mz(x)}{I_{zz}(x)} Q_{zp}(y)$$

$$\sigma_{XY(\text{médio})}(x, y) = \frac{F_{T(\text{médio})}(x, y)}{A_T(x, y)} = -\frac{\Delta Mz(x)}{\Delta x} \frac{Q_{zp}(y)}{I_{zz}(x)B(y)}$$

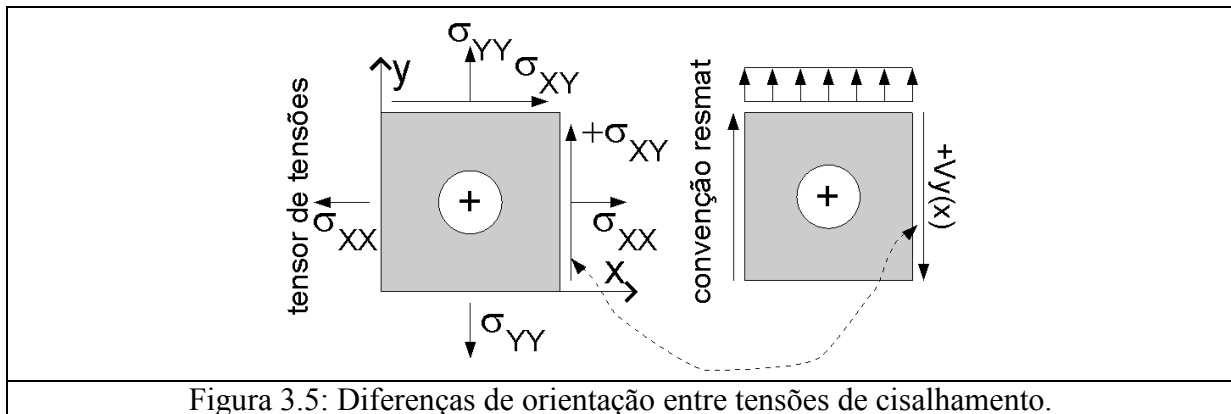
$$\sigma_{XY}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma_{XY(\text{médio})}(x, y)$$

Mas  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Mz(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} Mz(x) = Vy(x)$ ,

$$\therefore \sigma_{XY}(x, y) = -\frac{Vy(x) Q_{zp}(y)}{I_{zz}(x) B(y)} \quad (1)$$

### 3. Discussão sobre sinal

A tensão de cisalhamento no tensor de tensões e o esforço cortante na convenção da Resistência dos Materiais têm sentidos invertidos (Figura 3.5). O sinal negativo da Equação 1 foi introduzido para corrigir esta diferença.



### 4. Discussão sobre aproximações

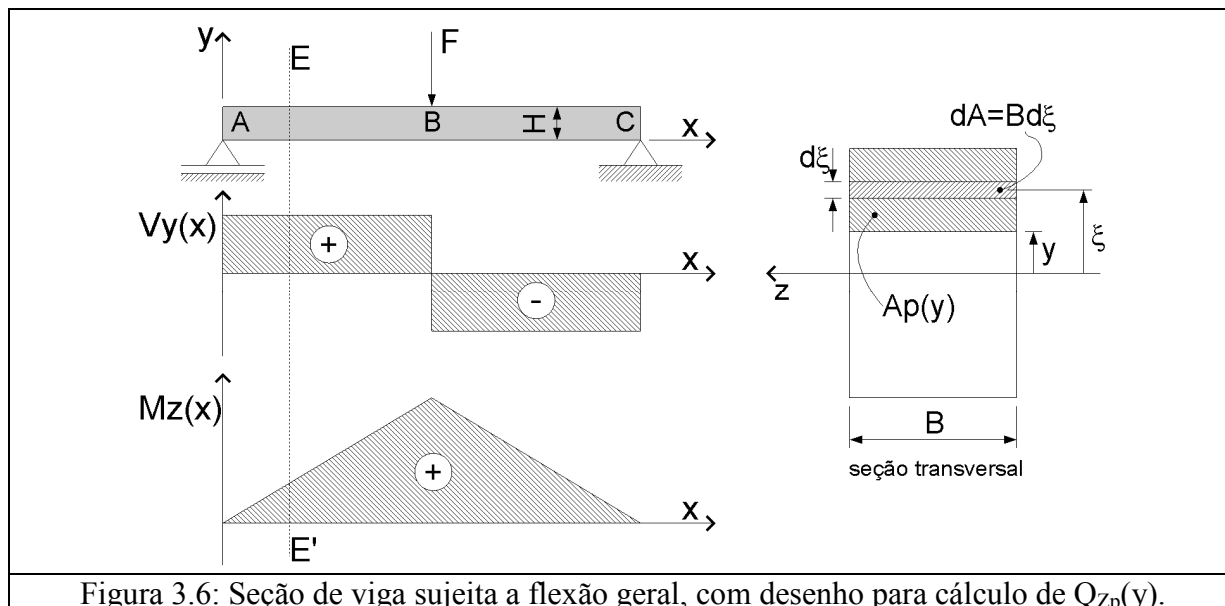
Considere a viga sujeita a flexão geral mostrada na Figura 3.6. Na seção  $EE'$ , o esforço cortante resultante é igual a  $Vy(x) = \frac{1}{2}F$ , distribuído sobre uma área  $A_{EE'} = B \cdot H$ . Pode-se dizer que a tensão de cisalhamento média atuante na seção é dada então por:

$$\sigma_{XY(\text{média})} = -\frac{Vy(x)}{A_{EE'}} = -\frac{F}{2BH} \quad (2)$$

A tensão cisalhante sobre a seção, no entanto, é dada por:

$$\sigma_{XY}(x, y) = -\frac{Vy(x) Q_{zp}(y)}{I_{zz}(x) B(y)}, \text{ em que } B(y) = B \text{ (constante) e:}$$

$$Q_{zp}(y) = \int_{A_p(y)} \xi dA = \int_{\xi=y}^{\xi=\frac{H}{2}} \xi (B d\xi) = \frac{B}{2} \xi^2 \Big|_y^{\frac{H}{2}} = \frac{B}{2} \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right)$$


 Figura 3.6: Seção de viga sujeita a flexão geral, com desenho para cálculo de  $Q_{Zp}(y)$ .

$$\text{Assim, } \sigma_{xy}(x, y) = -\frac{V_y(x) Q_{zp}(y)}{I_{zz}(x) B(y)} = -\frac{F}{2} \frac{12}{BH^3} \frac{1}{2} \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\therefore \sigma_{xy}(x, y) = -\frac{3F}{BH} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right] \rightarrow \begin{cases} \sigma_{xy}(y = \frac{H}{2}) = 0 \\ \sigma_{xy}(y = 0) = -\frac{3F}{4BH} \Rightarrow \sigma_{xy\text{máx}} \\ \sigma_{xy}(y = -\frac{H}{2}) = 0 \end{cases}$$

Assim, quando se considera que a tensão atuante na seção é  $-F/(2BH)$  (média), comete-se um erro de:

$$\frac{\sigma_{xy\text{máx}}}{\sigma_{xy(\text{médio})}} = \frac{-\frac{3F}{4BH}}{-\frac{F}{2BH}} = 1,5 \text{ (50\% de erro).}$$

## 5. Tensão de cisalhamento em uma seção triangular

Com ajuda da Figura 3.7a, determinaremos  $Q_{Zp}(y)$  por integração:

$$Q_{Zp}(y) = \int_{A_p(y)} \xi dA = \int_{\xi=y}^{\xi=\frac{H}{2}} \xi B(\xi) d\xi \quad (3)$$

É necessário determinar a expressão de  $B(\xi)$ . Sabe-se que a largura  $B$  varia linearmente com  $\xi$ , então se pode dizer que  $B(\xi) = \alpha\xi + \beta$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Além disso, sabe-se que  $B(\xi = -H/3) = B$  e  $B(\xi = 2H/3) = 0$ . Assim, determina-se:

$$B(\xi) = -\frac{B}{H}\xi + \frac{2}{3}B \quad (4)$$



$$Q_{Zp}(y) = \int_{A_p(y)} \xi dA = \int_{\xi=y}^{\xi=\frac{2}{3}H} \xi \left[ -\frac{B}{H}\xi + \frac{2}{3}B \right] d\xi$$

$$Q_{Zp}(y) = \frac{1}{81} \frac{B}{H} (4H^3 + 27y^3 - 27Hy^2) \tag{5}$$

Com ajuda da Figura 3.7b, determinaremos o mesmo  $Q_{Zp}(y)$  por geometria:

$$Q_{Zp}(y) = A_p(y) \cdot d_p \tag{6}$$

$$A_p(y) = \frac{1}{2} B(y)h = \frac{1}{2} B(y) \left[ \frac{2}{3} H - y \right]$$

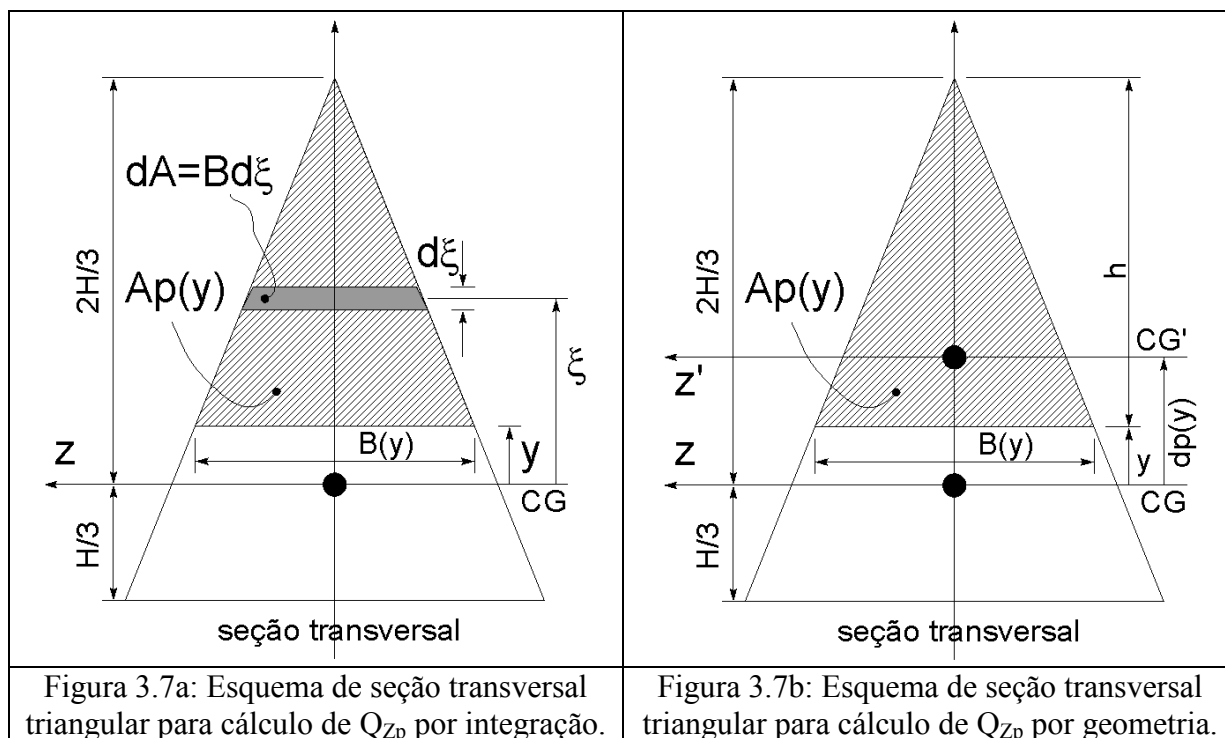
Por semelhança de triângulos (Figura 3.7b), tem-se que a largura  $B(y)$  é:

$$B(y) = \frac{B \cdot h}{H} = \frac{B}{H} \left[ \frac{2}{3} H - y \right]$$

$$d_p(y) = y + \frac{1}{3} h = y + \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} H - y \right]$$

$$\therefore Q_{Zp}(y) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{B}{H} \left[ \frac{2}{3} H - y \right] \right\} \left[ \frac{2}{3} H - y \right] \cdot \left\{ y + \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} H - y \right] \right\}$$

$$Q_{Zp}(y) = \frac{1}{81} \frac{B}{H} (4H^3 + 27y^3 - 27Hy^2) \tag{7}$$



**6. Força de cisalhamento por unidade de comprimento (fluxo de cisalhamento)**

Na Seção 2, a força tangencial foi dada por:

$$F_T = \frac{-\Delta Mz}{I_{ZZ}} Qz p(y) \Rightarrow \sigma_{XY(\text{média})} = \frac{F_T}{A_T} = \frac{F_T}{\Delta x \cdot B(y)}$$

Define-se o fluxo de cisalhamento como a força tangencial atuando em um dado comprimento, isto é:

$$q_{C(\text{médio})}(y) = \frac{F_T}{\Delta x}, \text{ tal que:}$$

$$q_{C(\text{médio})}(y) = \frac{-\Delta Mz}{\Delta x} \frac{Qz p(y)}{I_{ZZ}}. \text{ No limite, tem-se } q_C(y) = -Vy(x) \frac{Qz p(y)}{I_{ZZ}}$$

Assim, a expressão para a tensão tangencial se torna:

$$\sigma_{XY} = -\frac{Vy(x)}{I_{ZZ}} \frac{Qz p(y)}{B(y)} = \frac{q_C(y)}{B(y)} \tag{8}$$

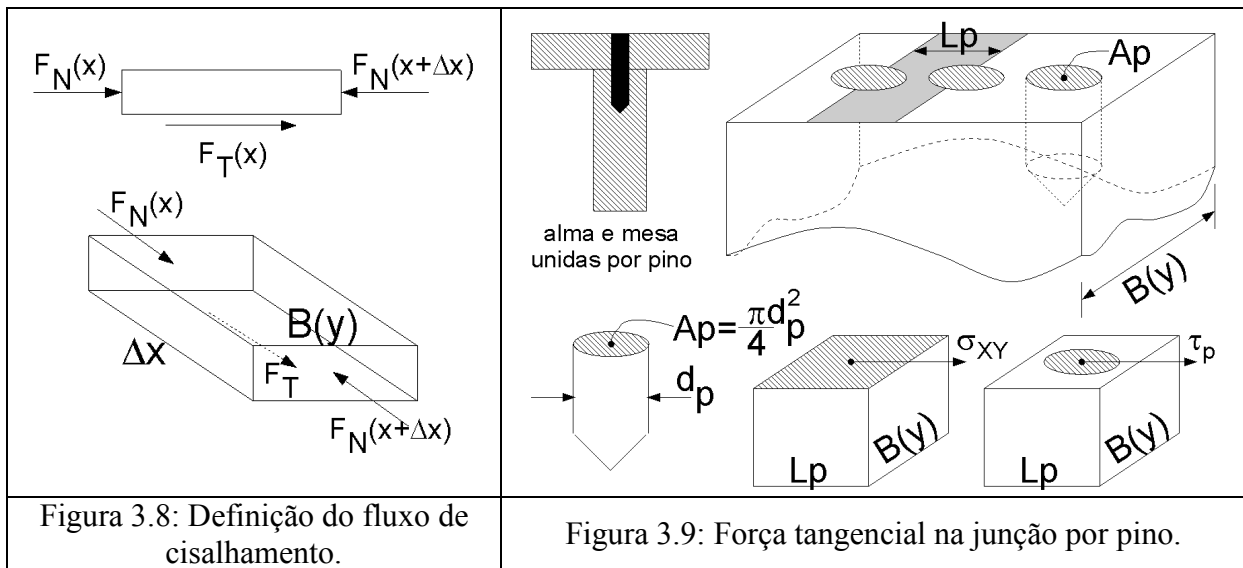


Figura 3.8: Definição do fluxo de cisalhamento.

Figura 3.9: Força tangencial na junção por pino.

**7. Formas de junção: pino**

Considere o problema ilustrado na Figura 3.9. Neste exemplo, a alma e a mesa de uma viga estão unidas por pinos espaçados de uma distância  $L_p$ . Para que estas peças mantenham-se unidas, atua nesta interface uma força tangencial dada por:

$$F_T(L_p) = \underbrace{\sigma_{XY} B(y)}_{q_C(y)} \cdot L_p = q_C(y) L_p \tag{9}$$

Cada pino, por sua vez, resiste à seguinte força tangencial:

$$F_{Tpino} = \tau_p \cdot A_p \tag{10}$$

Para que haja equilíbrio, isto é, para que os pinos exerçam sozinhos a força tangencial necessária para unir a alma à mesa, é necessário que:

$$F_T(L_p) = F_{T_{\text{pino}}}$$

$$q_C(y)L_p = \tau_p \cdot A_p \quad (11)$$

Com a Equação 11, pode-se dimensionar os pinos ou sua disposição ao longo da viga, para que um dado critério de projeto seja satisfeito. Por exemplo, a tensão de cisalhamento  $\tau_p$  não exceda a tensão máxima que o material dos pinos é capaz de resistir.

### 8. Formas de junção: solda

Analogamente ao caso dos pinos, a alma e a mesa da viga mostrada na Figura 3.10 permanecerão unidas se a força tangencial expressa pela Equação 9 estiver atuando. Contudo, os cordões de solda resistem à seguinte força tangencial:

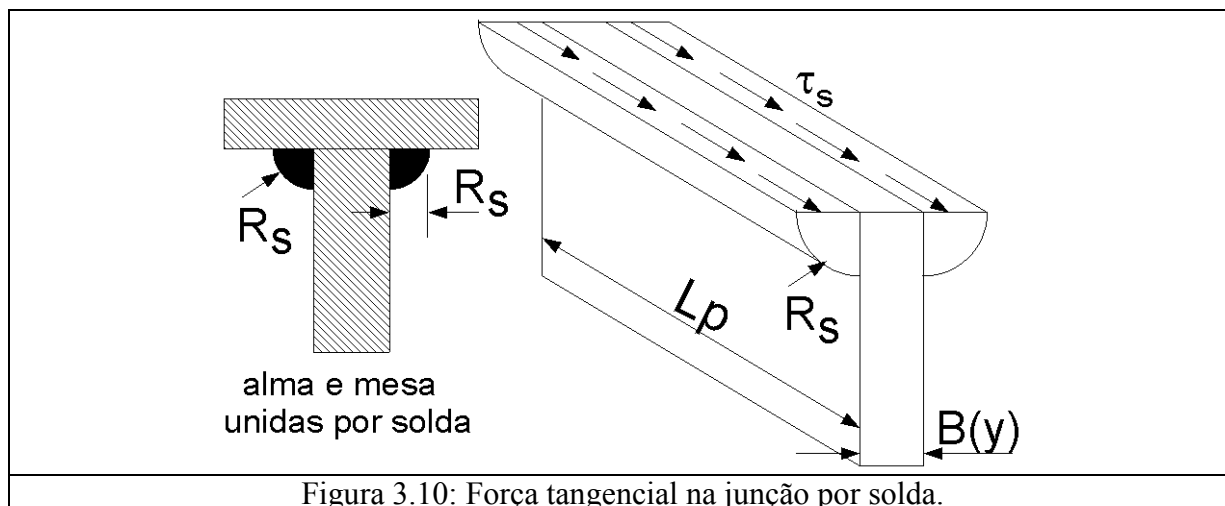
$$F_{T_{\text{solda}}} = \tau_s \cdot A_s = \tau_s \underbrace{(2R_s L_T)}_{A_s} \quad (12)$$

Para que haja equilíbrio, isto é, para que os cordões de solda exerçam sozinhos a força tangencial necessária para unir a alma à mesa, é necessário que:

$$F_T(L_T) = F_{T_{\text{solda}}}$$

$$q_C(y) = 2R_s \tau_s \quad (13)$$

Com a Equação 13, pode-se dimensionar os cordões de solda para que um dado critério de projeto seja satisfeito.



### 9. Exemplo (Do Exame de 15/07/2009; 3,0 pontos)

Uma viga é composta por quatro pranchas de madeira, unidas entre si por pinos ao longo de seu comprimento. Determinar o esforço cortante máximo que a viga suporta. **Dados:**  $B = 200$  mm (largura das pranchas),  $T = 75$  mm (espessura das pranchas),  $L_p = 200$  mm (distância entre os pinos),  $\tau_{p_{\text{máx}}} = 19$  N/mm<sup>2</sup> (tensão máxima suportada pelos pinos),  $d_p = 12$  mm (diâmetro dos pinos).

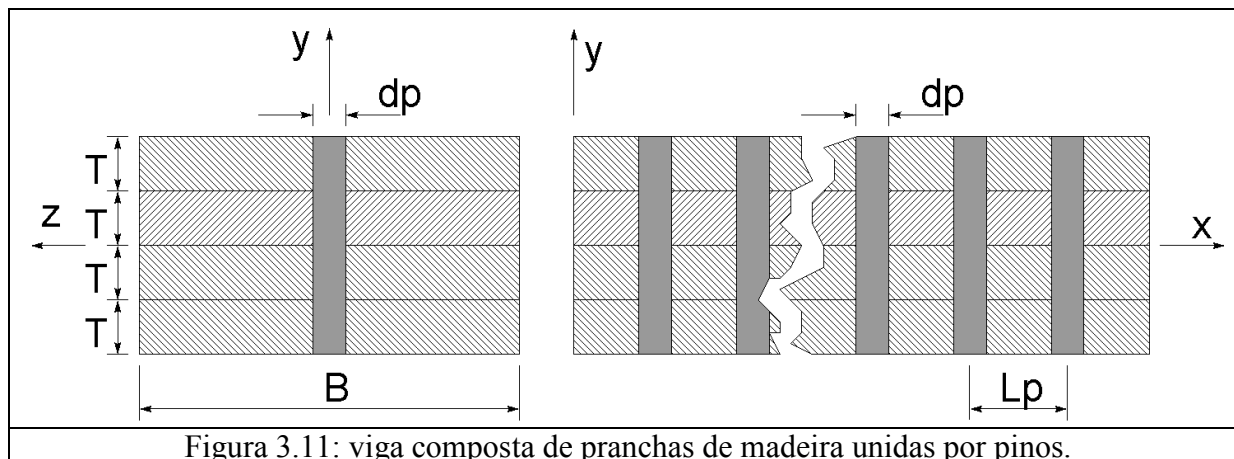


Figura 3.11: viga composta de pranchas de madeira unidas por pinos.

### 9.1 Solução

A força tangencial resistida por um pino é dada por:

$$F_T = A_p \cdot \tau_p = \left( \frac{\pi}{4} dp^2 \right) \tau_p = \frac{\pi}{4} (12 \text{ mm})^2 19 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 648\pi \text{ N} \quad (14)$$

Por outro lado, a força tangencial atuante ao longo de um comprimento  $L_p$  é:

$$F_T(L_p) = \text{tensão} \times \text{área} = \underbrace{\sigma_{xy}}_{\text{tensão}} \cdot \underbrace{B(y)}_{\text{área}} \cdot L_p = q_c(y) \cdot L_p = -\frac{Vy(x)}{I_{zz}(x)} Q_{zp}(y) \cdot L_p \quad (15)$$

	<p>Momento de inércia atuando na seção:</p> $I_{zz} = \frac{BH^3}{12} = \frac{B(4T)^3}{12}$ <p>Momento estático de área máximo:</p> $Q_{zp} = A_p \cdot \bar{y}_p = (2TB)(T)$
--	---

Como somente um pino é disposto a cada intervalo de comprimento  $L_p$ , é necessário que esse pino suporte sozinho a força tangencial nesse espaço. Assim, para haver equilíbrio, tem-se:

$$F_T(L_p) = F_{T\text{pino}} \quad (16)$$

$$\tau_p \cdot A_p = -\frac{Vy(x)}{I_{zz}(x)} Q_{zp}(y) \cdot L_p \quad (17)$$

$$\therefore \boxed{Vy = 2148 \text{ N}} \quad (18)$$

### 10. Exemplo (Da P1 de 06/05/98; 2,5 pontos)

A seção transversal de uma viga foi composta a partir de perfis U e duas chapas planas do mesmo material, tal como mostrado na Figura 3.12. As seções foram unidas por cordões de solda que podem ser assumidos de seção semi-circular de raio  $R_i$  ( $i=1,2$ ). Sabendo-se que a seção transversal está submetida a um esforço cortante  $V_y$  e que tanto o material das chapas quanto o material da solda suporta uma tensão de cisalhamento máxima  $\tau_{\max}$ ,

- a) determine os raios mínimos dos cordões de solda  $R_1$  e  $R_2$  necessários para resistir às tensões de cisalhamento;

**Dados:**  $B = 250$  mm,  $T = 25$  mm,  $E = 210$  kN/mm<sup>2</sup>,  $V_y = 15$  kN,  $\tau_{\max} = 18$  N/mm<sup>2</sup>.

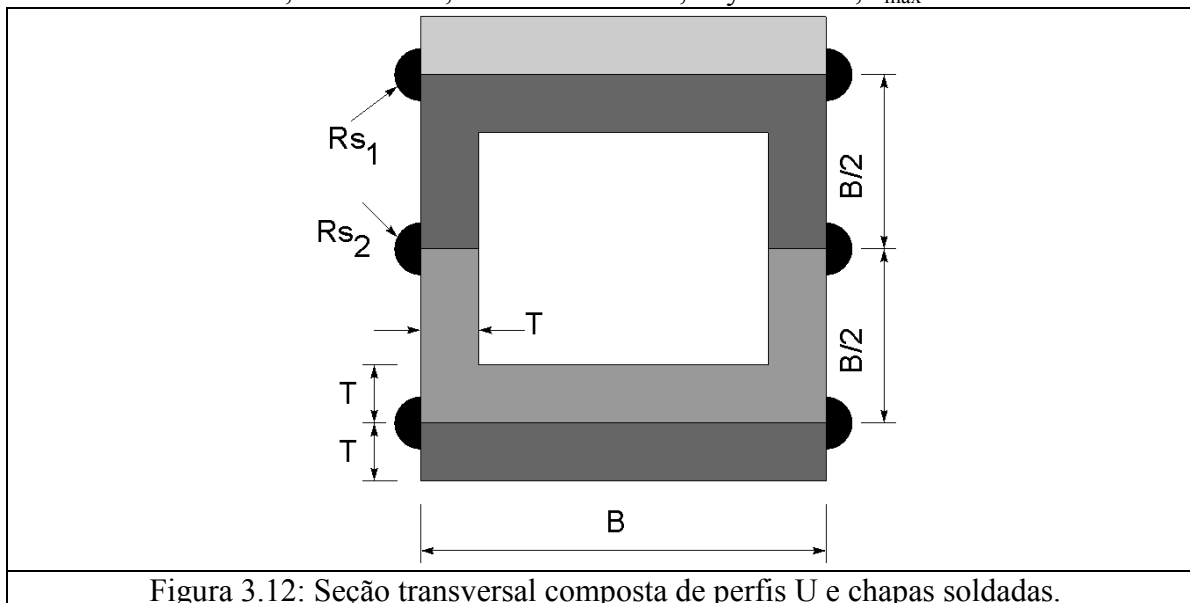


Figura 3.12: Seção transversal composta de perfis U e chapas soldadas.

#### 10.1 Determinação das propriedades geométricas da seção

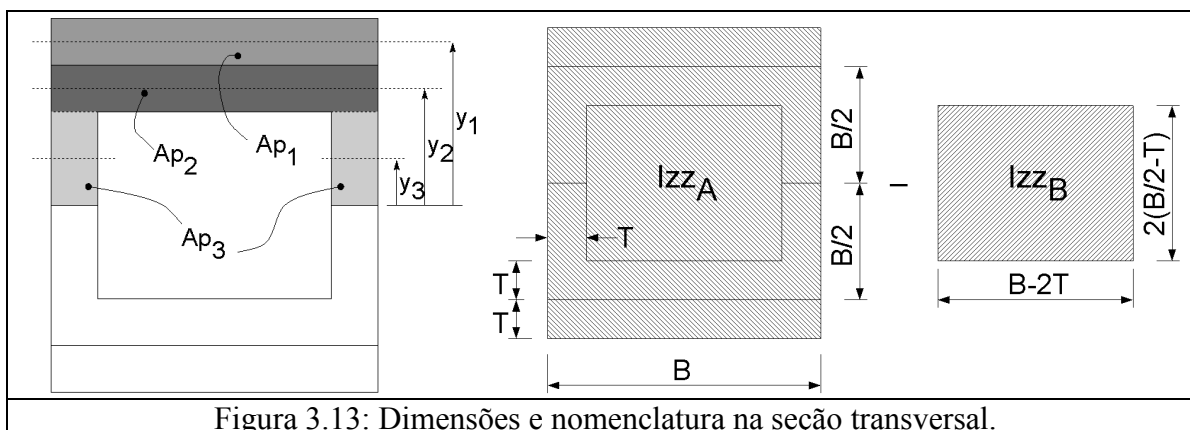


Figura 3.13: Dimensões e nomenclatura na seção transversal.

$$A_{p1} = BT, A_{p2} = BT \text{ e } A_{p3} = 2 \left[ \left( \frac{B}{2} - T \right) T \right]$$

$$y_1 = \frac{B}{2} - \frac{T}{2}, y_2 = \frac{B}{2} - \frac{T}{2} \text{ e } y_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{B}{2} - T \right)$$

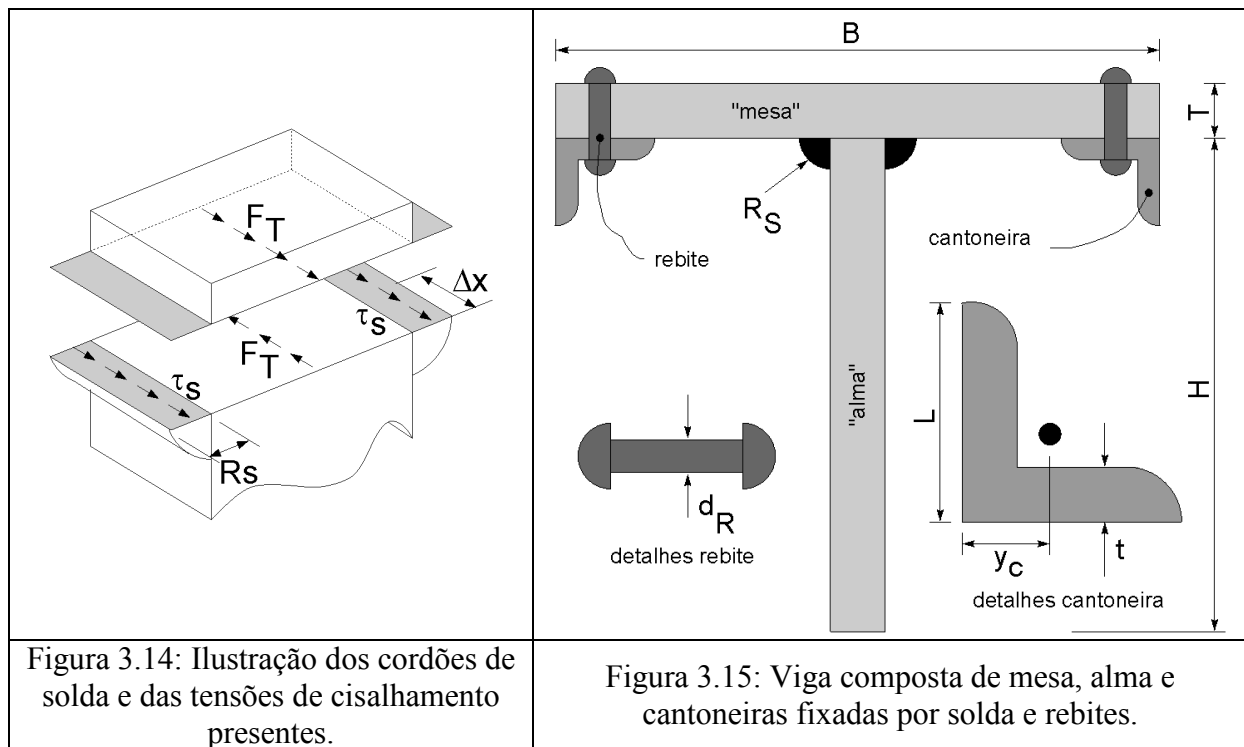
$$Q_{z_{p1}} = A_1 y_1 = (BT) \left( \frac{B-T}{2} \right) = 55T^3 \text{ e } Q_{z_{p2}} = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 = 116T^3$$

$$I_{ZZI} = \underbrace{\frac{B}{12}(B+2T)^3}_{I_{ZZA}} - \underbrace{\frac{(B-2T)}{12}(B-2T)^3}_{I_{ZZB}} = 4,29 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$q_{C1}(y) = -Vy(x) \frac{Q_{Zp1}(y)}{I_{ZZ}} = \frac{-15000 \text{ N}}{4,29 \cdot 10^8 \text{ mm}^4} 55(25 \text{ mm})^3 = 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$q_{C2}(y) = -Vy(x) \frac{Q_{Zp2}(y)}{I_{ZZ}} = \frac{-15000 \text{ N}}{4,29 \cdot 10^8 \text{ mm}^4} 116(25 \text{ mm})^3 = 63,35 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

## 10.2 Dimensionamento dos cordões



Com ajuda da Figura 3.14, tem-se que  $F_T = q_{Ci} \Delta x$  e  $F_S = A_S \tau_s = (2R_{Si} \Delta x) \tau_s$

Para que haja equilíbrio, é necessário que  $F_T = F_S$ . Assim,

$$q_{Ci} \Delta x = 2R_{Si} \Delta x \tau_s, \text{ com } R_{Si} = \frac{q_{Ci}}{2\tau_s}$$

$$R_{S1} = \frac{\left(30 \frac{\text{N}}{\text{mm}}\right)}{2\left(18 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)} = 0,83 \text{ mm} \text{ e } R_{S2} = \frac{\left(63,35 \frac{\text{N}}{\text{mm}}\right)}{2\left(18 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)} = 1,27 \text{ mm} \quad (19)$$

## 11. Exercício proposto

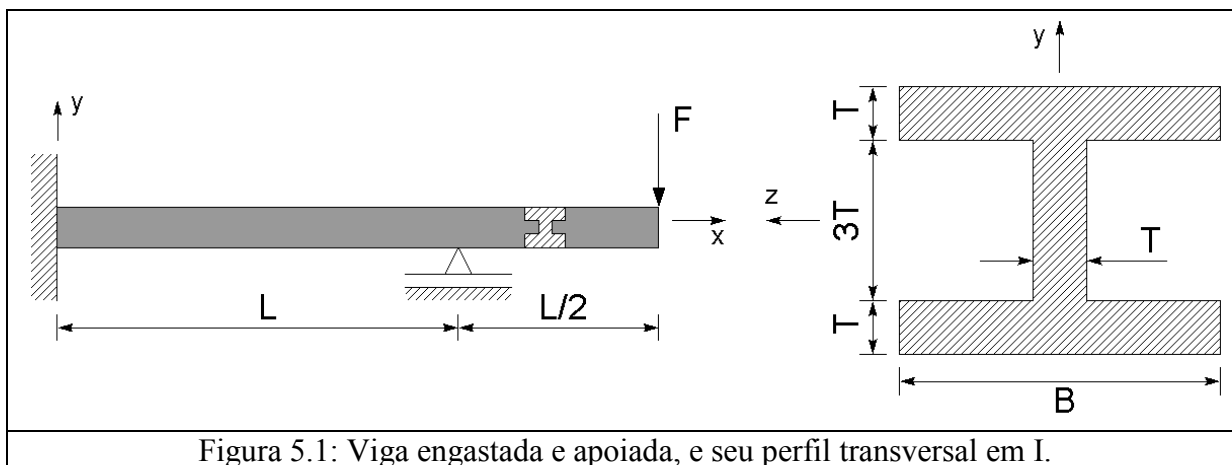
A viga mostrada na Figura 3.15 é sujeita a um esforço cortante  $Vy = 400 \text{ kN}$ . Determine o diâmetro mínimo dos rebites e a tensão atuante na solda. **Dados:**  $L = 101,6 \text{ mm}$  e  $t = 19,1 \text{ mm}$ ; Área total da cantoneira:  $A_{Tc} = 3510 \text{ mm}^2$ ; Momento de inércia da cantoneira:  $I_{ZZC} = 320,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ; Centróide da cantoneira:  $y_C = 32,26 \text{ mm}$ ; Tensão máxima suportada pelo rebite:  $\tau_{\text{máxR}} = 25 \text{ N/mm}^2$ ; Espaçamento dos rebites no eixo x:  $L_R = 200 \text{ mm}$ . **Resposta:**  $d_R = 43,6 \text{ mm}$ .

# CAPÍTULO X

## PARTE A – ANÁLISE DE TENSÃO

### 1. Introdução: cisalhamento na flexão de vigas

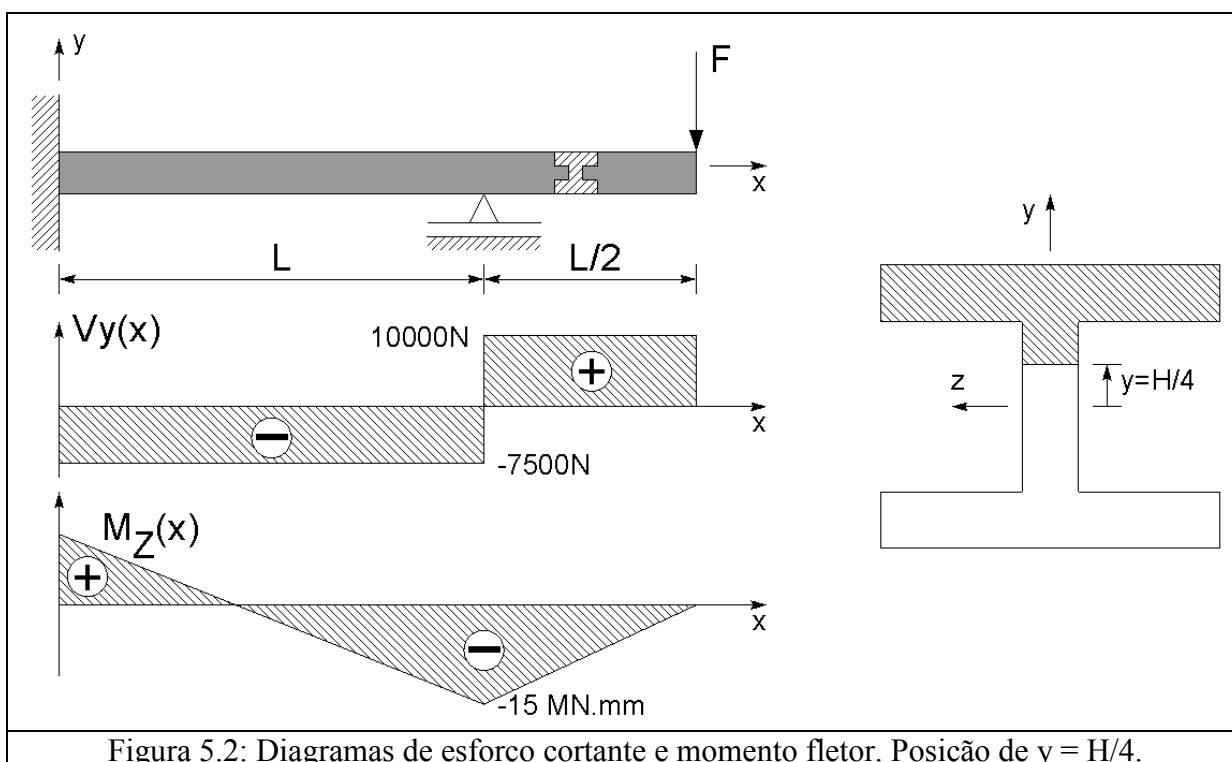
Dada a viga com vinculação e carregamento abaixo, determinar as tensões normais e de cisalhamento no ponto  $x = L^+$ ,  $y = H/4^+$ . Dados:  $F = 10 \text{ kN}$ ,  $L = 3 \text{ m}$  e  $T = 25 \text{ mm}$ .



Resolvendo o problema de viga mostrado na Figura 5.1, obtém-se os seguintes valores de esforço cortante e momento fletor no ponto  $x = L^+$ , cujos diagramas são mostrados na Figura 5.2:

$$M_z(x = L^+) = -1,5 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (1)$$

$$V_y(x = L^+) = 10 \text{ kN} \quad (2)$$



Obtém-se as propriedades geométricas da seção transversal (Figura 5.2):

$$I_{ZZI} = 1,2044 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (3)$$

$$B(y = +\frac{H}{4}) = T = 25 \text{ mm} \quad (4)$$

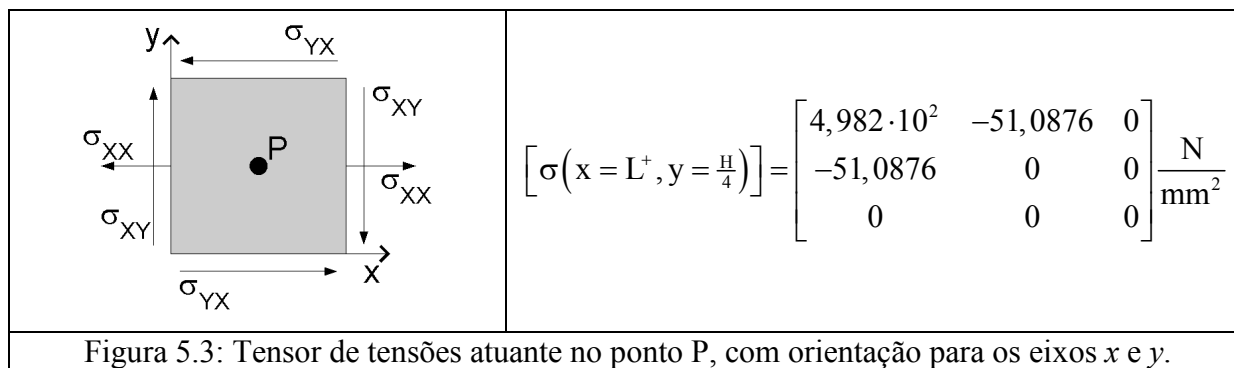
$$Q_{Zp}(y = +\frac{H}{4}) = 1,5383 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 \quad (5)$$

Tensões normais e de cisalhamento atuantes:

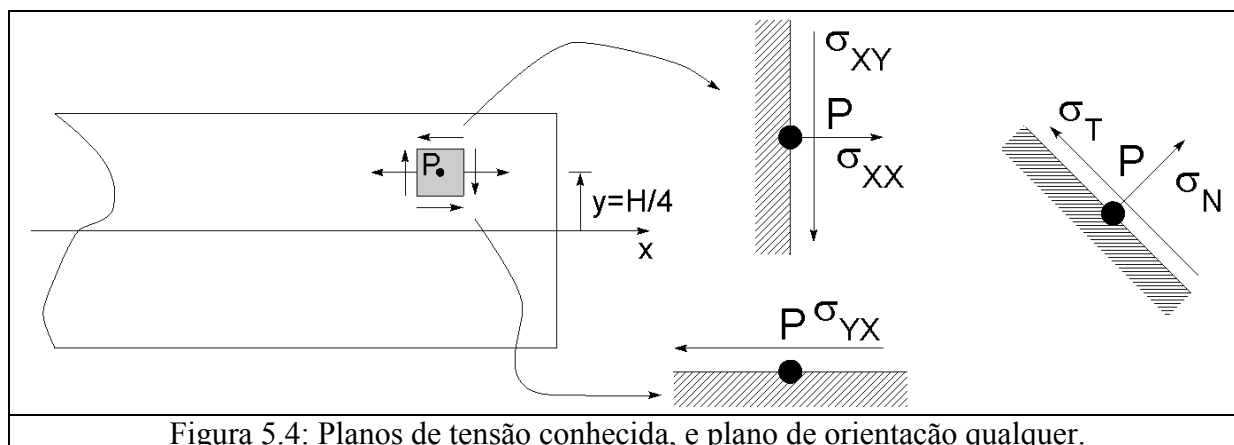
$$\text{De } \sigma_{XY}(x, y) = -\frac{Vy(x) Q_{Zp}(y)}{I_{ZZ}(x) B(y)}, \text{ tem-se } \sigma_{XY}(L, \frac{H}{4}) = -51,0876 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (6)$$

$$\text{De } \sigma_{XX}(x, y) = -\frac{Mz(x)}{I_{ZZ}(x)} y, \text{ tem-se } \sigma_{XX}(L, \frac{H}{4}) = 4,982 \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (7)$$

Assim, o estado de tensão no ponto  $P = (x = L^+, y = H/4^+)$  é dado por:



Assim, são conhecidas as tensões normal e de cisalhamento no ponto P em planos paralelos aos planos coordenados. É possível determinar as tensões atuantes no ponto P segundo um plano de orientação qualquer?



## 2. Análise de tensão

Dadas tensões  $\sigma_{XX}$ ,  $\sigma_{YY}$ ,  $\sigma_{XY}$  orientadas segundo os planos coordenados, como determinar as tensões  $\sigma_{XX}'$  (normal) e  $\sigma_{XY}'$  (tangencial) atuantes sobre um plano de orientação  $\theta$ ?



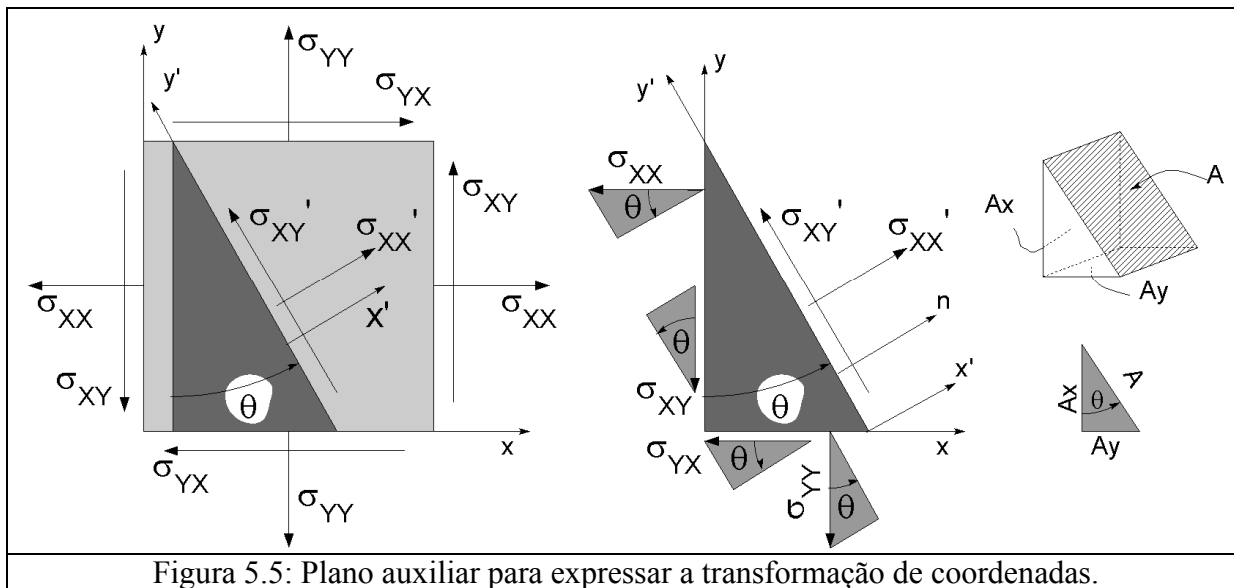


Figura 5.5: Plano auxiliar para expressar a transformação de coordenadas.

A partir das condições de equilíbrio das tensões no plano de orientação  $\theta$ , tem-se que:

$$\sum F_{x'} = 0 \text{ (somatória de forças em } x')$$

$$\sigma'_{xx} \cancel{X} - \sigma_{xx} \cos(\theta) \underbrace{A_x}_{X \cos(\theta)} - \sigma_{xy} \sin(\theta) \underbrace{A_x}_{X \cos(\theta)} - \sigma_{yx} \cos(\theta) \underbrace{A_y}_{X \sin(\theta)} - \sigma_{yy} \sin(\theta) \underbrace{A_y}_{X \sin(\theta)} = 0$$

$$\sigma'_{xx}(\theta) = \sigma_{xx} \cos^2(\theta) + \sigma_{yy} \sin^2(\theta) + 2\sigma_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) \tag{8}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \text{ (somatória de forças em } y')$$

$$\sigma'_{xy} \cancel{X} + \sigma_{xx} \sin(\theta) \underbrace{A_x}_{X \cos(\theta)} - \sigma_{xy} \cos(\theta) \underbrace{A_x}_{X \cos(\theta)} + \sigma_{yx} \sin(\theta) \underbrace{A_y}_{X \sin(\theta)} - \sigma_{yy} \cos(\theta) \underbrace{A_y}_{X \sin(\theta)} = 0$$

$$\sigma'_{xy}(\theta) = -\sigma_{xx} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sigma_{yy} \sin(\theta) \cos(\theta) - \sigma_{xy} [\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)] \tag{9}$$

As expressões de tensões normais e de cisalhamento nos planos  $x'$  e  $y'$  (Equações 8 e 9) completam um ciclo a cada  $\theta = 2\pi$  (Figura 5.6). Por outro lado, o tensor de tensões completa um ciclo a cada  $\theta = \pi$  (Figura 5.7). Dessa forma, para que as Equações 8 e 9 representem adequadamente o ciclo físico do tensor de tensões, o argumento  $\theta$  é trocado por  $2\theta$ .

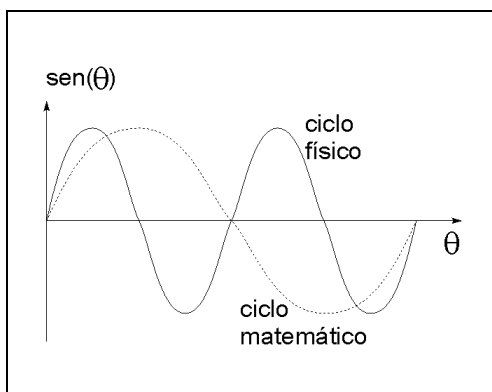


Figura 5.6: Ciclo matemático versus ciclo físico.

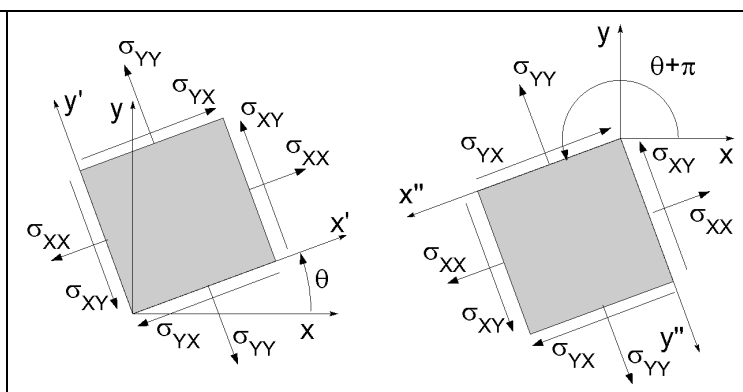


Figura 5.7: Ciclo físico do tensor de tensões.

Além disso, as seguintes transformações trigonométricas são possíveis:

$$\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta) \quad (10)$$

$$\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \quad (11)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad (12)$$

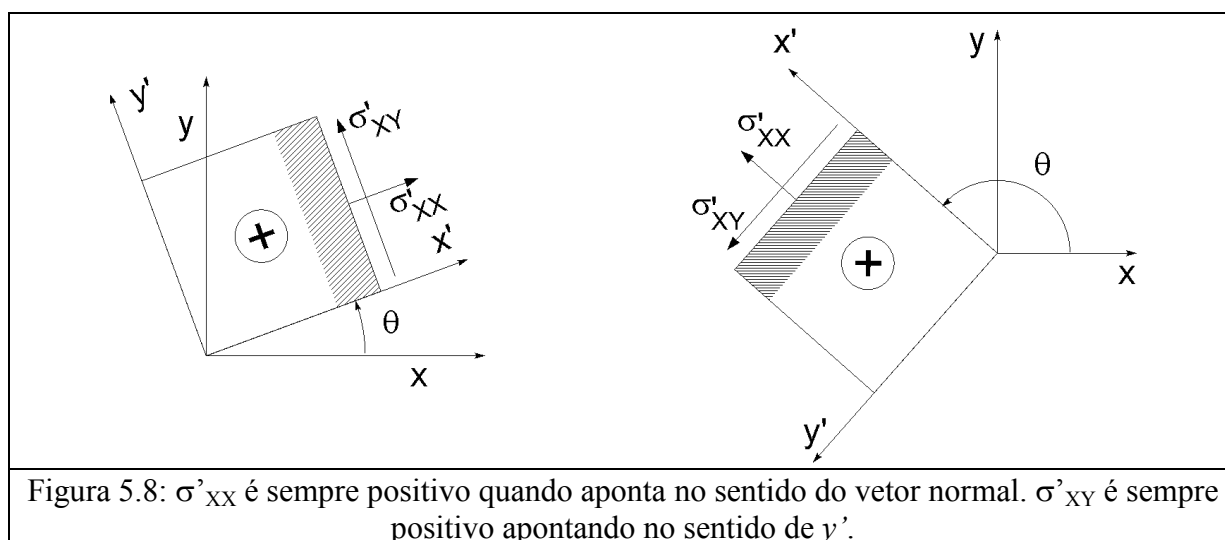
$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad (13)$$

Com isso, a expressão das tensões no plano de orientação  $\theta$  é simplificada para:

$$\sigma'_{xx}(2\theta) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos(2\theta) + \sigma_{xy}\sin(2\theta) \quad (14)$$

$$\sigma'_{xy}(2\theta) = -\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)\sin(2\theta) + \sigma_{xy}\cos(2\theta) \quad (15)$$

A dedução dessas expressões baseou-se na orientação de  $\sigma'_{xx}$  e  $\sigma'_{xy}$  mostrados na Figura 5.5. Assim, se a Equação 14 indicar um valor positivo para  $\sigma'_{xx}$ , isso significa que ela estará apontando no sentido do vetor normal ao plano  $x'$ . Se a Equação 15 indicar um valor positivo para  $\sigma'_{xy}$ , isso significa que ela estará apontando no sentido positivo de  $y'$ .



### 3. Planos principais de tensão

Denomina-se “planos principais” os planos nos quais a tensão normal é máxima. Isto é, são os planos posicionados em ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  tais que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sigma'_{xx}(\theta_1) = \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma'_{xx}(\theta_2) = 0$$

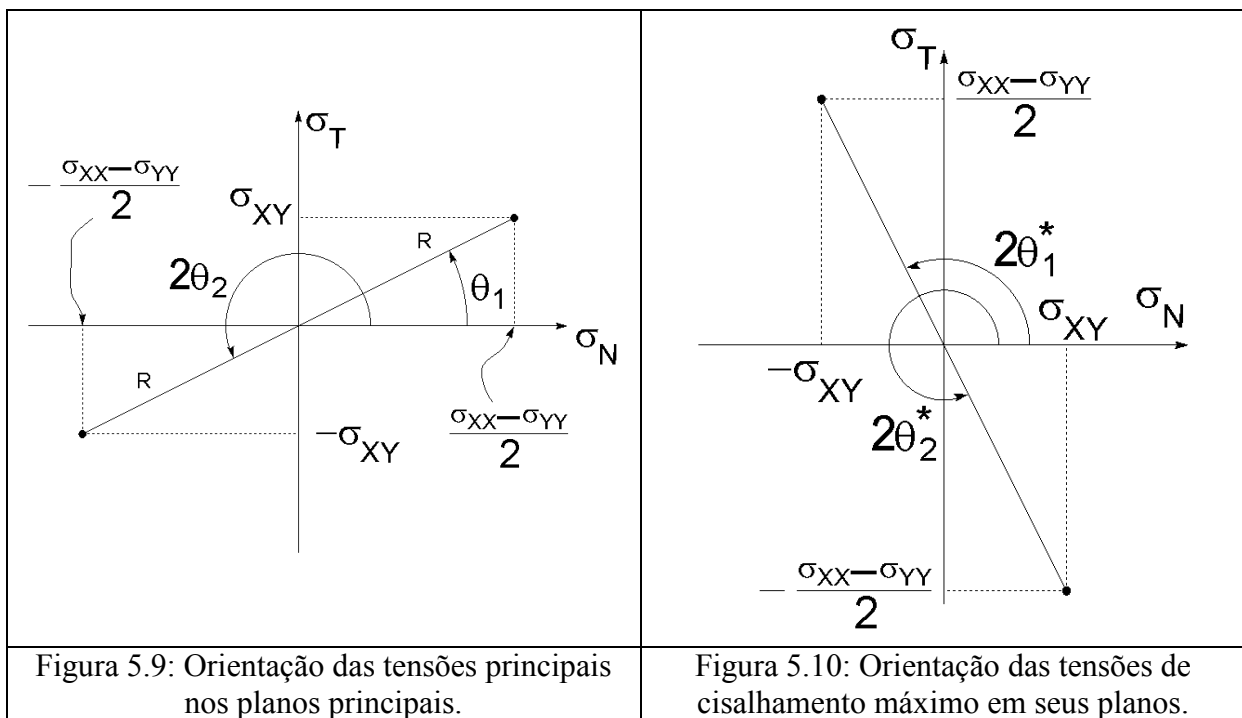
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma'_{xx}(\theta) &= \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) [-2 \sin(2\theta)] + \sigma_{xy} [2 \cos(2\theta)] = \\ &= -2 \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \sin(2\theta) + 2\sigma_{xy} \cos(2\theta) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \sin(2\theta) &= \sigma_{xy} \cos(2\theta) \\ \tan(2\theta) &= \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{\sigma_{xy}}{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)} \Rightarrow \therefore 2\theta_{1,2} = \tan^{-1} \left( \frac{\sigma_{xy}}{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Observe que a Equação 16 é igual à Equação 14. Isso significa que, no plano em que as tensões normais são máximas ou mínimas, as tensões de cisalhamento são nulas.

A Equação 16 permite determinar qual é o plano sobre o qual a tensão atuante *em um ponto* é máxima. Esta tensão não é necessariamente a máxima tensão atuando no corpo. O tensor de tensões tem uma expressão que varia com a coordenada  $(x, y)$  do ponto, além do ângulo de orientação do plano,  $\theta$ . A tensão máxima atuando no corpo seria determinada por:

$$\nabla \sigma'_{xx}(\theta, x, y) = \vec{0} \quad (18)$$



#### 4. Tensões principais

Tensões principais são as tensões normais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  atuantes nos planos principais  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Acompanhe seu desenvolvimento com a Figura 5.9:

$$\sin(2\theta_1) = \frac{\sigma_{xy}}{R} \text{ e } \cos(2\theta_1) = \frac{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)}{R}, \text{ com } R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (19)$$

$$\sigma_1 = \sigma'_{xx}(\theta_1) = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \underbrace{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \frac{1}{R}}_{\cos(2\theta_1)} + \sigma_{xy} \underbrace{\frac{\sigma_{xy}}{R}}_{\sin(2\theta_1)}$$

$$\sigma_1 = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) + \frac{1}{R} \underbrace{\left\{ \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2 \right\}}_{R^2} = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) + R \quad (20)$$

$$\text{Analogamente, } \sigma_2 = \sigma'_{xx}(\theta_2) = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) - R \quad (21)$$

## 5. Planos de cisalhamento máximo

Denomina-se “planos de cisalhamento máximo” os planos nos quais a tensão de cisalhamento é máxima. Isto é, são os planos posicionados em ângulos  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$  tais que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sigma'_{xy}(\theta_1^*) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sigma'_{xy}(\theta) = -2 \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \cos(2\theta^*) - 2\sigma_{xy} \sin(2\theta^*) = 0 \quad (22)$$

$$\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \cos(2\theta^*) = -\sigma_{xy} \sin(2\theta^*)$$

$$\tan(2\theta^*) = \frac{\sin(2\theta^*)}{\cos(2\theta^*)} = -\frac{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)}{\sigma_{xy}} \Rightarrow \therefore 2\theta_{1,2}^* = \tan^{-1} \left( -\frac{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)}{\sigma_{xy}} \right) \quad (23)$$

Note que a Equação 22 é igual à Equação 14, exceto pelo termo  $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$ . Isso significa que, no plano de cisalhamento máximo, a tensão normal não é necessariamente nula.

## 6. Tensões de cisalhamento máximo

Observe a Figura 5.11. Ela é uma superposição das Figuras 5.9 e 5.10. Veja que a relação entre os ângulos é  $2\theta_1^* = 2\theta_1 + 90^\circ \Rightarrow \theta_1^* = \theta_1 + 45^\circ$ . Isto é, os planos de cisalhamento máximo encontram-se a  $45^\circ$  dos planos principais.

Além disso, considere as seguintes transformações trigonométricas:

$$\sin(2\theta_1^*) = \sin(2\theta_1 + 90^\circ) = \cos(2\theta_1) = \frac{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)}{R} \quad (24a)$$

$$\cos(2\theta_1^*) = \cos(2\theta_1 + 90^\circ) = -\sin(2\theta_1) = -\frac{\sigma_{xy}}{R} \quad (24b)$$

$$\text{com } R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (24c)$$

Substituindo as Equações 24 na Equação 15, tem-se, portanto:

$$\begin{aligned} \sigma'_{XY}(2\theta_1^*) &= -\left(\frac{\sigma_{XX}-\sigma_{YY}}{2}\right)\sin(2\theta_1^*) + \sigma_{XY}\cos(2\theta_1^*) = \\ &= -\left(\frac{\sigma_{XX}-\sigma_{YY}}{2}\right)\left[\frac{\left(\frac{\sigma_{XX}-\sigma_{YY}}{2}\right)}{R}\right] + \sigma_{XY}\left[-\frac{\sigma_{XY}}{R}\right] = \\ &= -\frac{1}{R}\left\{\underbrace{\left(\frac{\sigma_{XX}-\sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2}_{R^2}\right\} = -R = \sigma_{XY\min} \end{aligned} \tag{25a}$$

Analogamente,

$$\sigma'_{XY}(2\theta_2^*) = R = \sigma_{XY\max} \tag{25b}$$

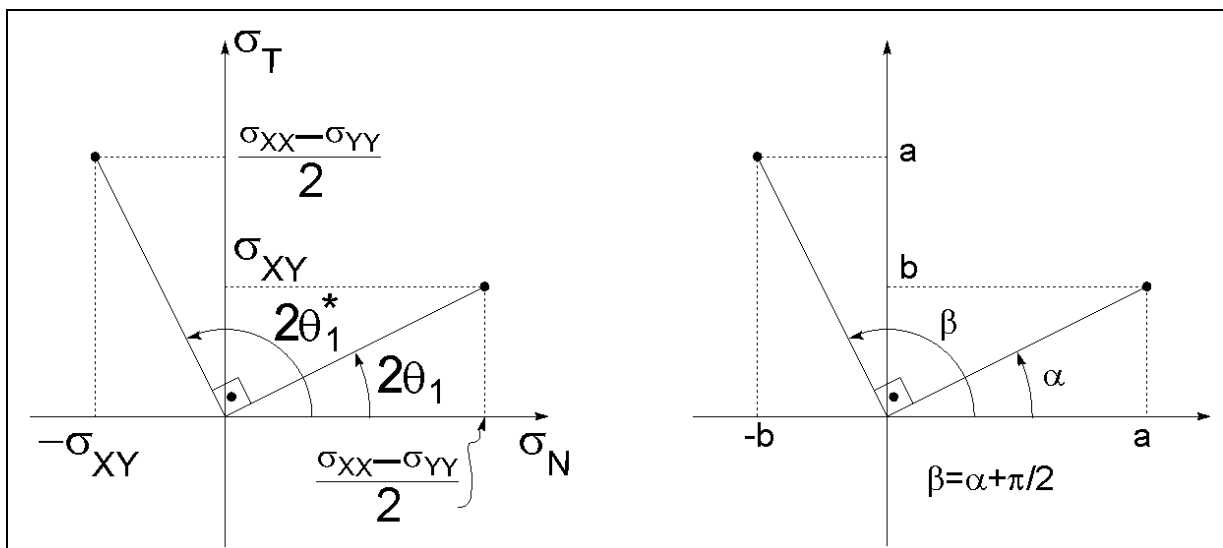


Figura 5.11: Relação entre os planos principais e de cisalhamento máximo.

### 7. Exemplo 1

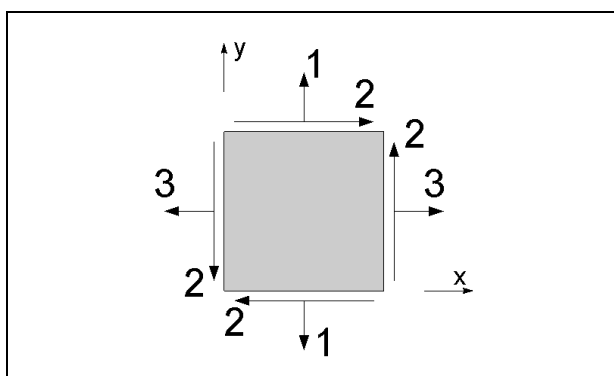


Figura 5.12: Estado de tensão em um ponto.

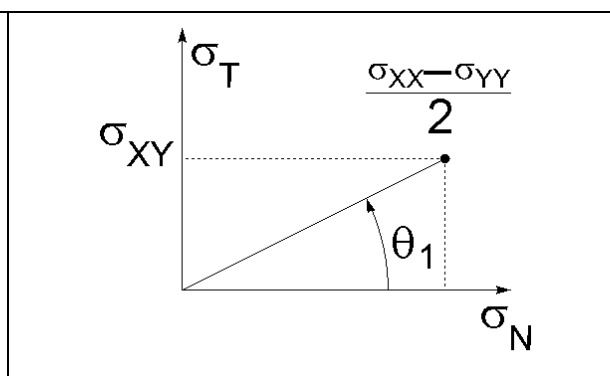


Figura 5.13: Parâmetros para calcular  $\theta_1$ .

Um determinado ponto de um material está sujeito ao estado de tensão mostrado na Figura 5.12. Determinar os planos principais de tensão, os planos de cisalhamento máximo e mostrar os valores de tensão nestes planos.

## 7.1 Planos e tensões principais

Do estado de tensão mostrado, tem-se que  $\sigma_{XX} = 3$ ,  $\sigma_{YY} = 1$  e  $\sigma_{XY} = \sigma_{YX} = 2$ . Com ajuda da Figura 5.13, a orientação do plano principal em relação ao plano atual é:

$$2\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\sigma_{XY}}{\left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{2}{\left( \frac{3-1}{2} \right)} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{2}{1} \right)$$

$$2\theta_1 = 63,434^\circ \Rightarrow \theta_1 = 31,717^\circ \quad (26)$$

A Figura 5.14 ilustra a posição do plano principal  $\theta_1$  e de seu correspondente  $\theta_2$ .

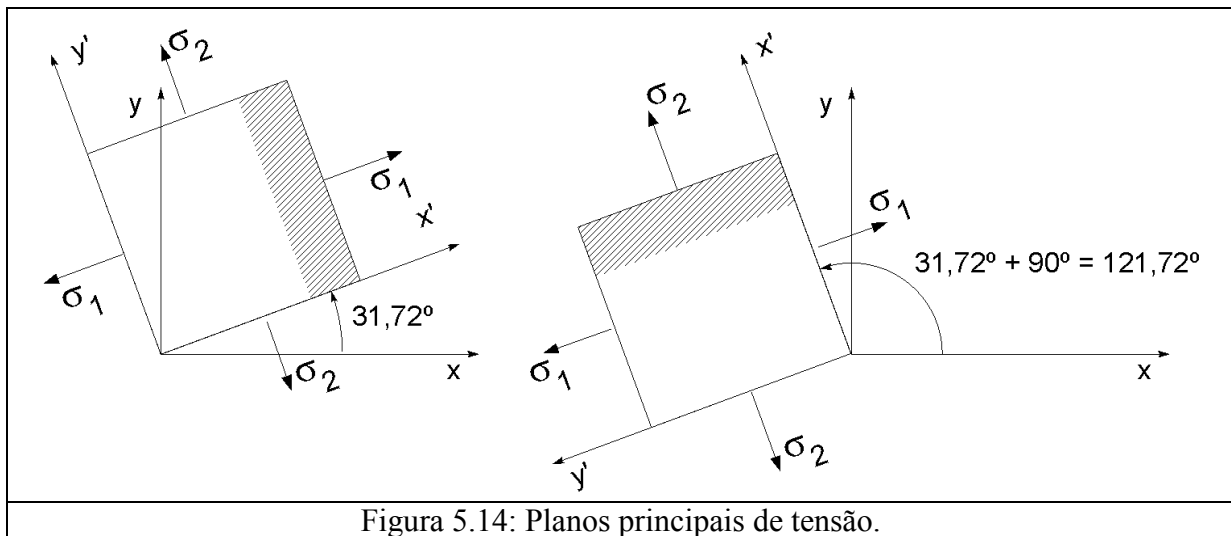


Figura 5.14: Planos principais de tensão.

O valor das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  nestes planos pode ser calculado pela Equação 14. As Equações 27 e 28 dão, respectivamente, a maior tensão de tração e de compressão atuantes no ponto.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} + \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \cos(2\theta_1) + \sigma_{XY} \sin(2\theta_1) =$$

$$= \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2} \cos(63,43^\circ) + 2 \sin(63,43^\circ) = 4,236 \quad (27)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} + \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \cos(2\theta_2) + \sigma_{XY} \sin(2\theta_2) =$$

$$= \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2} \cos(2 \cdot 121,72^\circ) + 2 \sin(2 \cdot 121,72^\circ) = -0,236 \quad (28)$$

## 7.2 Planos e tensões de cisalhamento máximo

Orientação do plano de cisalhamento máximo em relação ao plano atual:

$$2\theta_1^* = \tan^{-1} \left( \frac{-\left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)}{\sigma_{XY}} \right) = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) = -26,56^\circ \Rightarrow \theta_1^* = -13,28^\circ \quad (29)$$

Observe também que este plano tem uma diferença de 45° com o plano principal. A Figura 5.15 ilustra a posição do plano de cisalhamento máximo  $\theta^*_1$  e de seu correspondente  $\theta^*_2$ .

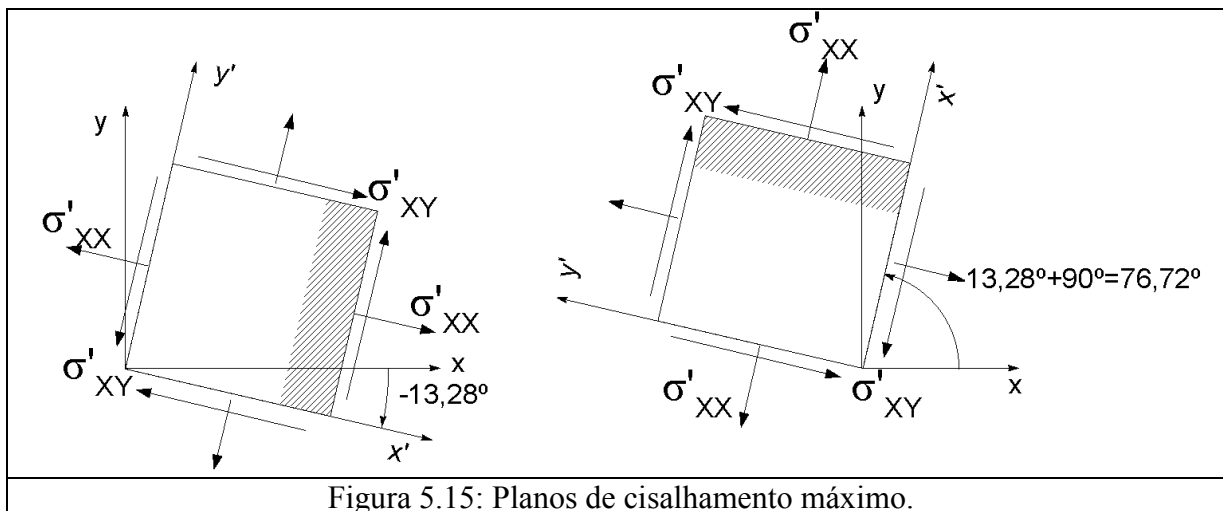


Figura 5.15: Planos de cisalhamento máximo.

O valor das tensões de cisalhamento máximo  $\sigma'_{XY}$  nestes planos pode ser calculado pela Equação 15. A Equação 31 dá também o valor das tensões normais atuando nestes planos. Como vimos na Seção 5, nos planos de cisalhamento máximo as tensões normais não são necessariamente nulas.

$$\begin{aligned} \sigma'_{XY}(\theta^*_1) &= \sigma_{XY\text{máx}} = -\frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} \sin(2\theta^*_1) + \sigma_{XY} \cos(2\theta^*_1) = \\ &= -\frac{3+1}{2} \sin(-2 \cdot 13,28^\circ) + 2 \cos(-2 \cdot 13,28^\circ) = 2,236 = -\sigma'_{XY}(\theta^*_2) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\sigma'_{XX}(\theta^*_1) = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} + \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \cos(2\theta^*_1) + \sigma_{XY} \sin(2\theta^*_1) = 2,0 = \sigma'_{XX}(\theta^*_2) \quad (31)$$

**8. Círculo de Mohr**

	<p>Observe o círculo genérico mostrado pela figura ao lado. Para um círculo como esse, a expressão do raio R é dada pela Geometria Analítica como:</p> $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ <p>Se o centro do círculo está disposto sobre o eixo x, isto é, se <math>y_0 = 0</math>, então:</p> $R^2 = (x - x_0)^2 + y^2$
--	--

Por outro lado, das Equações 14 e 15, tem-se:

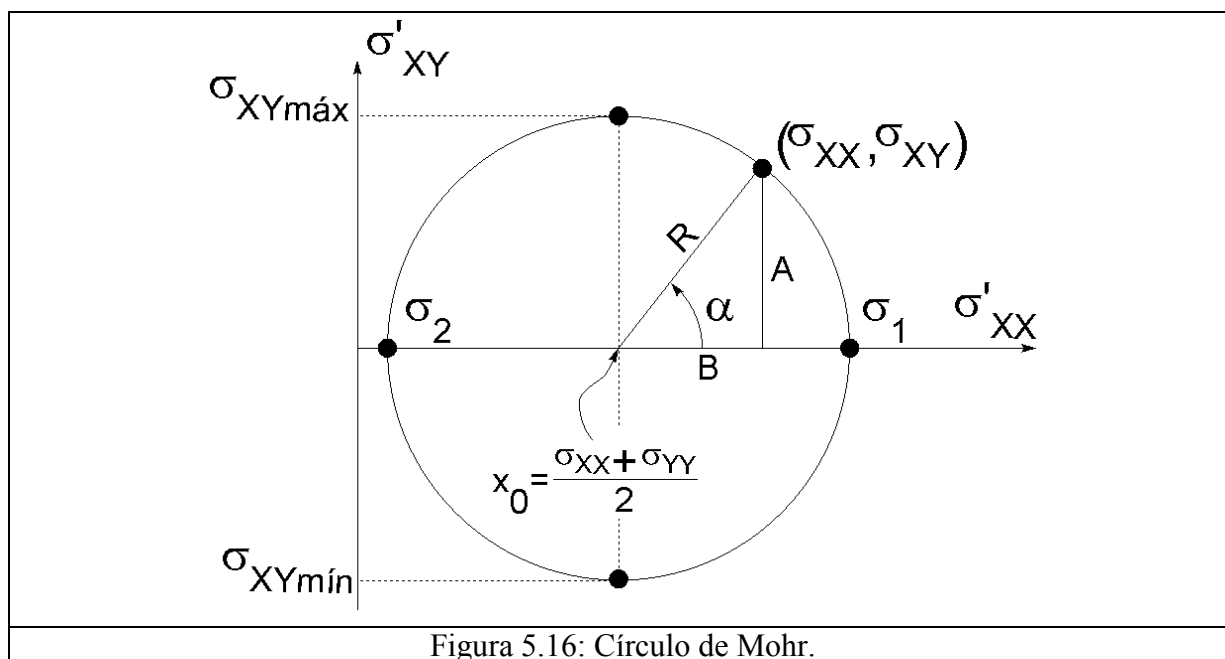
$$\sigma'_{XX} - \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{XY} \sin(2\theta) \quad (14)$$

$$\sigma'_{XY} = -\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right) \sin(2\theta) + \sigma_{XY} \cos(2\theta) \quad (15)$$

Fazendo (14)<sup>2</sup> + (15)<sup>2</sup>, tem-se:

$$\begin{aligned} \left[ \sigma'_{XX} - \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} \right]^2 + (\sigma'_{XY})^2 &= \left\{ \left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)^2 \cos^2(2\theta) + \sigma_{XY}^2 \sin^2(2\theta) + \right. \\ &+ 2\sigma_{XY} \sin(2\theta) \left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right) \cos(2\theta) \left. \right\} + \left\{ \left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)^2 \sin^2(2\theta) + \sigma_{XY}^2 \cos^2(2\theta) - \right. \\ &\left. - 2\sigma_{XY} \cos(2\theta) \left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right) \sin(2\theta) \right\} \\ \left[ \sigma'_{XX} - \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} \right]^2 + (\sigma'_{XY})^2 &= \left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)^2 \cos^2(2\theta) + \left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)^2 \sin^2(2\theta) + \\ \sigma_{XY}^2 \sin^2(2\theta) + \sigma_{XY}^2 \cos^2(2\theta) &= \left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)^2 + \sigma_{XY}^2 \\ \left[ \underbrace{\sigma'_{XX} - \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2}}_{(x-x_0)^2} \right]^2 + \underbrace{(\sigma'_{XY})^2}_{y^2} &= \underbrace{\left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)^2 + \sigma_{XY}^2}_{R^2} \end{aligned} \quad (32)$$

A Equação 32 representa a um círculo que relaciona um estado de tensão genérico ( $\sigma_{XX}$ ,  $\sigma_{YY}$ ,  $\sigma_{XY}$ ) com as tensões principais e de cisalhamento máximo. O ponto  $(x, y)$ , como no círculo da figura anterior, é definido pelas tensões  $\sigma_{XX}$  e  $\sigma_{XY}$  e o ponto  $x_0 = (\sigma_{XX} + \sigma_{YY})/2$  marca o centro do círculo sobre o eixo  $x$  (Figura 5.16).





Outros parâmetros do círculo:

$$A = \sigma_{XY} \text{ e } B = \sigma_{XX} - \left( \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} \right)$$

$$\therefore \tan(\alpha) = \frac{B}{A} = \frac{\sigma_{XY}}{\left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)} = \tan(2\theta_1) \Rightarrow \therefore \alpha = 2\theta_1 \quad (33)$$

$$\sigma_1 = x_0 + R \quad (34)$$

$$\sigma_2 = x_0 - R \quad (35)$$

$$\sigma_{XY\text{máx}} = +R \quad (36)$$

$$\sigma_{XY\text{mín}} = -R \quad (37)$$

## 9. Exemplo 2

Resolvendo novamente o exemplo da Seção 7 anterior pelo Círculo de Mohr. Com as tensões  $\sigma_{XX} = 3$ ,  $\sigma_{YY} = 1$  e  $\sigma_{XY} = \sigma_{YX} = 2$ , os parâmetros do círculo serão:

$$x_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = 2 \text{ e } R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \right)^2 + \sigma_{XY}^2} = 2,236$$

Tensões principais:

$$\sigma_1 = x_0 + R = 4,236 \text{ e } \sigma_2 = x_0 - R = -0,236.$$

Tensões de cisalhamento máximo:

$$\sigma_{XY\text{máx}} = +R = 2,236 \text{ e } \sigma_{XY\text{mín}} = -R = -2,236$$

## 10. Casos particulares do Círculo de Mohr: tração uniaxial

Da teoria técnica de barras, sabe-se que a única tensão atuante em um corpo sujeito a carregamento axial é a tensão normal na direção do eixo de carregamento. No exemplo da Figura 5.17, as tensões atuantes são, portanto:

$$\sigma_{XX} = \frac{F}{A}, \text{ com } \sigma_{YY} = \sigma_{YX} = \sigma_{ZZ} = \sigma_{XZ} = 0.$$

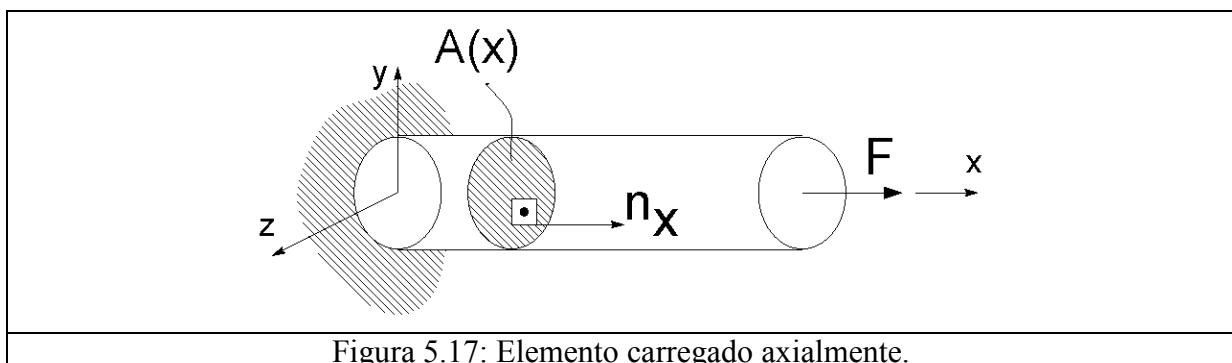


Figura 5.17: Elemento carregado axialmente.

Assim, o tensor de tensões em qualquer ponto do corpo será:

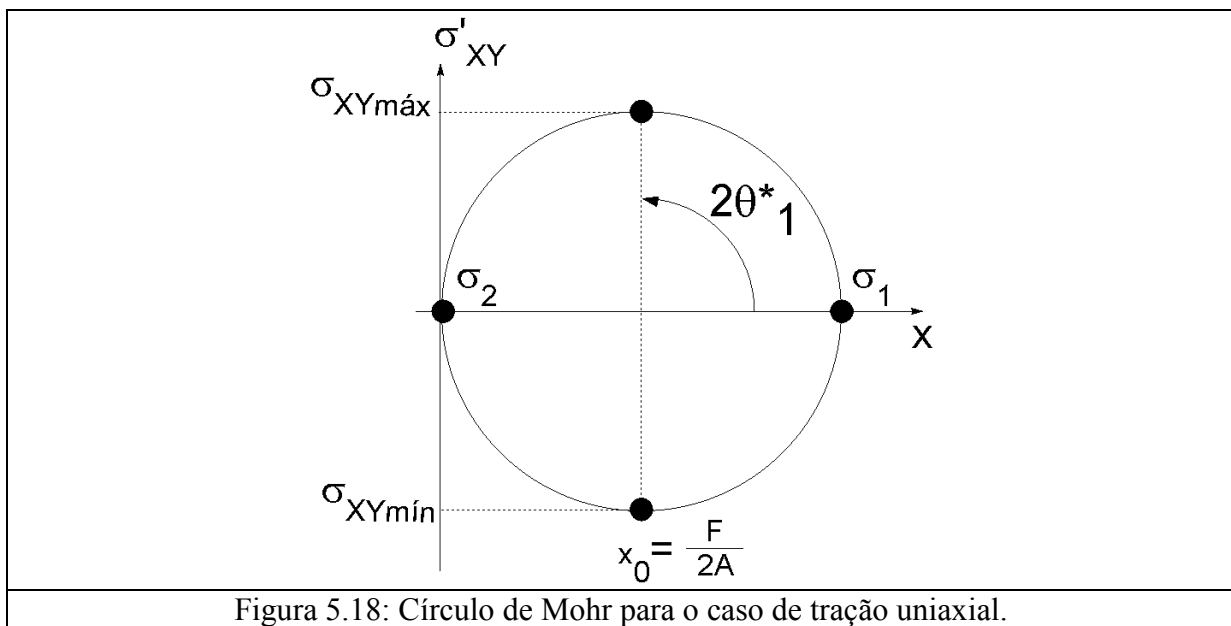
$$\sigma_{ij}(x) = \frac{F}{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

O Círculo de Mohr, portanto, será o mesmo para qualquer ponto desse corpo (Figura 5.18). Parâmetros do Círculo de Mohr:

$$x_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = \frac{\left(\frac{F}{A} + 0\right)}{2} = \frac{F}{2A}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2} = \sqrt{\left(\frac{\frac{F}{A} - 0}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{F}{2A}$$

$$\sigma_1 = x_0 + R = \frac{F}{A}; \quad \sigma_2 = x_0 - R = 0; \quad \sigma_{XY\text{máx}} = R = \frac{\sigma_{XX}}{2} = \frac{F}{2A}$$



Pela Figura 5.18, pode-se observar que em um ângulo  $\theta^*_1$  de  $45^\circ$  do eixo em que se aplica o carregamento, atua uma tensão normal que é apenas metade da tensão normal máxima  $\sigma_1$ . Por outro lado, neste mesmo plano atua a máxima tensão de cisalhamento presente no material,  $\sigma_{XY\text{máx}}$ , cujo valor é metade de  $\sigma_1$ .

### 11. Casos particulares do Círculo de Mohr: torção pura

Da teoria técnica de barras, sabe-se que a única tensão atuante em um corpo sujeito a torção pura é a tensão de cisalhamento no plano ortogonal ao eixo de carregamento. No exemplo da Figura 5.19, as tensões atuantes são, portanto:

$$\sigma_{XY}(r) = -\tau(r) = + \frac{Mx(x) \cdot r}{J_p} \quad \text{e} \quad \sigma_{YY} = \sigma_{YZ} = \sigma_{XX} = \sigma_{ZZ} = \sigma_{XZ} = 0.$$

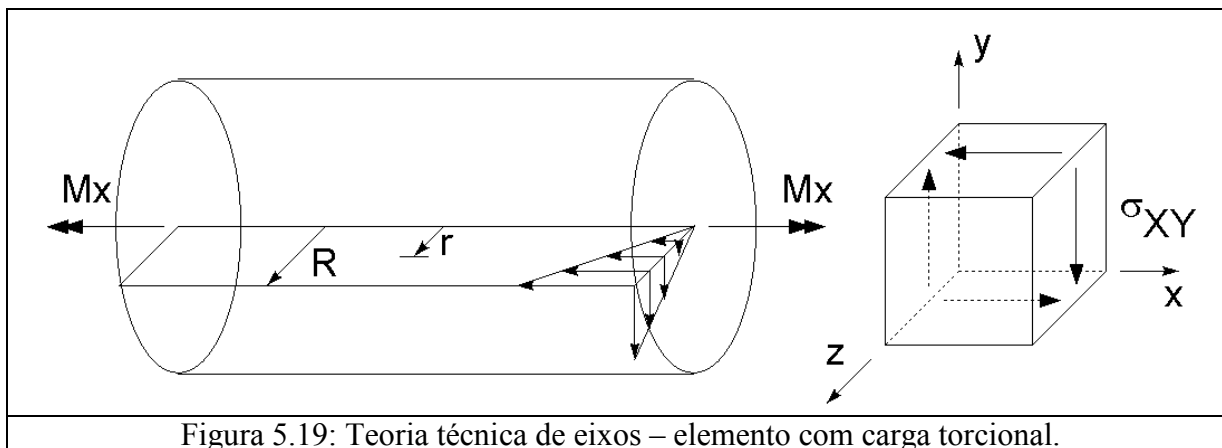


Figura 5.19: Teoria técnica de eixos – elemento com carga torcional.

Assim, o tensor de tensões em qualquer ponto do corpo será:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_{XY}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

O Círculo de Mohr de um ponto P neste corpo variará em função da distância de P ao eixo  $x$ , mas não será função da posição  $x$ . Parâmetros do Círculo de Mohr (Figura 5.20):

$$x_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = 0$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2} = |\sigma_{XY}(\mathbf{r})| = |\tau(\mathbf{r})|$$

$$\sigma_1 = x_0 + R = \frac{F}{A}; \quad \sigma_2 = x_0 - R = 0; \quad \sigma_{XY\text{máx}} = R = \frac{\sigma_{XX}}{2} = \frac{F}{2A}$$

$$\sigma_1 = x_0 + R = \sigma_{XY}; \quad \sigma_2 = x_0 - R = -\sigma_{XY}; \quad \sigma_{XY\text{máx}} = R = \sigma_{XY}$$

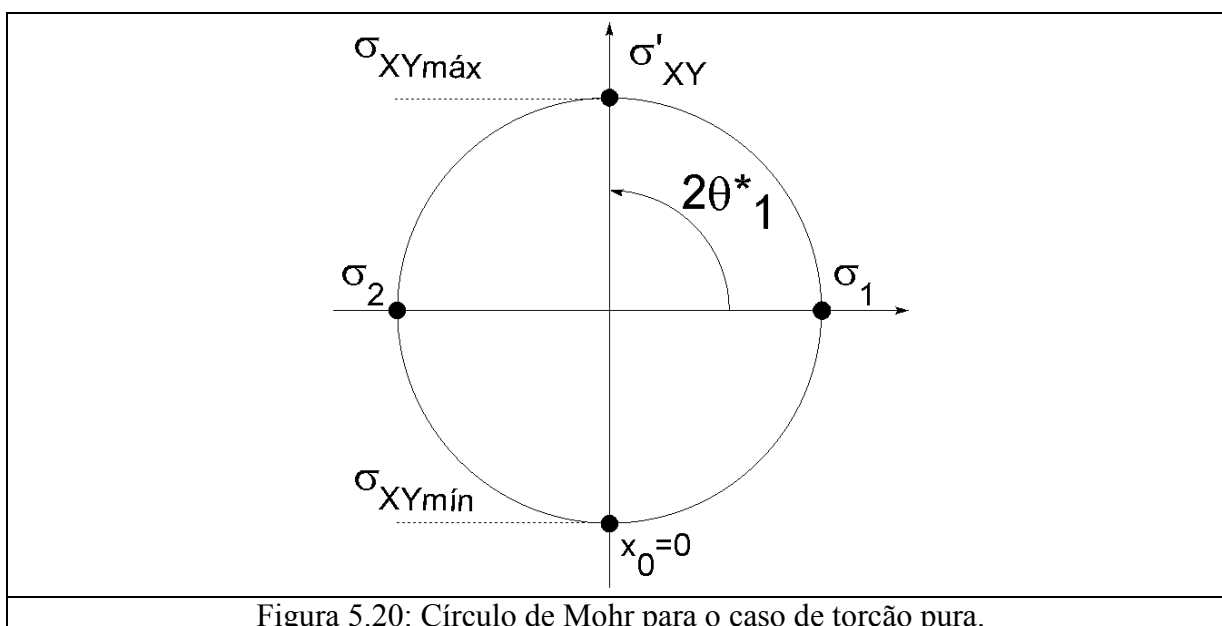


Figura 5.20: Círculo de Mohr para o caso de torção pura.

## 12. Círculo de Mohr tridimensional

Considere o estado de tensões generalizado mostrado na Figura 5.21. Neste estado de tensões, tem-se um plano A sujeito às tensões normais  $\sigma_{XX}$  e  $\sigma_{YY}$ , e às tensões de cisalhamento  $\sigma_{XY}$ . Já desenvolvemos anteriormente o Círculo de Mohr para este plano, que tem tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Neste caso, o cálculo de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  envolve as tensões em  $x$  e em  $y$ . As rotações que fazemos de  $\theta$  para determinar os planos principais são feitas em torno do eixo  $z$ . Os planos principais têm orientação  $\theta_{1,2}$ .

Observe agora o plano B, sujeito às tensões normais  $\sigma_{XX}$  e  $\sigma_{ZZ}$ , e às tensões de cisalhamento  $\sigma_{XZ}$ . Chamaremos as tensões principais deste plano de  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , em que  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  envolvem as tensões em  $x$  e em  $z$ . As rotações que fazemos de  $\varphi$  para determinar os planos principais são feitas em torno do eixo  $y$ . Os planos principais têm orientação  $\varphi_{1,2}$ .

Por fim, no plano C, sujeito às tensões normais  $\sigma_{YY}$  e  $\sigma_{ZZ}$  e às tensões de cisalhamento  $\sigma_{YZ}$ , tem-se as tensões principais  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , em que  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  envolvem as tensões em  $y$  e em  $z$ . As rotações que fazemos de  $\psi$  para determinar os planos principais são feitas em torno do eixo  $x$ . Os planos principais têm orientação  $\psi_{1,2}$ .

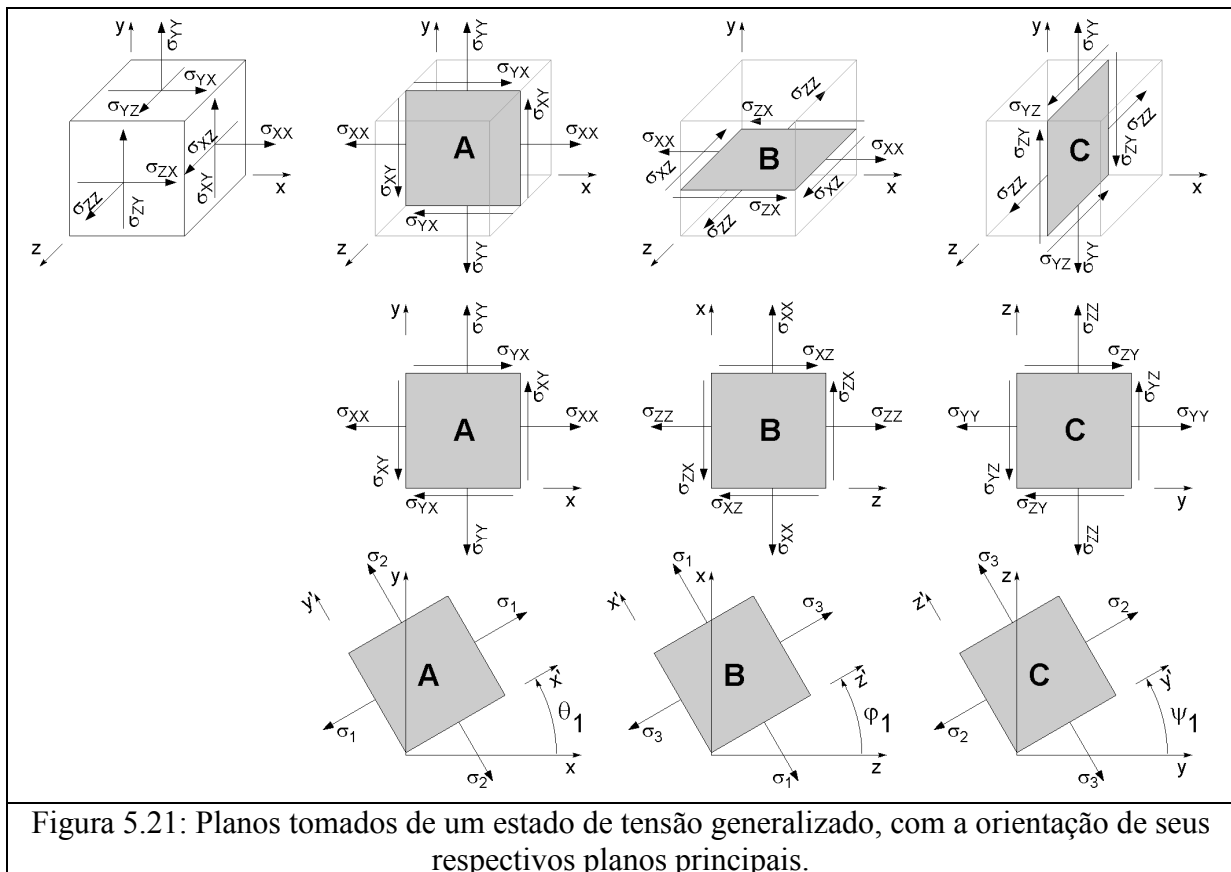
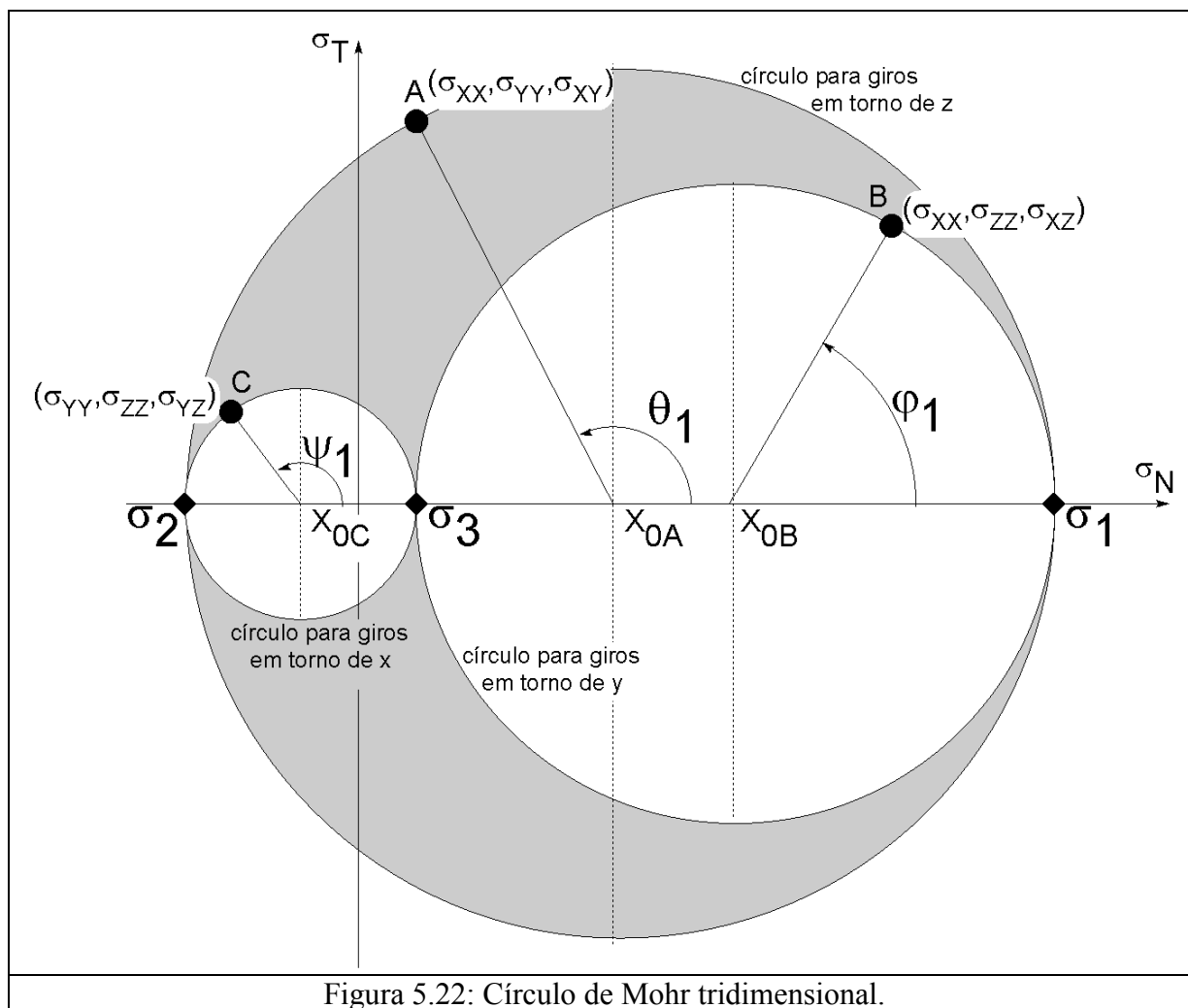


Figura 5.21: Planos tomados de um estado de tensão generalizado, com a orientação de seus respectivos planos principais.

A Figura 5.22 mostra simultaneamente o Círculo de Mohr para estes três planos, com as respectivas orientações dos planos principais em cada caso.

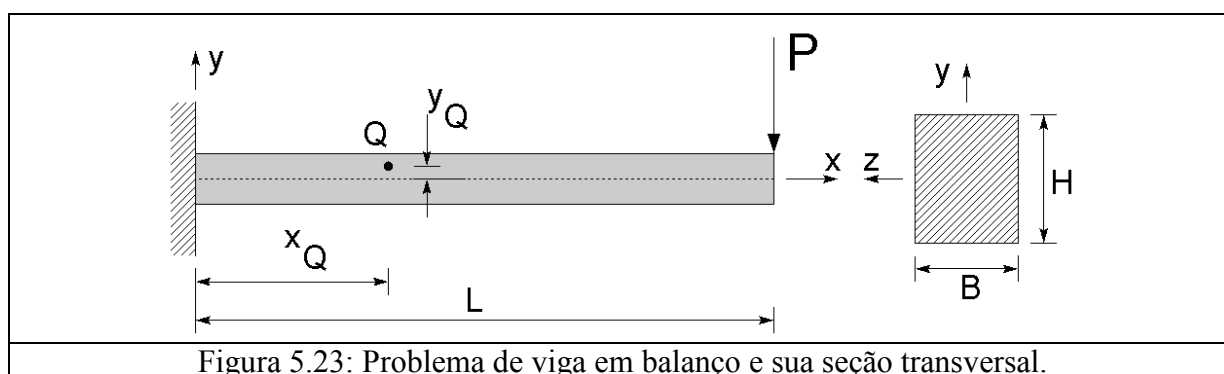
Esta figura é o Círculo de Mohr para o estado generalizado de tensões, ou também “Círculo de Mohr tridimensional”. Qualquer combinação de tensões de qualquer dos planos A, B ou C estará sobre uma das três circunferências mostradas, caso os ângulos  $\theta$ ,  $\varphi$  ou  $\psi$  correspondam a giros ortogonais em torno dos eixos coordenados. Qualquer outra combinação de tensões no estado tridimensional, em um plano de orientação arbitrária  $\zeta$ , estará situada na área escura entre os círculos.



### 13. Exemplo 3

Dada a viga mostrada na Figura 5.23, determinar o Círculo de Mohr do ponto Q de coordenadas  $(x_Q, y_Q)$ , as tensões e planos principais e de cisalhamento máximo.

**Dados:**  $H = 250 \text{ mm}$ ,  $B = 100 \text{ mm}$ ,  $L = 3 \text{ m}$ ,  $P = 1500 \text{ N}$ ,  $x_Q = 1 \text{ m}$  e  $y_Q = 60 \text{ mm}$ .



#### 13.1 Roteiro da solução

1. Determinar os esforços internos atuantes em Q, porque  $\sigma_{xx}(x_Q, y_Q)$  depende do momento fletor no ponto, e  $\sigma_{xy}(x_Q, y_Q)$  depende do esforço cortante no ponto;

- Determinar as propriedades geométricas  $I_{ZZT}$  e  $Q_{Zp}(y_Q)$ , para determinar as tensões  $\sigma_{XX}$  e  $\sigma_{XY}$ ;
- Desenhar o círculo de Mohr, determinando  $x_0$  e  $R$  a partir de  $\sigma_{XX}$  e  $\sigma_{XY}$ .

### 13.2 Solução

#### 1. Esforços internos:

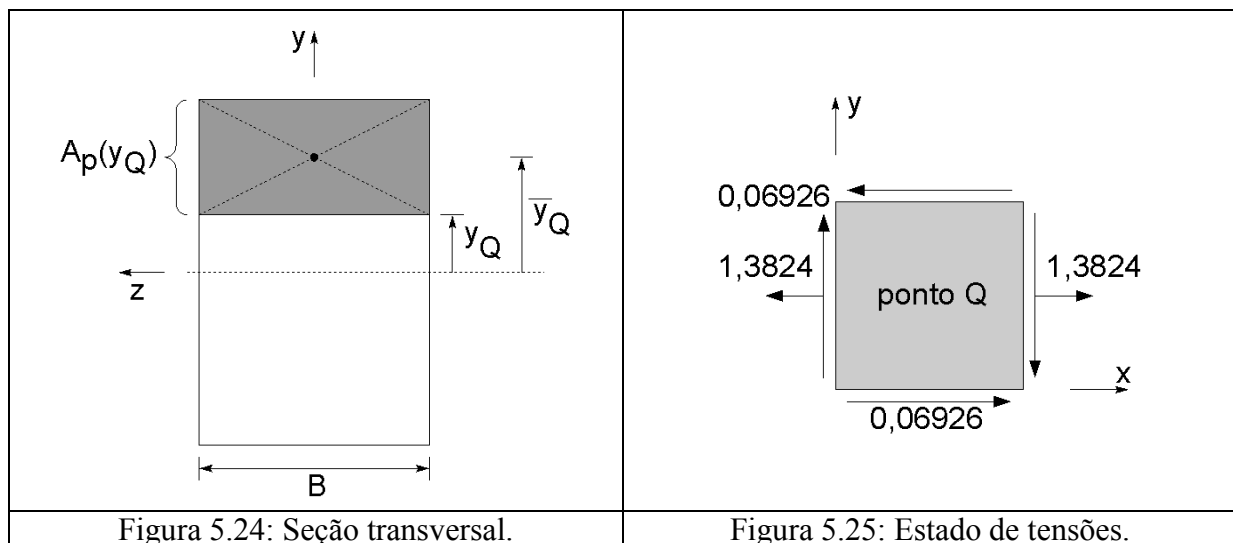
$$\begin{aligned}
 V_y(x) &= P \quad \Rightarrow V_y(x_Q) = 1500 \text{ N} \\
 M_z(x) &= -P(L-x) \Rightarrow M_z(x_Q) = -3 \cdot 10^6 \text{ Nmm}
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

#### 2. Propriedades geométricas:

Com ajuda da Figura 5.24, as propriedades geométricas da seção transversal são:

$$I_{ZZT} = \frac{1}{12} BH^3 = \frac{1}{12} (100 \text{ mm})(250 \text{ mm})^3 = 1,3021 \cdot 10^8 \text{ mm}^4
 \tag{41}$$

$$Q_{Zp}(y_Q) = \bar{y}_Q A_p(y_Q) = \underbrace{\left( y_Q + \frac{\frac{H}{2} - y_Q}{2} \right)}_{\bar{y}_Q} \underbrace{\left[ \left( \frac{H}{2} - y_Q \right) B \right]}_{A_p(y_Q)} = 6,0125 \cdot 10^5 \text{ mm}^3
 \tag{42}$$



#### 3. Estado de tensão

Assim, o tensor de tensões atuante no ponto Q (Figura 5.25) pode ser determinado:

$$\sigma_{XX}(x_Q, y_Q) = -\frac{M_z(x_Q)}{I_{ZZ}(x_Q)} y_Q = 1,3824 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
 \tag{43}$$

$$\sigma_{XY}(x_Q, y_Q) = -\frac{V_y(x_Q)}{I_{ZZ}(x_Q)} \frac{Q_{Zp}(y_Q)}{B(y_Q)} = -0,06926 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
 \tag{44}$$

$$\sigma_{YY}(x_Q, y_Q) = 0
 \tag{45}$$

4. *Círculo de Mohr*

Os parâmetros deste Círculo de Mohr (Figura 5.26) são:

$$x_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = 0,6912 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (46)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2} = 0,6947 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (47)$$

$$\sigma_1 = x_0 + R = 1,3859 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (48)$$

$$\sigma_2 = x_0 - R = -0,0035 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (49)$$

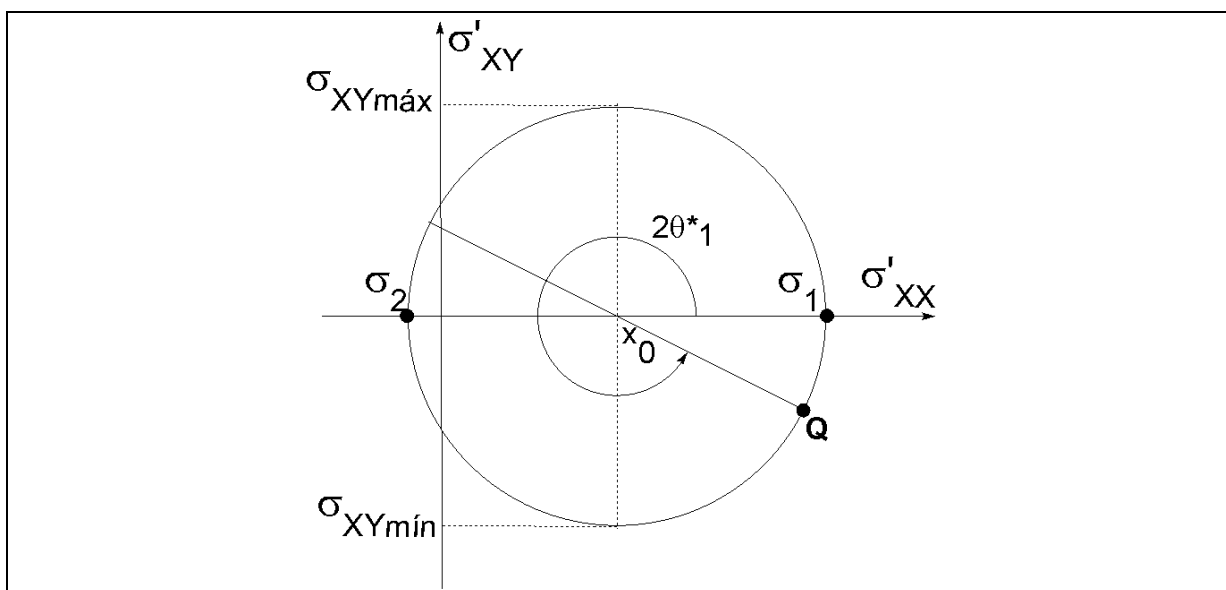


Figura 5.26: Círculo de Mohr do ponto Q.

## 14. Exercício proposto

Para a placa abaixo, determinar o estado de tensões, desenhar o Círculo de Mohr e determinar as tensões atuantes nas diagonais da peça.

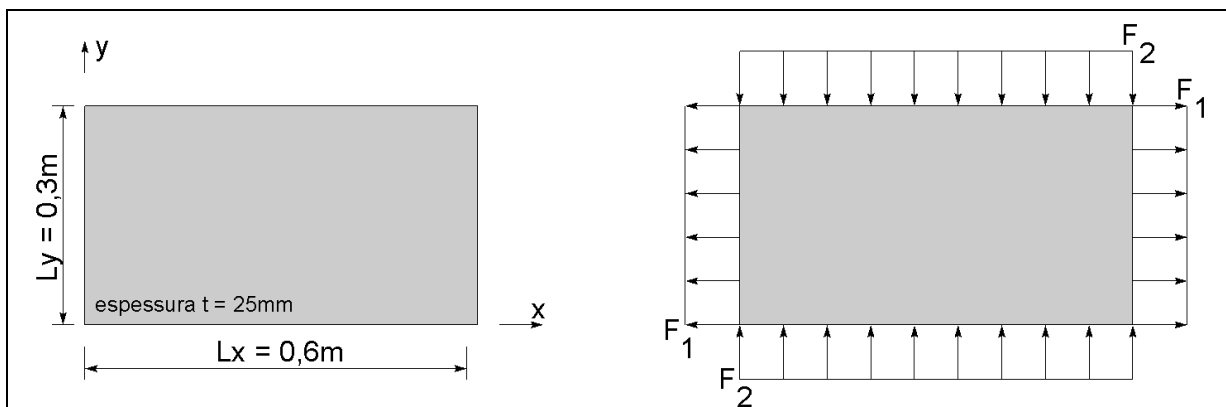


Figura 5.27: Placa com estado homogêneo de tensões, com  $F_1 = 9 \text{ kN}$  e  $F_2 = 2,25 \text{ kN}$ .

# CAPÍTULO X

## PARTE B – CRITÉRIOS DE FALHA

### 1. Introdução

O propósito dos critérios de falha é estimar a falha de componentes mecânicos sob solitação estática. Um considerável número de critérios pode ser encontrado na literatura. Neste curso, discutiremos os três principais critérios, que são aplicáveis a materiais isotrópicos.

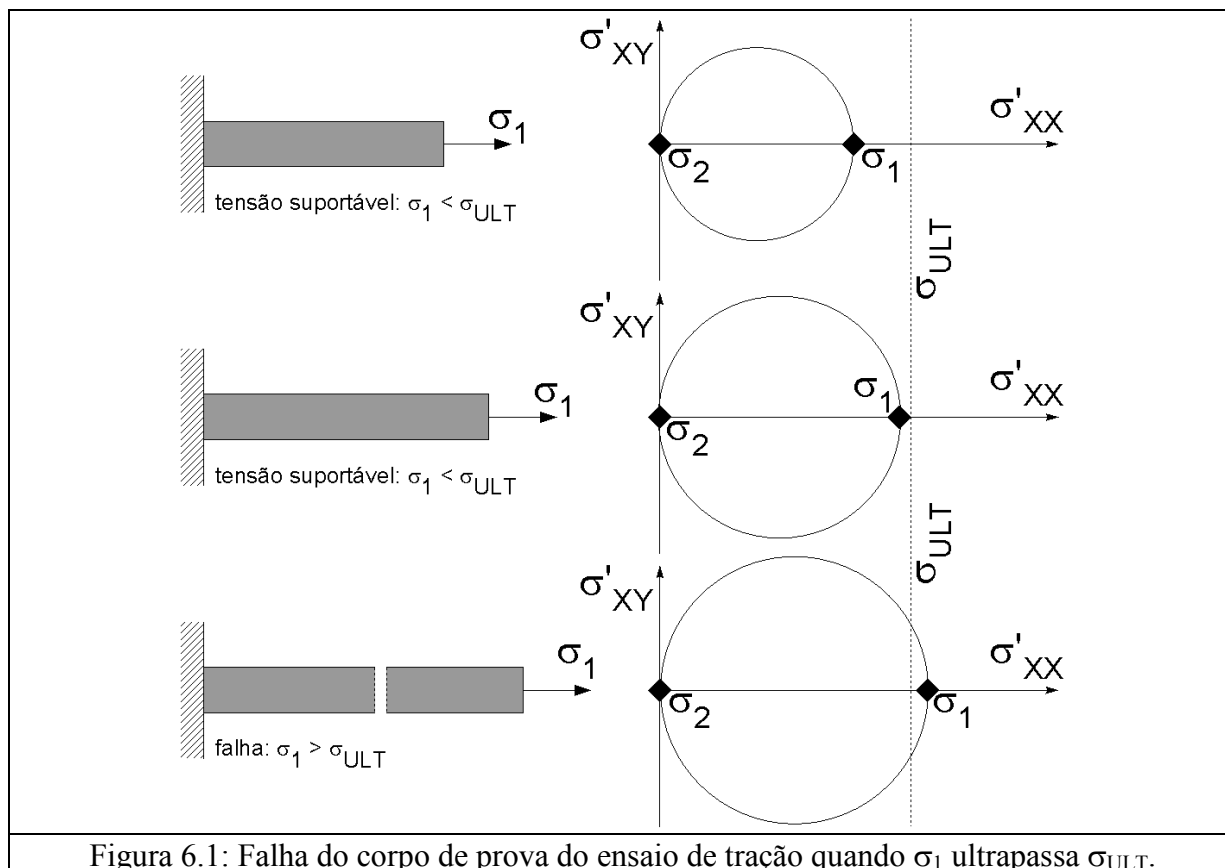
O critério de falha aplicável a um corpo depende do tipo do material (dúctil ou frágil). Os critérios aplicáveis a materiais frágeis em geral não se aplicam a materiais dúcteis e vice-versa.

### 2. Critério de Rankine

O Critério de Rankine (ou da *máxima tensão normal*) diz que a falha de um material ocorre quando uma das tensões principais atinge a máxima tensão de tração ou compressão que o material é capaz de suportar,  $\sigma_{ULT}$ .

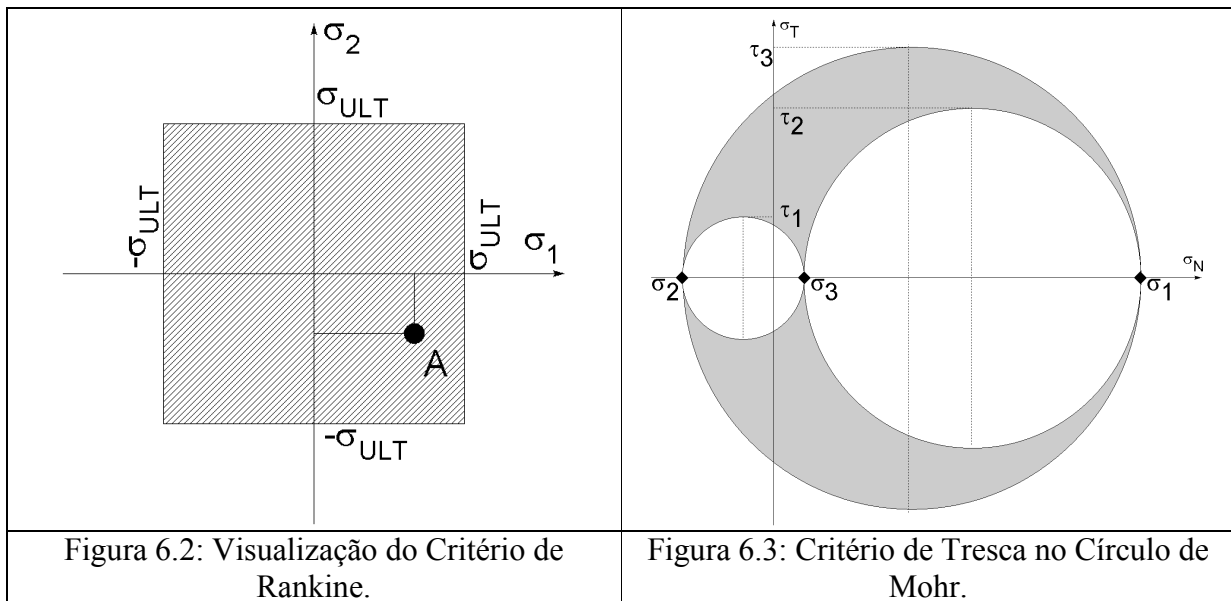
A tensão máxima de falha,  $\sigma_{ULT}$ , é determinada por meio de ensaios de tração. Uma carga crescente é aplicada ao material até que a “falha” ocorra (o material começa a escoar ou o material se rompe repentinamente). A última tensão aplicada é chamada de  $\sigma_{ULT}$  (Figura 6.1).

Tem-se observado que o Critério de Rankine é um bom critério para prever a falha de materiais frágeis, como o ferro fundido, giz, cerâmica, etc.





A Figura 6.2 mostra uma visualização gráfica do critério para um caso plano de tensões, com  $\sigma_3 = 0$ . Segundo o Critério de Rankine, qualquer combinação de tensões  $A = (\sigma_1, \sigma_2)$  dentro da área hachurada não induz falha.



### 3. Critério de Tresca

Em ensaios de tração realizados com materiais dúcteis, não se observa a falha perpendicular vista em materiais frágeis. Em vez disso, uma falha a  $45^\circ$  do plano de carga começa a ocorrer devido ao escorregamento dos planos cristalinos. Observando o Círculo de Mohr para o caso de tração uniaxial (Figura 6.4), a  $45^\circ$  a tensão de tração é apenas metade da tensão máxima, mas a tensão de cisalhamento é máxima. Assim, conclui-se que a falha, neste caso, está ocorrendo porque a máxima tensão de cisalhamento suportada pelo material foi atingida.

O critério da *máxima tensão de cisalhamento*, também conhecido como Critério de Tresca e Critério de Guest, afirma que, ao ser submetido a um estado de tensões generalizado, o material falhará sempre que:

$$\tau_i > \frac{1}{2} \sigma_{ULT} \quad (1)$$

em que (Figura 6.3):

$$\tau_1 = \pm \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right), \tau_2 = \pm \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \text{ e } \tau_3 = \pm \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \quad (2)$$

Assim, a falha ocorre sempre que:

$$\begin{aligned} \pm(\sigma_2 - \sigma_3) &= \sigma_{ULT} \\ \pm(\sigma_1 - \sigma_3) &= \sigma_{ULT} \\ \pm(\sigma_1 - \sigma_2) &= \sigma_{ULT} \end{aligned} \quad (3)$$

Embora o critério envolva somente tensões normais, diz respeito à falha que o material sofre por ser incapaz de resistir a uma tensão de cisalhamento.

Pelas hipóteses sob as quais foi deduzido, o Critério de Tresca é um bom critério para prever a falha de materiais dúcteis, como aço carbono, cobre, ouro, alumínio, etc.

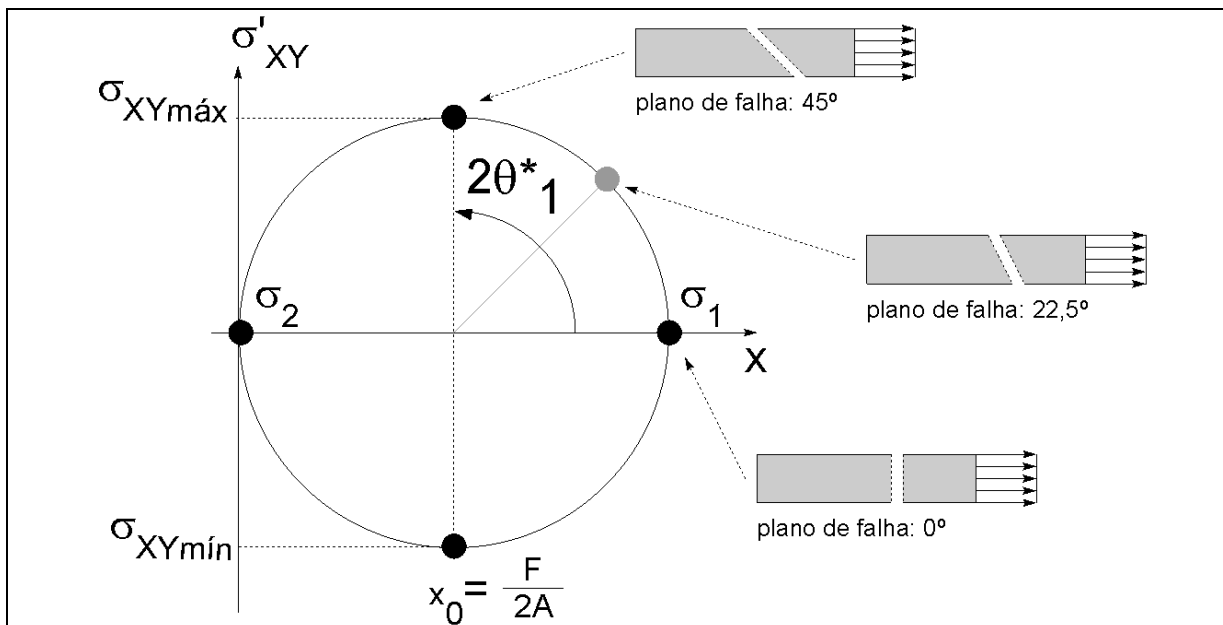


Figura 6.4: Círculo de Mohr na tração uniaxial.

Observemos as expressões do Critério de Tresca no estado plano de tensão, isto é, com  $\sigma_3 = 0$  (Figura 6.5).

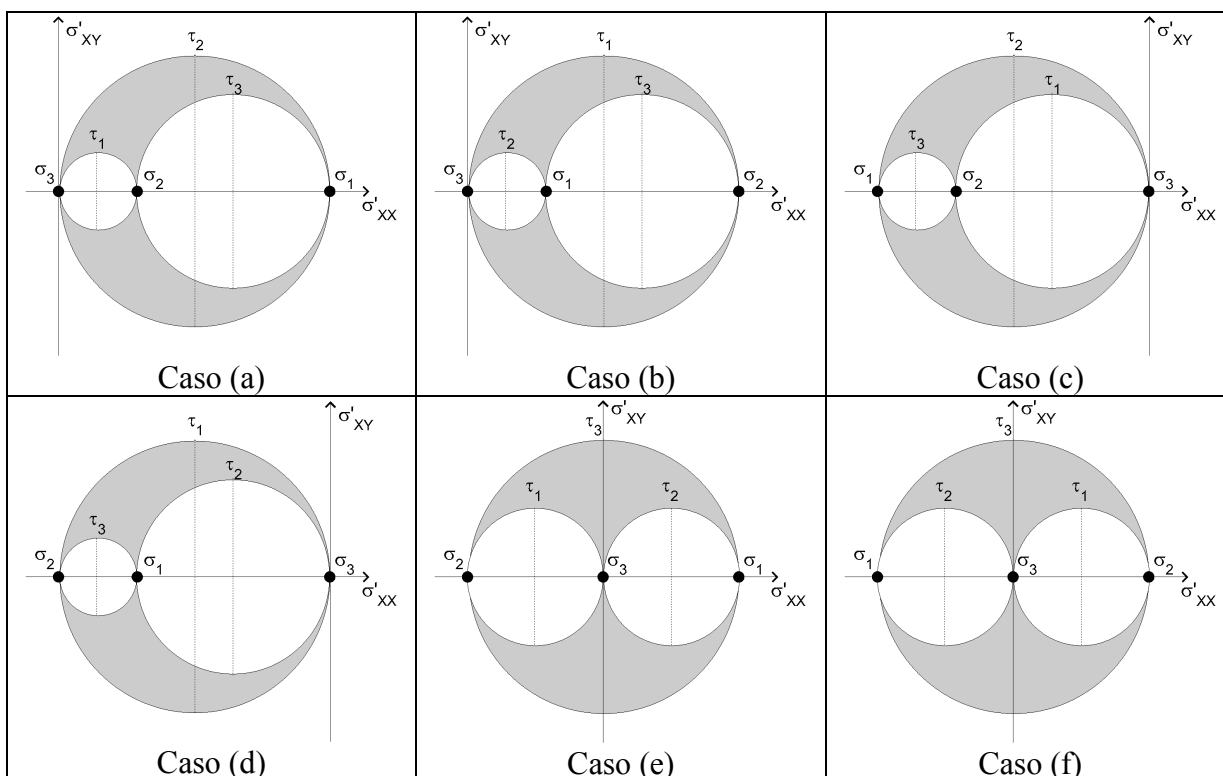


Figura 6.5: Casos particulares de tensão.

No caso (a), em que  $\sigma_3 = 0$  e  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ , a máxima tensão de cisalhamento atuante é dada pela Equação 4a. Portando, neste caso  $\sigma_1 = \sigma_{ULT}$  causa falha.

$\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{ULT}}{2}$ (4a)	$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{ULT}}{2}$ (4b)	$\tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_{ULT}}{2}$ (4c)
$\tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{ULT}}{2}$ (4d)	$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{ULT}}{2}$ (4e)	$\tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_{ULT}}{2}$ (4f)

No caso (b), em que  $\sigma_3 = 0$  e  $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ , a máxima tensão de cisalhamento atuante é dada pela Equação 4b. Portando, neste caso  $\sigma_2 = \sigma_{ULT}$  causa falha.

No caso (c), em que  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 < 0$ ,  $\sigma_2 < 0$  e  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ , a máxima tensão de cisalhamento atuante é dada pela Equação 3c. Portando, neste caso  $\sigma_1 = \sigma_{ULT}$  causa falha.

No caso (d), em que  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 < 0$ ,  $\sigma_2 < 0$  e  $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ , a máxima tensão de cisalhamento atuante é dada pela Equação 4d. Portando, neste caso  $\sigma_2 = \sigma_{ULT}$  causa falha.

No caso (e), em que  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 > 0$  e  $\sigma_2 < 0$ , a máxima tensão de cisalhamento atuante é dada pela Equação 4e. Portando, neste caso  $(\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_{ULT}$  causa falha.

No caso (f), em que  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 < 0$  e  $\sigma_2 > 0$ , a máxima tensão de cisalhamento atuante é dada pela Equação 4f. Portando, neste caso  $(\sigma_2 - \sigma_1) = \sigma_{ULT}$  causa falha.

A Figura 6.6 mostra uma visualização gráfica do critério para um caso plano de tensões, com  $\sigma_3 = 0$ . Segundo o Critério de Tresca, qualquer combinação de tensões  $A = (\sigma_1, \sigma_2)$  dentro da área hachurada não induz falha.

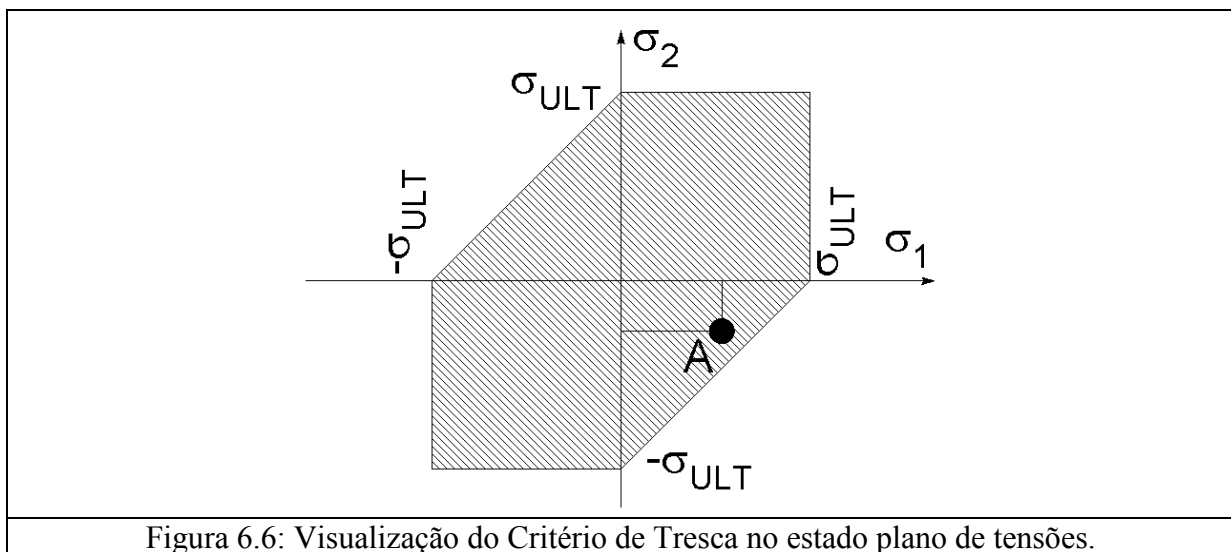


Figura 6.6: Visualização do Critério de Tresca no estado plano de tensões.

#### 4. Energia de deformação de um sólido

Segundo o Princípio de Conservação de Energia, o trabalho que uma força externa realiza sobre um corpo deformável (Equação 5, Figura 6.7) é armazenado no corpo na forma de energia de deformação (Equação 6).

$$W = \int_0^{\Delta U} F dU = \frac{1}{2} F \Delta U \quad (5)$$

$$U = \frac{1}{2} F \Delta U \quad (6)$$

A densidade de energia de deformação é a relação entre a energia de deformação armazenada e o volume do corpo. Para o caso de tração uniaxial mostrado na Figura 6.7, tem-se:

$$U^* = \frac{U}{\text{Volume}} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta U}{A_0L} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{F}{A_0}}_{\sigma_{xx}} \underbrace{\frac{\Delta U}{L}}_{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} \quad (7)$$

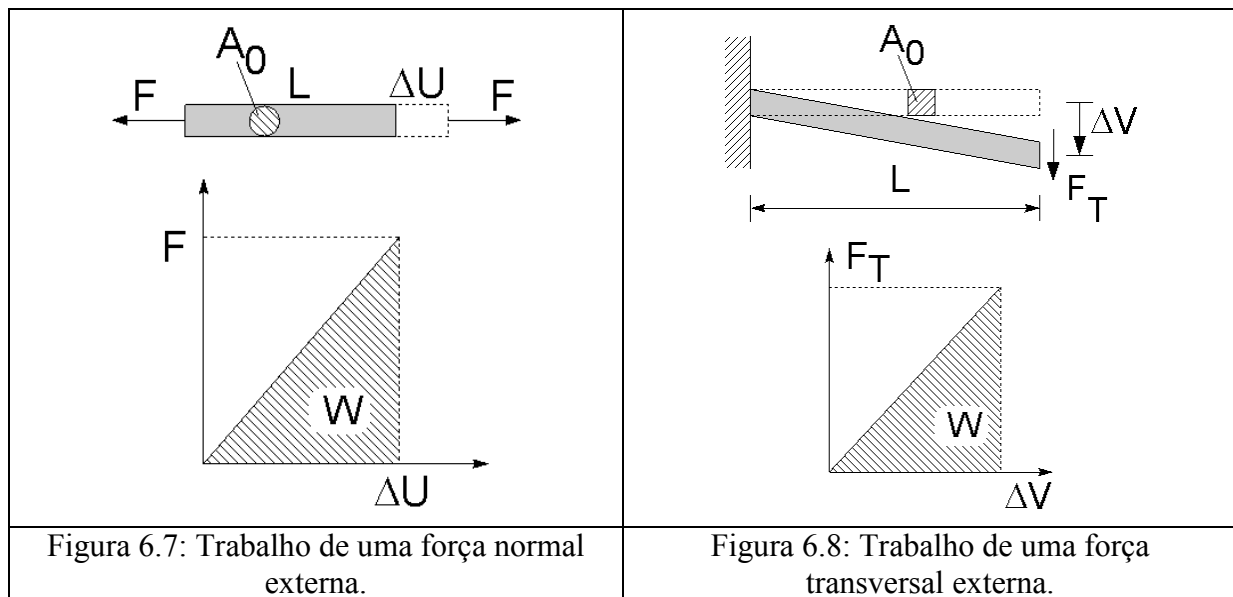
A energia de deformação total é obtida integrando-se a densidade de energia de deformação em todo o volume do corpo.

$$U_{\text{total}} = \int_{\text{Volume}} U^* d\text{Volume} \quad (8)$$

Analogamente, a energia de deformação de um corpo sujeito a carregamento transversal (Figura 6.8) é dada por:

$$U^* = \frac{U}{\text{Volume}} = \frac{\frac{1}{2}F_T\Delta v}{A_0L} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{F_T}{A_0}}_{\sigma_{xy}} \underbrace{\frac{\Delta v}{L}}_{\gamma_{xy}} \quad (9)$$

$$U^* = \frac{1}{2} \sigma_{xy} \gamma_{xy} \quad (10)$$



No caso geral de um corpo submetido a um estado geral de tensões, a densidade de energia de deformação é dada por:

$$U^* = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}) \quad (11)$$

Da equação constitutiva da mecânica dos sólidos para um material elástico, homogêneo e isotrópico, tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{XX} &= \frac{\sigma_{XX}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{YY} + \sigma_{ZZ}); & \gamma_{XY} &= \frac{\sigma_{XY}}{G} \\
\varepsilon_{YY} &= \frac{\sigma_{YY}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{XX} + \sigma_{ZZ}); & \gamma_{XZ} &= \frac{\sigma_{XZ}}{G} \\
\varepsilon_{ZZ} &= \frac{\sigma_{ZZ}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{XX} + \sigma_{YY}); & \gamma_{YZ} &= \frac{\sigma_{YZ}}{G}
\end{aligned} \tag{12}$$

Substitui-se (12) em (11) para se obter:

$$U^* = \frac{1}{2E}(\sigma_{XX}^2 + \sigma_{YY}^2 + \sigma_{ZZ}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{XX}\sigma_{YY} + \sigma_{XX}\sigma_{ZZ} + \sigma_{YY}\sigma_{ZZ}) + \frac{1}{2G}(\sigma_{XY}^2 + \sigma_{XZ}^2 + \sigma_{YZ}^2) \tag{13}$$

A energia de deformação de um corpo é composta por dois mecanismos distintos: a energia de dilatação e a de distorção. Na dilatação, atuam somente tensões capazes de alterar o volume do corpo, sem distorcê-lo. Na distorção, atuam tensões que mudam sua geometria.

$$U^* = U_{\text{dilatação}}^* + U_{\text{distorção}}^* \tag{14}$$

Experimentos mostram que materiais não escoam quando submetidos a tensões de dilatação. Com isso, foi desenvolvido um critério de falha baseado na parcela de energia de distorção:

$$U_{\text{distorção}}^* = U^* - U_{\text{dilatação}}^* \tag{15}$$

Na situação em que somente tensões normais são aplicadas, tem-se que  $\sigma_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ , então:

$$U_{\text{tensões principais}}^* = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{2E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \tag{16}$$

Na condição de dilatação, tem-se ainda que  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , então:

$$U_{\text{dilatação}}^* = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \tag{17}$$

Aplica-se  $U_{\text{tensões principais}}^*$  e  $U_{\text{dilatação}}^*$  na equação de  $U_{\text{distorção}}^*$ . Com  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , tem-se:

$$U_{\text{distorção}}^* = \frac{1}{12G}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \tag{18}$$

## 5. Critério Von Mises

A energia de distorção de um sólido sujeito a um estado de tensões geral é dado pela Equação 18. Em um caso de tração uniaxial, em que o material é sujeito apenas a  $\sigma_{ULT} = \sigma_1$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , tem-se:

$$U_{\text{distorção (uniaxial)}}^* = \frac{2\sigma_1^2}{12G} = \frac{2\sigma_{\text{ULT}}^2}{12G} \quad (19)$$

Segundo o critério de Von Mises, ou *critério da máxima energia de distorção*, quando sujeito a um estado de tensão geral, o material falhará quando sua energia de distorção se igualar àquela com a qual se romperia no caso de tração uniaxial. Isto é:

$$U_{\text{distorção (geral)}}^* = U_{\text{distorção (uniaxial)}}^* \\ 2\sigma_{\text{ULT}}^2 = \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] \quad (20)$$

Para o caso plano de tensões, em que  $\sigma_3 = 0$ , a Equação 20 se torna:

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{ULT}}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{ULT}}} \right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_{\text{ULT}}^2} = 1 \quad (21)$$

A Equação 21 corresponde à equação de uma elipse, ilustrada na Figura 6.9. Segundo o critério de Von Mises, o material não falhará se a combinação  $A = (\sigma_1, \sigma_2)$  estiver dentro da área hachurada. Compare na figura a visualização deste critério com o critério de Tresca, discutido anteriormente.

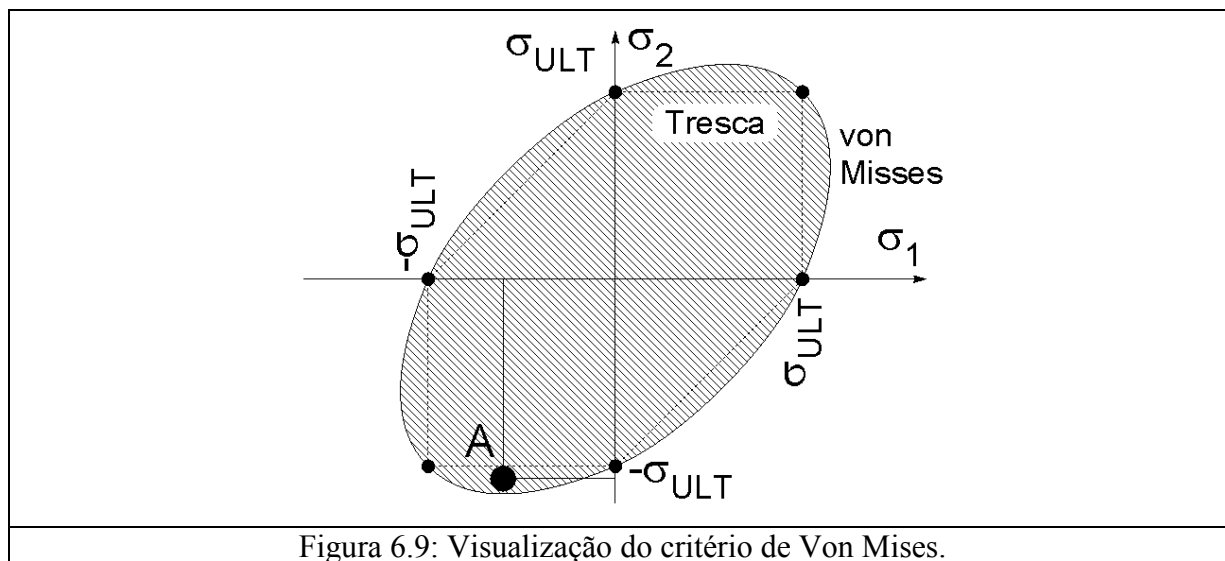


Figura 6.9: Visualização do critério de Von Mises.

## 6. Exemplo 1

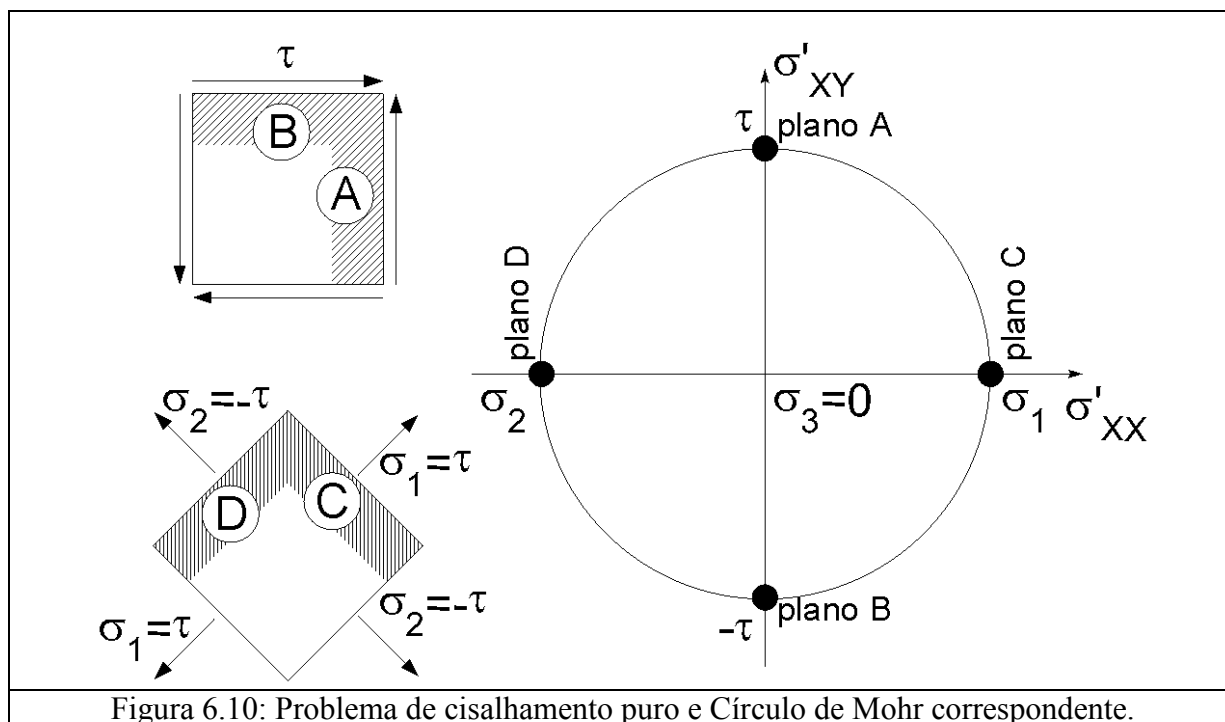
Considere o caso de cisalhamento puro mostrado na Figura 6.10. Por Tresca, tem-se:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{\text{ULT}}}{2} \Rightarrow \frac{\tau - (-\tau)}{2} = \frac{\sigma_{\text{ULT}}}{2} \Rightarrow \tau = \frac{\sigma_{\text{ULT}}}{2} \quad (22)$$

Assim, por Tresca, a máxima tensão de cisalhamento aplicável é  $\tau = \sigma_{\text{ULT}}/2$ . Por outro lado, para este mesmo exemplo tem-se, com  $\sigma_3 = 0$ , que:

$$2\sigma_{\text{ULT}}^2 = \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (\sigma_2 - 0)^2 \right] \quad (23)$$

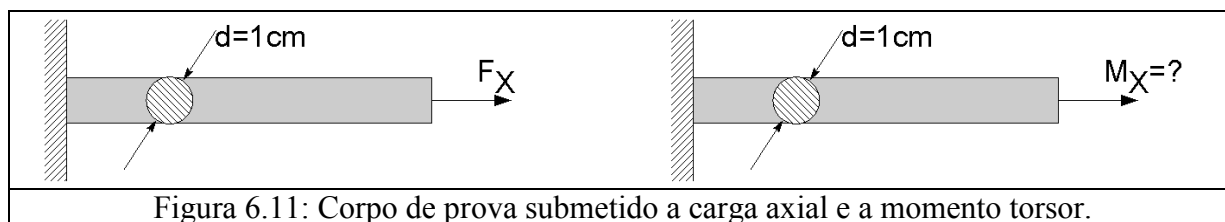
Como  $\sigma_1 = -\sigma_2$ , pelo critério de Von Mises, a máxima tensão de cisalhamento aplicável é  $\tau = \sigma_{ULT}/\sqrt{3}$ . Isto é: neste exemplo de cisalhamento puro, o critério de Tresca é mais conservador que o critério de Von Mises.



## 7. Exemplo 2

Um corpo de prova de um dado material, construído com  $d = 1$  cm de diâmetro, falhou ao ser submetido a um ensaio de tração quando a força de tração atingiu  $F_X = 7850$  N.

Se submetêssemos o mesmo corpo de prova a um momento torsor  $M_X$ , qual seria, segundo o critério de Von Mises, o valor máximo de  $M_X$  para que o material não falhe?



### 7.1 Solução

Na tração uniaxial, o estado de tensão é dado por  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  e

$$\sigma_1 = \sigma_{XX} = \frac{F_X}{A_X} = \frac{F_X}{\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)} = \frac{7850 \text{ N}}{\left(\frac{1}{4}\pi (10 \text{ mm})^2\right)} = 99,95 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \text{ Assim, a energia de deformação}$$

neste caso é:

$$U_{\text{distorção (axial)}}^* = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] = \frac{1}{12G} [2 \cdot 99,95^2]$$

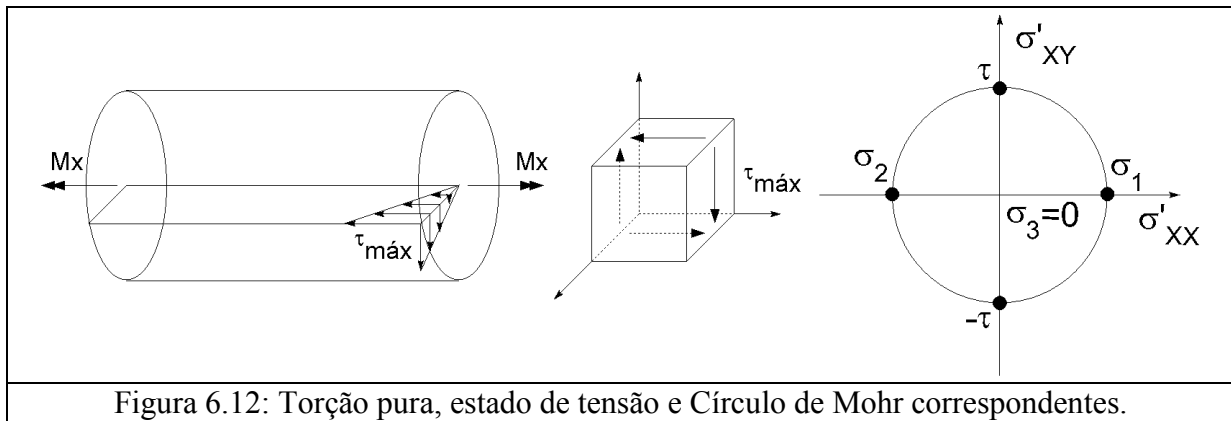


Figura 6.12: Torção pura, estado de tensão e Círculo de Mohr correspondentes.

Por outro lado, na torção devido a  $M_X$  (Figura 6.12) tem-se que  $\sigma_1 = \tau_{\text{máx}}$  e  $\sigma_2 = -\tau_{\text{máx}}$ . Assim,

$$U_{\text{(torção)}}^* \text{distorção} (\sigma_1 = +\tau, \sigma_2 = -\tau) = \frac{1}{12G} \left[ (2\tau)^2 + (\tau)^2 + (-\tau)^2 \right]$$

$$U_{\text{(torção)}}^* \text{distorção} (\sigma_1 = +\tau, \sigma_2 = -\tau) = \frac{\tau^2}{3G}$$

Segundo o critério de Von Mises,  $U_{\text{(axial)}}^* \text{distorção} = U_{\text{(torção)}}^* \text{distorção}$ . Com isso,

$$\frac{\tau^2}{3G} = \frac{1}{12G} \left[ 2 \cdot 99,95^2 \right] \Rightarrow \tau = 70,67 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Mas } \tau_{\text{máx}} = \frac{M_X R}{J_p} = \frac{M_X \frac{1}{2} d}{\frac{1}{2} \pi d^4} \Rightarrow \frac{M_X}{\pi d^3} = \tau_{\text{máx}} \Rightarrow M_X = \tau_{\text{máx}} \pi d^3 = 222 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

### 8. Exemplo 3

Considere um elemento estrutural submetido ao seguinte estado de tensão:

$$\sigma_{XX} = 7 \cdot 10^7 \text{ Pa}; \sigma_{YY} = 14 \cdot 10^7 \text{ Pa} \text{ e } \sigma_{XY} = -3,5 \cdot 10^7 \text{ Pa}.$$

Em um teste de tração uniaxial, a falha ocorreu a uma tensão  $\sigma = \sigma_{ULT} = 1,7 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ . No estado de tensão dado,

- 1) Haverá falha segundo o critério de Rankine?
- 2) Haverá falha segundo o critério de Tresca?
- 3) Haverá falha segundo o critério de Von Mises?

#### 8.1 Solução

Segundo o critério de Rankine, o material falha se  $\sigma_1 \geq \sigma_{ULT} = 1,7 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 170 \text{ N/mm}^2$ .

Segundo o critério de Tresca, o material falha se  $\tau_{\text{máx}} \geq \sigma_{ULT}/2 = 0,85 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 85 \text{ N/mm}^2$ .

Segundo o critério de Von Mises, o material falha se  $U^* \geq 2(\sigma_{ULT})^2/(12G)$ .



Para o estado de tensões dado, tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_{XX} = 70 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{YY} = 140 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{XY} = -35 \frac{N}{mm^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = 105 \frac{N}{mm^2} \\ R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2} = 49,97 \frac{N}{mm^2} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = x_0 + R = 154,95 < 170 \frac{N}{mm^2}.$$

Portanto, segundo o critério de Rankine, o material não falha.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_1 = 77,25 < 85 \frac{N}{mm^2}.$$

Portanto, segundo o critério de Tresca, o material não falha.

$$U^* = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] = \frac{1}{12G} 36,752$$

$$U_{\text{uniaxial}}^* = \frac{2\sigma_{\text{ULT}}^2}{12G} = \frac{57800}{12G}$$

$$\frac{1}{12G} 36,752 = U^* < U_{\text{uniaxial}}^* = \frac{1}{12G} 57800$$

Portanto, também segundo o critério de Von Misses, o material não falha.

## 9. Exemplo 4

O estado de tensão em um ponto é dado por:

$$\sigma_{XX} = 5 \text{ N/mm}^2; \sigma_{YY} = -3 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \sigma_{XY} = 4 \text{ N/mm}^2.$$

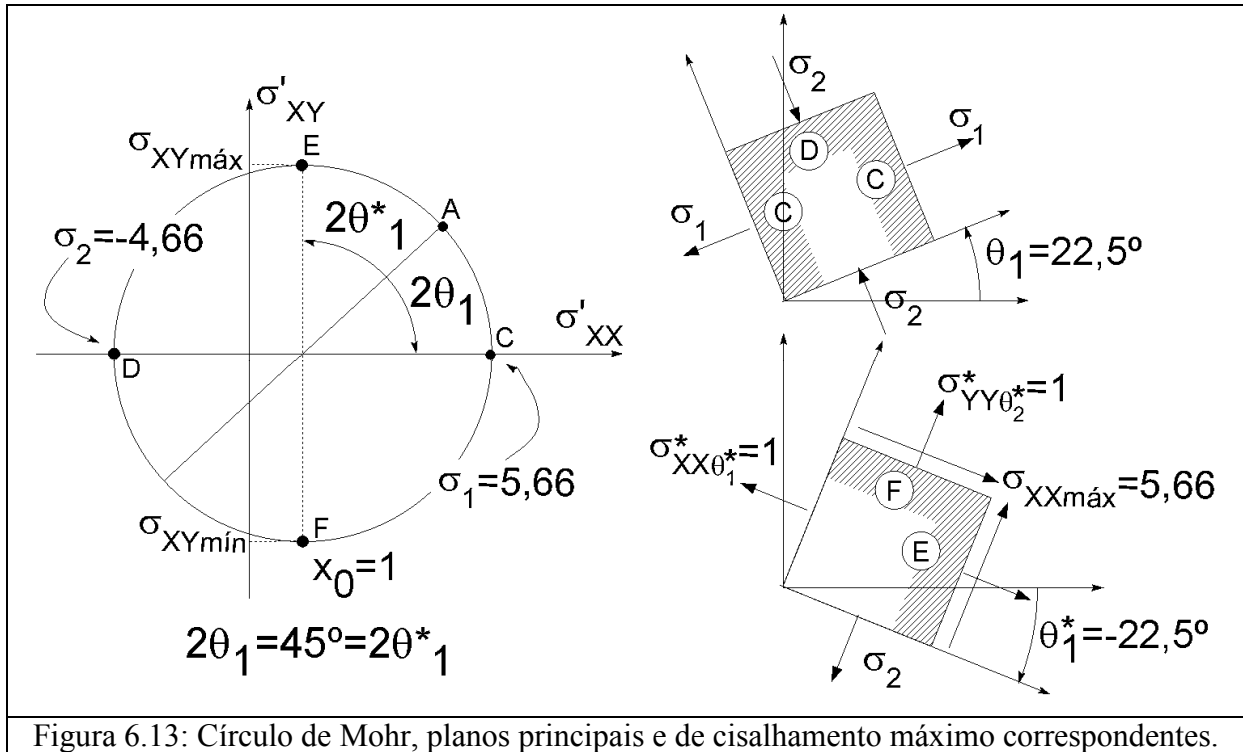
Determinar o Círculo de Mohr, planos e tensões principais e de cisalhamento máximo. Qual a tensão máxima que o material pode suportar se submetido a um estado de cisalhamento puro? O material falha pelos critérios de Rankine, Tresca e Von Mises?

### 9.1 Círculo de Mohr

$$\begin{cases} \sigma_{XX} = 5 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{YY} = -3 \frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{XY} = 4 \frac{N}{mm^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = \frac{5 + (-3)}{2} = 1 \frac{N}{mm^2} \\ R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2} = \sqrt{\left(\frac{5 - (-3)}{2}\right)^2 + 4^2} = 5,66 \frac{N}{mm^2} \end{cases}$$

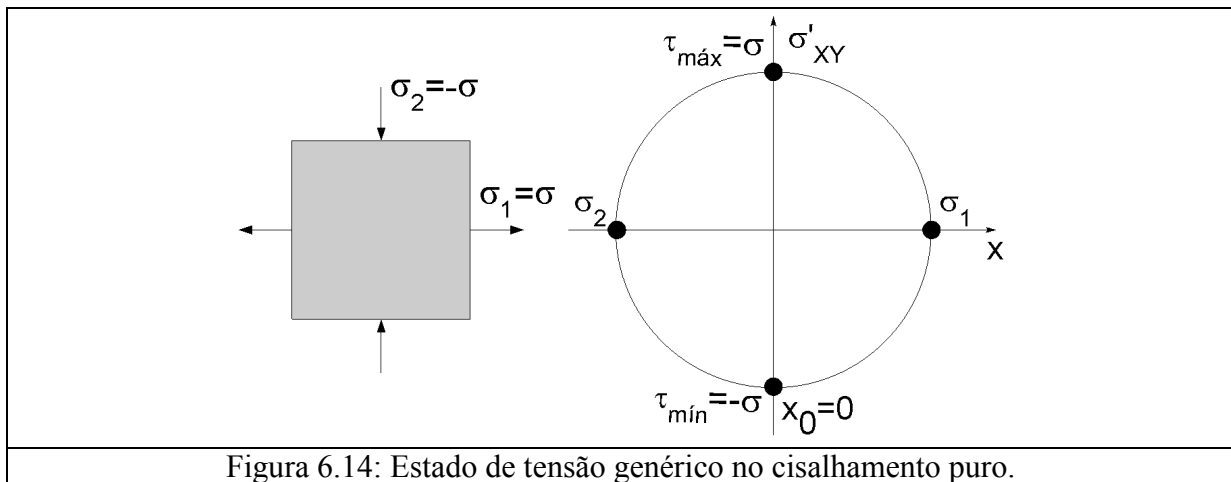
$$\sigma_1 = x_0 + R = 6,66 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_2 = x_0 - R = -4,66 \frac{N}{mm^2}$$



## 9.2 Falha no estado de cisalhamento puro

No estado de cisalhamento puro (Figura 6.14), a falha ocorre segundo o critério de Rankine se  $\sigma \geq 6,66$ , segundo o critério de Tresca se  $\tau \geq 5,66$  e segundo o critério de Von Mises se  $U^*_{\text{cisalhamento puro}} \geq U^*$ .



Determinando a densidade de energia de deformação:

$$\sigma_1 = 6,66, \sigma_2 = -4,66 \text{ e } \sigma_3 = 0.$$

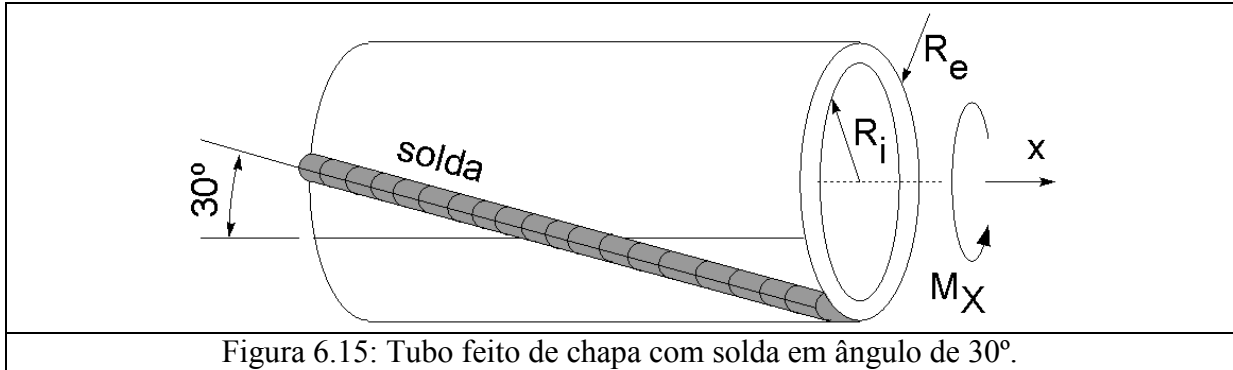
$$U^* = \frac{1}{12G} \left[ (6,66 + 4,66)^2 + (6,66 - 0)^2 + (-4,66 - 0)^2 \right] = \frac{1}{12G} 194,21$$

$$U^*_{\text{cis.puro}} = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma + (-\sigma))^2 + \sigma^2 + (-\sigma)^2 \right] = \frac{6\sigma^2}{12G}$$

Assim, segundo o critério de Von Mises, a falha ocorre se:  $6\sigma^2 \geq 194,21 \Rightarrow \sigma \geq 6,59$ .

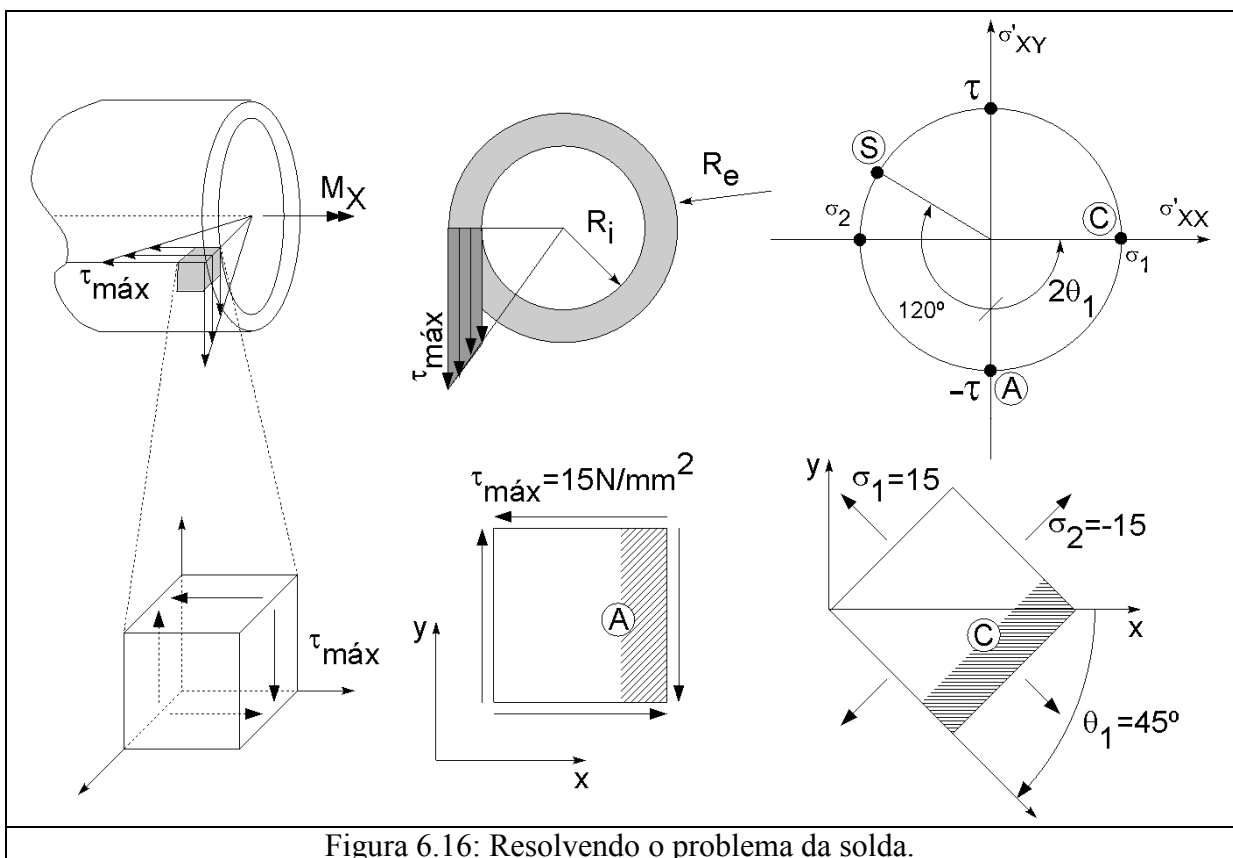
## 10. Exemplo 5

Um eixo vazado de dimensões  $R_e = 60 \text{ mm}$  e  $R_i = 45 \text{ mm}$ , falha quando submetido a um momento torsor  $M_x = 3500 \text{ N}\cdot\text{m}$ . O tubo é construído soldando uma folha metálica com um cordão de solda a  $30^\circ$  com o eixo longitudinal.



Determinar as tensões normais e de cisalhamento máximo atuantes no ponto de falha, e também na linha de solda.

### 10.1 Solução



$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_x R_e}{J_p} = \frac{M_x R_e}{\left[ \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2} \right]} = \frac{(3,5 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m})(60 \text{ mm})}{\left\{ \frac{\pi[(60 \text{ mm})^4 - (45 \text{ mm})^4]}{2} \right\}} = 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\begin{cases} \sigma_{XX} = 0 \\ \sigma_{YY} = 0 \\ \sigma_{XY} = \tau_{\text{máx}} = 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} = 0 \\ R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \sigma_{XY}^2} = \tau_{\text{máx}} = 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = x_0 + R = 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_2 = x_0 - R = -15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{cases}$$

Da face (A) até o plano de solda (S) (Figura 6.17), é necessário um giro de 60°. No Círculo de Mohr, isso equivale a um giro de 120° no sentido horário.

Do triângulo OS visto no Círculo de Mohr (Figuras 6.16 e 6.18), tem-se finalmente:  
 $\sigma_{XX\text{solda}} = -12,99 \text{ N/mm}^2$ ;  $\sigma_{XY\text{solda}} = 7,5 \text{ N/mm}^2$ .

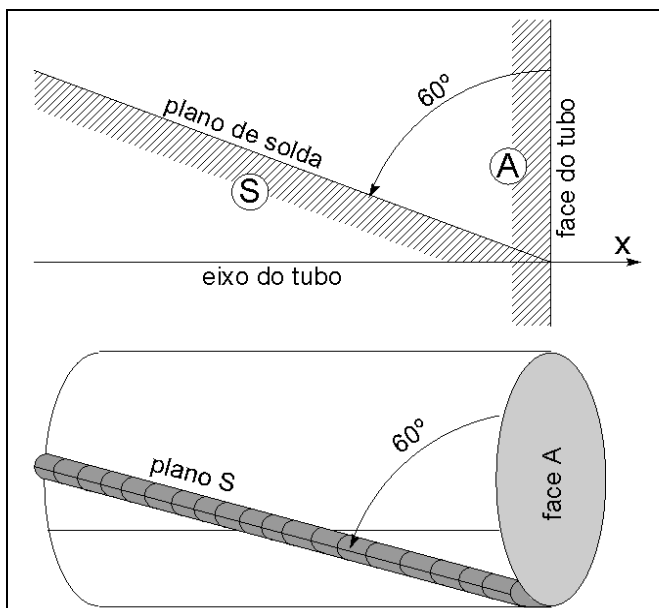


Figura 6.17: Giro da face A até o plano de solda.

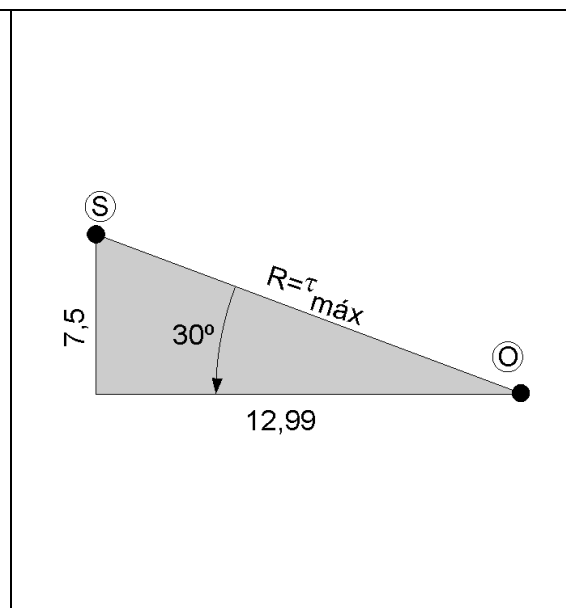


Figura 6.18: Trecho do Círculo de Mohr.

**8. Exercício proposto (Do Exame de 12/07/2005; 2,0 pontos)**

Considere a situação da viga mostrada na Figura 6.13, cuja seção transversal tem largura B e altura H. Sabe-se que o material da viga falha segundo o critério da máxima energia de distorção. Um diagrama ilustrando o critério de falha é mostrado na Figura 6.14. Determine os esforços máximos aplicáveis,  $M_{ZB}$  e  $F_X$ , sem que a viga apresente falha. Indique o ponto da viga em que a falha ocorrerá. **Dados:**  $H = 2B = 100 \text{ mm}$ .

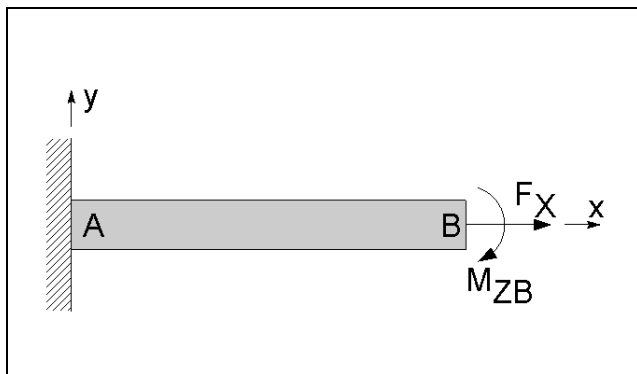


Figura 6.13: Viga de seção B × H, sujeita às cargas  $F_X$  e  $M_{ZB}$ .

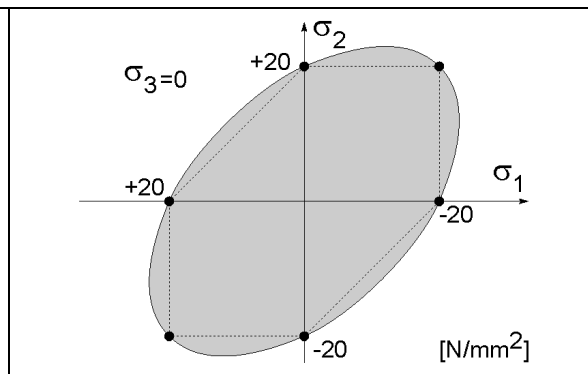


Figura 6.14: Visualização do critério de falha por máxima energia de distorção.

# CAPÍTULO X

## PARTE C – MÉTODO DOS AUTOVALORES

### 1. Fundamentação algébrica

Segundo a Fórmula de Cauchy, tem-se que (Figura 7.1):

$$[\sigma_{ij}]\{n_j\} = \{t_i\} \quad (1)$$

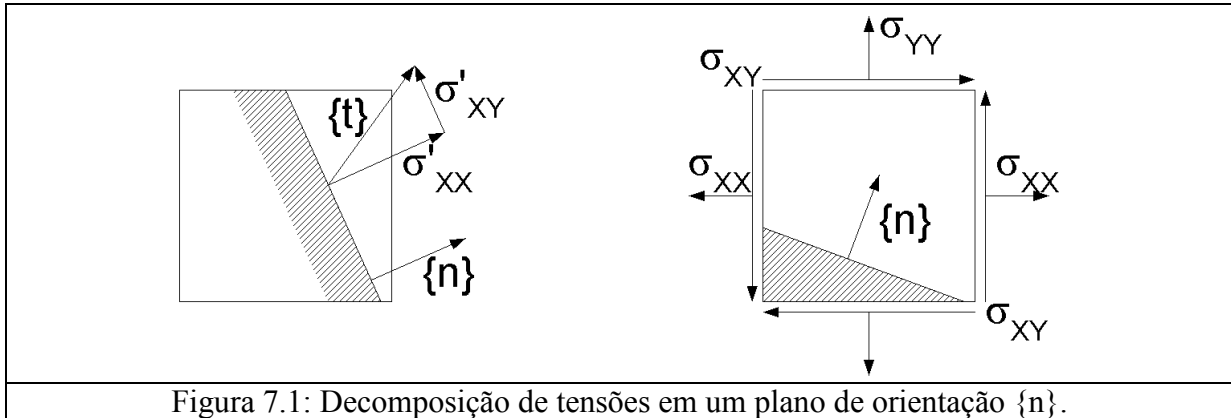


Figura 7.1: Decomposição de tensões em um plano de orientação  $\{n\}$ .

Quando  $\{t\} = \{t^n\}$ , isto é, o vetor força de superfície é paralelo ao vetor normal, tem-se um plano principal.

Exemplo:  $\sigma_{XX} = \sigma_{YY} = 0,35 \text{ N/mm}^2$  e  $\sigma_{XY} = 1 \text{ N/mm}^2$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}}_{\sigma_{ij}} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\sigma}_{\text{tensões principais}} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Assim, a condição para ser um plano principal é:

$$\sigma[I]\{n\} = \{t\} = [\sigma_{ij}]\{n\} \Rightarrow \therefore \sigma[I]\{n\} = [\sigma_{ij}]\{n\} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\left( \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{XX} - \sigma & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} - \sigma & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} - \sigma \end{bmatrix}}_A \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

O sistema da Equação 6 tem solução não-trivial quando  $\det([A])$  é nulo, isto é,

$$\det([A]) = (\sigma_{XX} - \sigma)(\sigma_{YY} - \sigma)(\sigma_{ZZ} - \sigma) + \sigma_{XY}\sigma_{YZ}\sigma_{XZ} + \sigma_{XZ}\sigma_{XY}\sigma_{YZ} - \sigma_{XZ}(\sigma_{YY} - \sigma)\sigma_{XZ} - \sigma_{YZ}\sigma_{YZ}(\sigma_{XX} - \sigma) - (\sigma_{ZZ} - \sigma)\sigma_{XY}\sigma_{XY} = 0 \quad (7)$$

Reorganizando a expressão anterior, tem-se:

$$\det([A]) = a\sigma^3 + b\sigma^2 + c\sigma + d = 0 \quad (8)$$

As três raízes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  raízes do polinômio (8) são os autovalores do problema  $[A]\{n_i\} = \mathbf{0}$ . Os autovetores deste problema dão as direções dos planos principais.

## 2. Exemplo 1

Dado o seguinte estado de tensão, determinar as tensões e planos principais pelo método dos autovalores:  $\sigma_{XX} = 200$ ,  $\sigma_{YY} = 100$ ,  $\sigma_{ZZ} = 300$ .

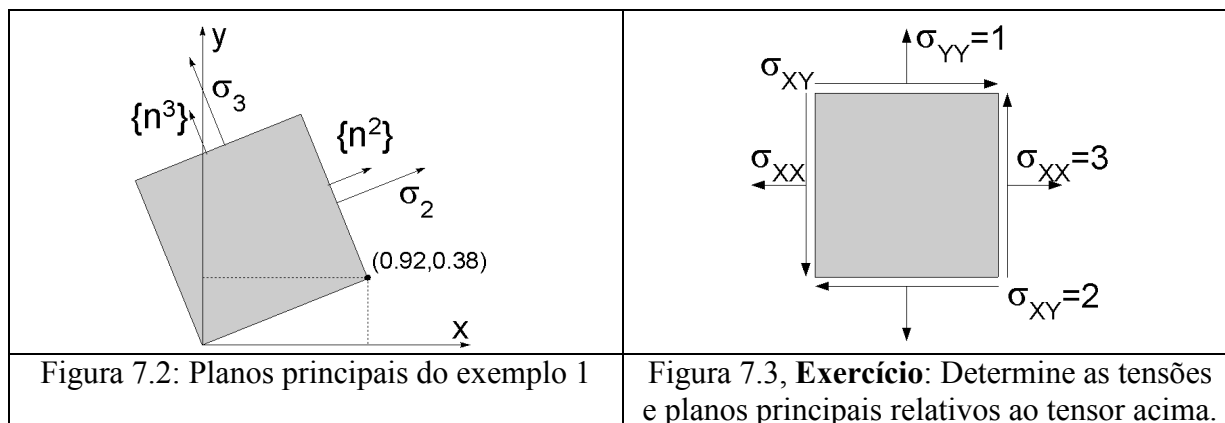
### 2.1 Solução

$$\det \begin{pmatrix} 200 - \sigma & 100 & 0 \\ 100 & 0 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 300 - \sigma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\sigma^3 + 500\sigma^2 - 50.000\sigma - 3.000.000 = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 300 \\ \sigma_2 = 241,421 \Rightarrow \text{raízes de } \det([A]), \text{ autovalores do problema.} \\ \sigma_3 = -41,421 \end{cases}$$

Os autovetores obtidos a partir destes autovalores dão a direção dos planos principais:

$$\begin{cases} \sigma_1 \rightarrow n^1 = \{0 \ 0 \ 1\}^T \\ \sigma_2 \rightarrow n^2 = \{0.9258 \ 0.3826 \ 0\}^T \\ \sigma_3 \rightarrow n^3 = \{-0.3826 \ 0.9258 \ 0\}^T \end{cases}$$



# CAPÍTULO XI

## ASSOCIAÇÃO DE SISTEMAS

### 1. Conceito teórico

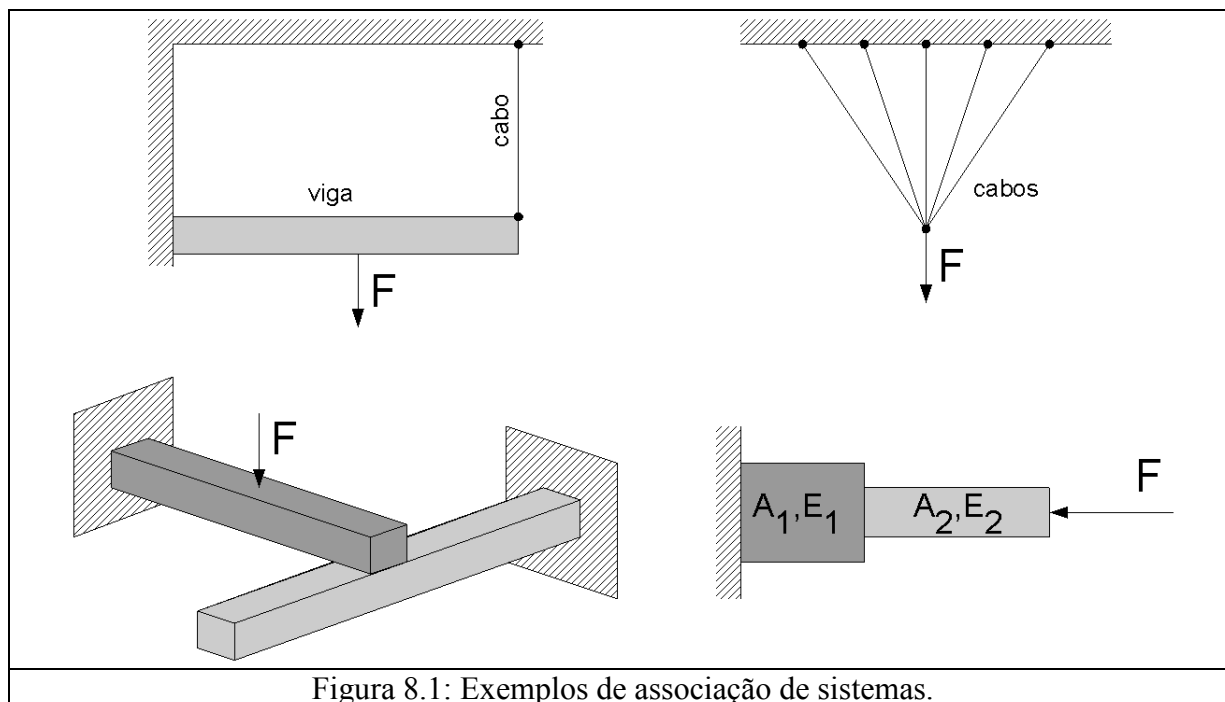


Figura 8.1: Exemplos de associação de sistemas.

A solução de problemas pelo método de Associação de Sistemas geralmente envolve três passos:

- 1) Dividir o problema associado em subsistemas;
- 2) Estabelecer a compatibilidade cinemática na interface;
- 3) Estabelecer o equilíbrio na interface.

### 2. Associação de barras (Da P2 de 03/07/2009; 3,0 pontos)

Considere a associação de barras mostrada na Figura 8.2. O ponto B é submetido a uma força concentrada  $F$ . Usando o método de Associação de Sistemas, determine o deslocamento do conjunto no ponto C.

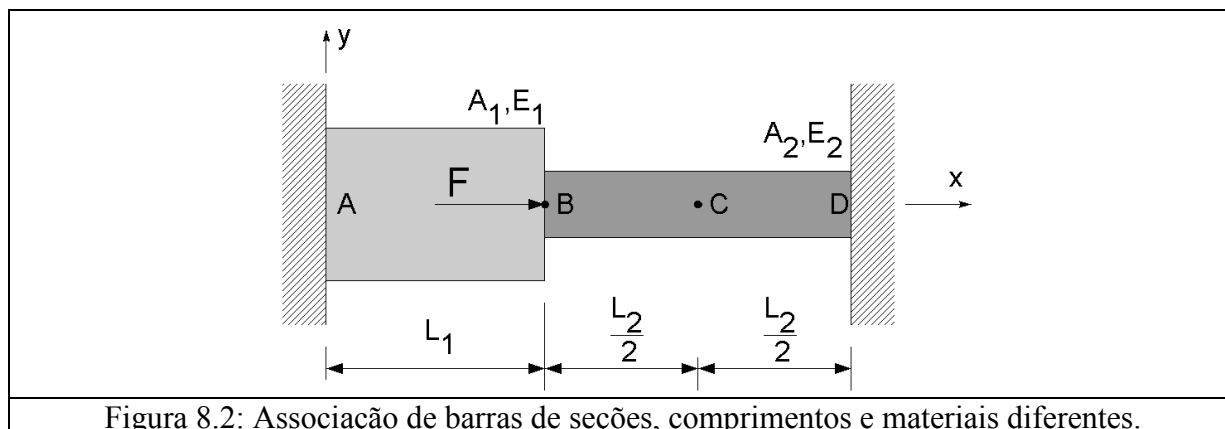


Figura 8.2: Associação de barras de seções, comprimentos e materiais diferentes.

2.1 Solução

a) Dissociação dos sistemas

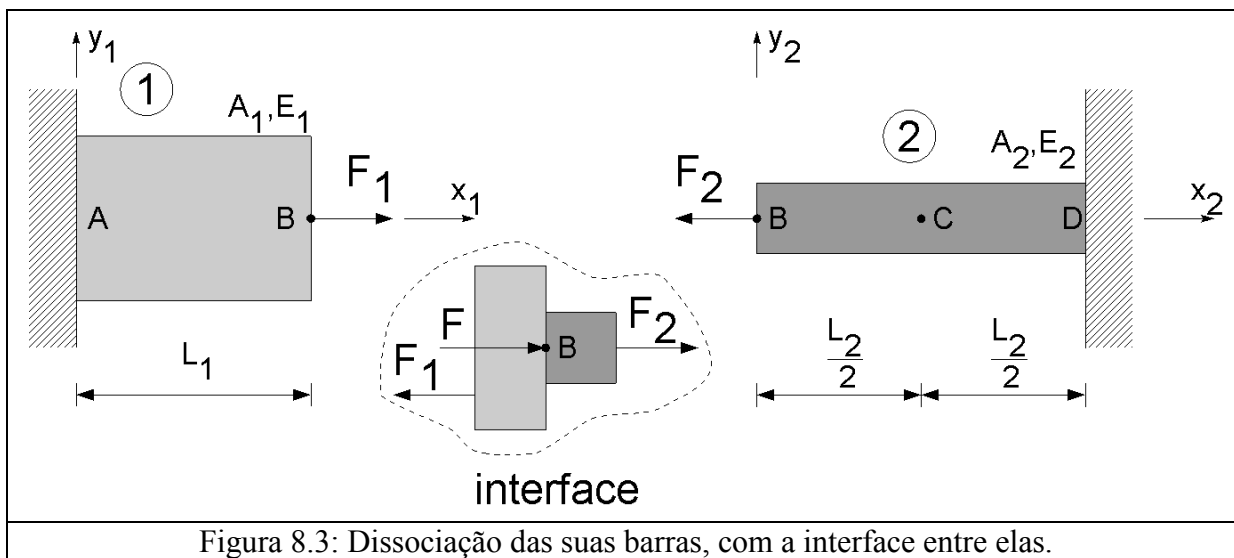


Figura 8.3: Dissociação das suas barras, com a interface entre elas.

b) Equilíbrio na interface

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1 + F + F_2 = 0 \tag{1}$$

c) Compatibilidade cinemática

Neste exemplo, “estabelecer a compatibilidade cinemática” significa dizer que a redução de comprimento da peça (2) é igual ao aumento de comprimento da peça (1), uma vez que elas não se rompem.

$$u_{1B} = u_1(x_1 = L_1) = u_2(x_2 = 0) = u_{2B} \tag{2}$$

d) Solução do problema (1)	e) Solução do problema (2)
<p>Diagram of bar 1 fixed at point A and subjected to a force <math>F_1</math> at point B. The length is <math>L_1</math>.</p>	<p>Diagram of bar 2 fixed at point D and subjected to a force <math>F_2</math> at point B. The length is <math>L_2</math>.</p>
<p>Equação diferencial que rege a peça (1):</p> $A_1 E_1 \frac{d^2}{dx_1^2} u_1(x_1) = -p_1(x_1)$	<p>Equação diferencial que rege a peça (2):</p> $A_2 E_2 \frac{d^2}{dx_2^2} u_2(x_2) = -p_2(x_2)$



<p>Integração da equação diferencial:</p> $A_1 E_1 \frac{d^2}{dx_1^2} u_1(x_1) = 0$ <p>↓ ∫</p> $A_1 E_1 \frac{d}{dx_1} u_1(x_1) = C p_1$ <p>↓ ∫</p> $A_1 E_1 u_1(x_1) = C p_1 \cdot x_1 + C p_2$ <p>Aplicando as condições de contorno:</p> $\begin{cases} u_1(x_1 = 0) = 0 \\ N_1(x_1 = L_1) = +F_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C p_2 = 0 \\ C p_1 = +F_1 \end{cases}$ <p>Equações finais:</p> $\begin{cases} N_1(x_1) = +F_1 \\ \therefore u_1(x_1) = \frac{+F_1}{A_1 E_1} x_1 \end{cases}$	<p>Integração da equação diferencial:</p> $A_2 E_2 \frac{d^2}{dx_2^2} u_2(x_2) = 0$ <p>↓ ∫</p> $A_2 E_2 \frac{d}{dx_2} u_2(x_2) = D p_1$ <p>↓ ∫</p> $A_2 E_2 u_2(x_2) = D p_1 \cdot x_2 + D p_2$ <p>Aplicando as condições de contorno:</p> $\begin{cases} u_2(x_2 = L_2) = 0 \\ N_2(x_2 = 0) = +F_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D p_1 = +F_2 \\ D p_2 = -F_2 L_2 \end{cases}$ <p>Equações finais:</p> $\begin{cases} N_2(x_2) = +F_2 \\ \therefore u_2(x_2) = \frac{F_2}{A_2 E_2} (x_2 - L_2) \end{cases}$
---	---

## f) Resolvendo a associação

Da compatibilidade cinemática, tem-se também que  $u_1(x_1 = L_1) = u_2(x_2 = 0)$ :

$$\begin{cases} u_1(x_1 = L_1) = +\frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} \\ u_2(x_2 = 0) = -\frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} = -\frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} \Rightarrow F_1 = -F_2 \underbrace{\frac{L_2}{A_2 E_2}}_{\frac{1}{k_2}} \underbrace{\frac{A_1 E_1}{L_1}}_{k_1} = -F_2 \frac{k_1}{k_2}$$

$$\therefore \frac{F_1}{k_1} = -\frac{F_2}{k_2} \quad (3)$$

Do equilíbrio, tem-se ainda que  $F = F_1 - F_2$ . Assim,

$$F = -F_2 \frac{k_1}{k_2} - F_2 = -F_2 \left( \frac{k_1 + k_2}{k_2} \right) \rightarrow \begin{cases} F_1 = +\left( \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right) F \\ F_2 = -\left( \frac{k_2}{k_1 + k_2} \right) F \end{cases} \quad (4)$$

Aplicando a expressão de  $F_2$  em  $u_2(x_2)$ , tem-se:

$$u_2(x_2) = -\left(\frac{k_2}{k_1 + k_2}\right) \frac{F}{A_2 E_2} (x_2 - L_2) \quad (5)$$

$$u_c = u_2\left(x_2 = \frac{L_2}{2}\right) = -\left(\frac{k_2}{k_1 + k_2}\right) \frac{F}{A_2 E_2} \left(\frac{L_2}{2} - L_2\right) = +\left(\frac{\frac{A_2 E_2}{L_2}}{\frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_2}}\right) \frac{F L_2}{2 A_2 E_2} \quad (6)$$

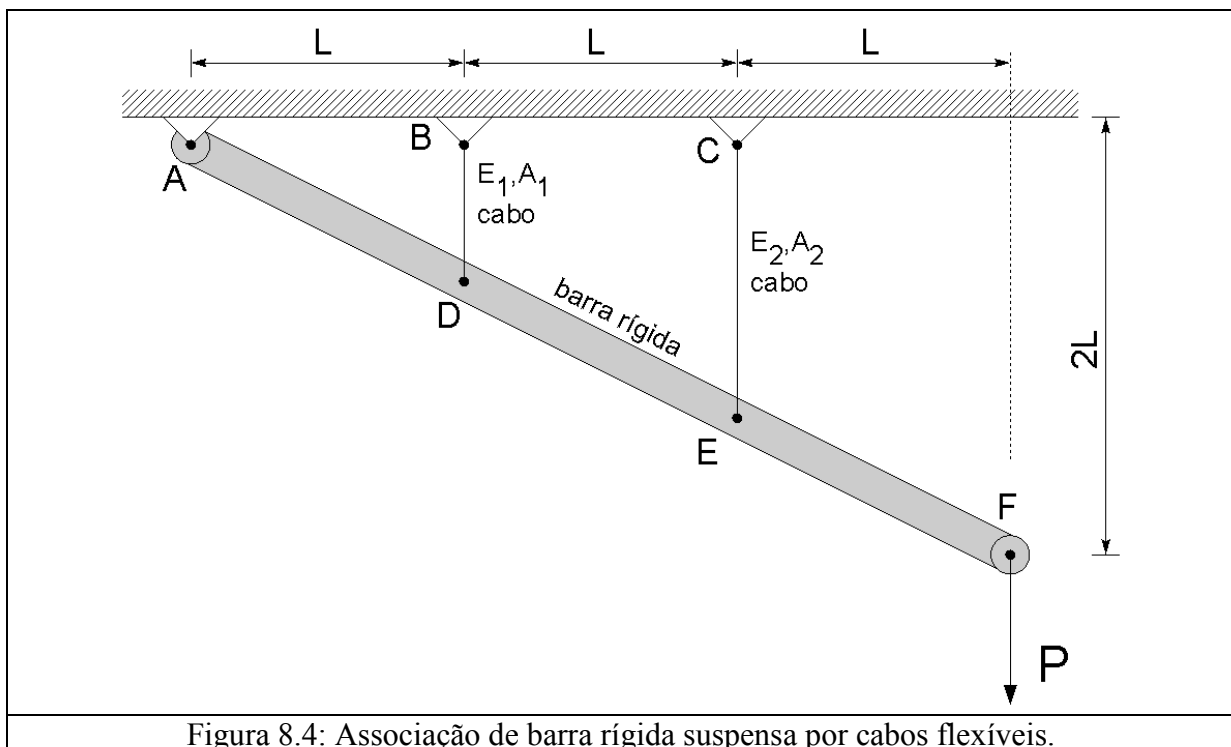
Simplificando, tem-se por fim:

$$u_c = \frac{F}{2} \frac{L_1 L_2}{(A_1 E_1 L_2 + A_2 E_2 L_1)} \quad (7)$$

### 3. Associação de viga rígida e cabos

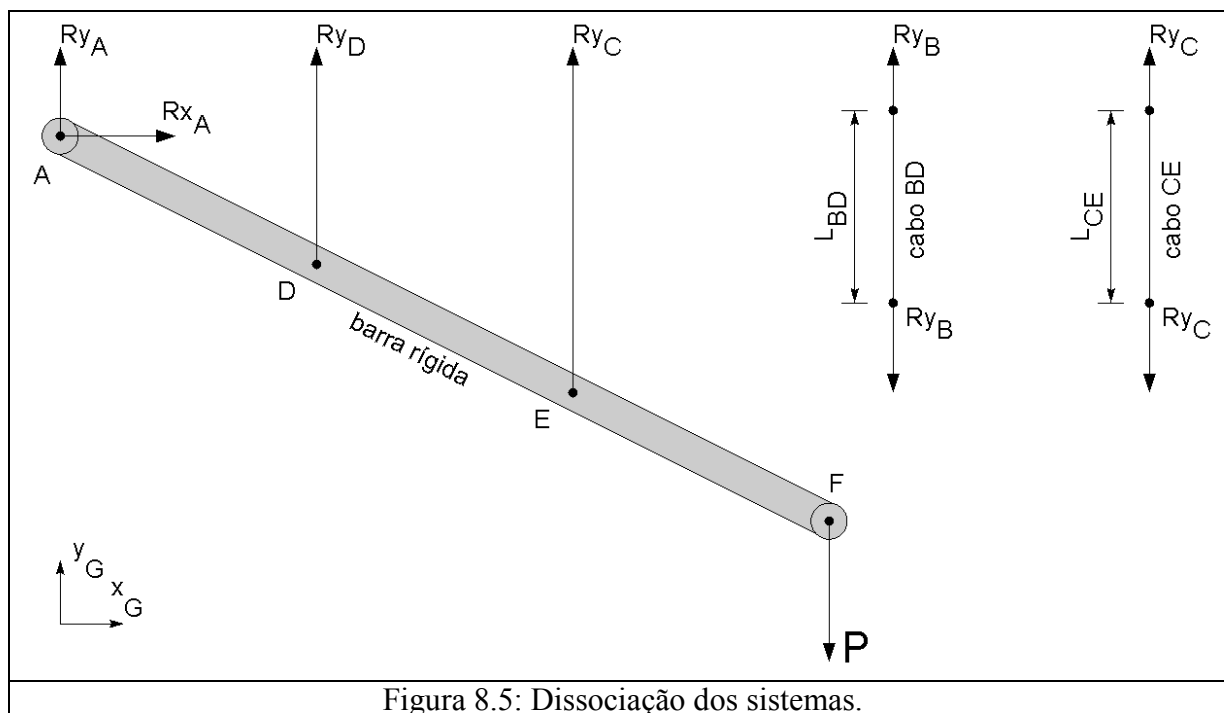
A Figura 8.4 mostra uma associação de uma viga rígida vinculada no ponto A, e presa por dois cabos flexíveis nos pontos D e E. Determinar as reações de apoio da viga no ponto A e dos cabos nos pontos B e C.

**Dados:**  $E_1 = E_2 = 210 \text{ GPa}$ ;  $A_1 = 0,6 \text{ cm}^2$ ;  $A_2 = 1,2 \text{ cm}^2$  e  $P = 7000 \text{ N}$ .



#### 3.1 Dissociação dos sistemas

A dissociação dos sistemas é mostrada na Figura 8.5. A força correspondente à presença do cabo BD é representada na viga rígida por  $R_{YD}$ . A força correspondente à presença do cabo CE é representada por  $R_{YC}$ . As reações da viga rígida no apoio A são chamadas de  $R_{YA}$  e  $R_{XA}$ .



### 3.2 Equações de equilíbrio

Das condições de equilíbrio estático, tem-se ainda, na viga rígida:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{xA} = 0 \quad (8)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{yA} + R_{yB} + R_{yC} - P = 0 \quad (9)$$

$$\sum M_{ZA} = 0$$

$$R_{yB}L + R_{yC} \cdot 2L - P \cdot 3L = 0 \quad (10)$$

### 3.3 Compatibilidade cinemática

O fato de a viga ser rígida exige que haja uma relação cinemática entre os deslocamentos dos cabos, dada por semelhança de triângulos (Figura 8.6):

$$\frac{v_D}{L} = \frac{v_C}{2L} = \frac{v_F}{3L} \Rightarrow \begin{cases} v_D = \frac{v_F}{3} \\ v_E = \frac{2v_F}{3} \end{cases} \quad (11)$$

### 3.4 Resolvendo a associação

Considere um cabo de comprimento  $L$ , área  $A$  e módulo de elasticidade transversal  $E$ , sujeito a uma carga  $F$  concentrada em sua extremidade. O deslocamento da extremidade deste caso tem expressão trivial dada por:  $u = FL/AE$ . Para os cabos  $BD$  e  $CE$ , portanto, tem-se:

$$v_D = \frac{R_{YB} L_{BD}}{A_1 E_1} \quad (12)$$

$$v_E = \frac{R_{YC} L_{CE}}{A_2 E_2} \quad (13)$$

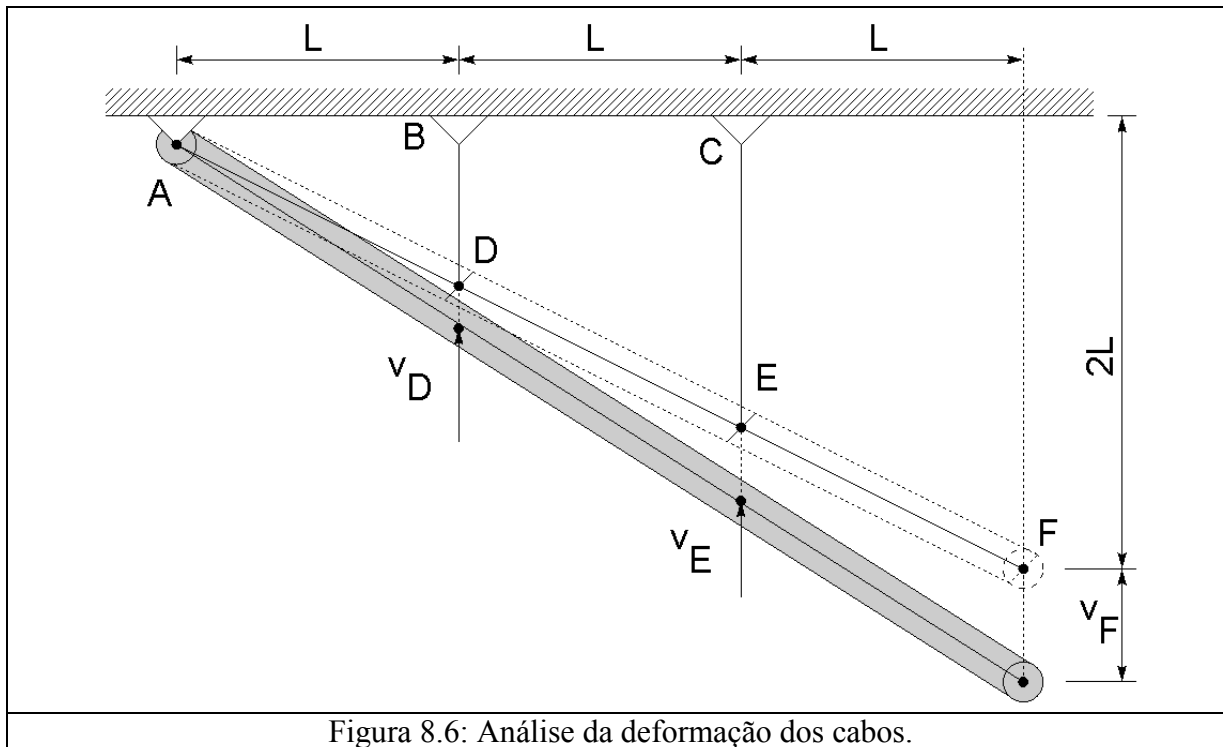


Figura 8.6: Análise da deformação dos cabos.

$$\text{Mas } v_E = 2v_D \Rightarrow \frac{R_{YC} L_{CE}}{A_2 E_2} = 2 \frac{R_{YB} L_{BD}}{A_1 E_1}$$

$$R_{YC} = 2R_{YB} \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1} \frac{L_{BD}}{L_{CE}} \quad (14)$$

Juntando (9), (10) e (14), tem-se:

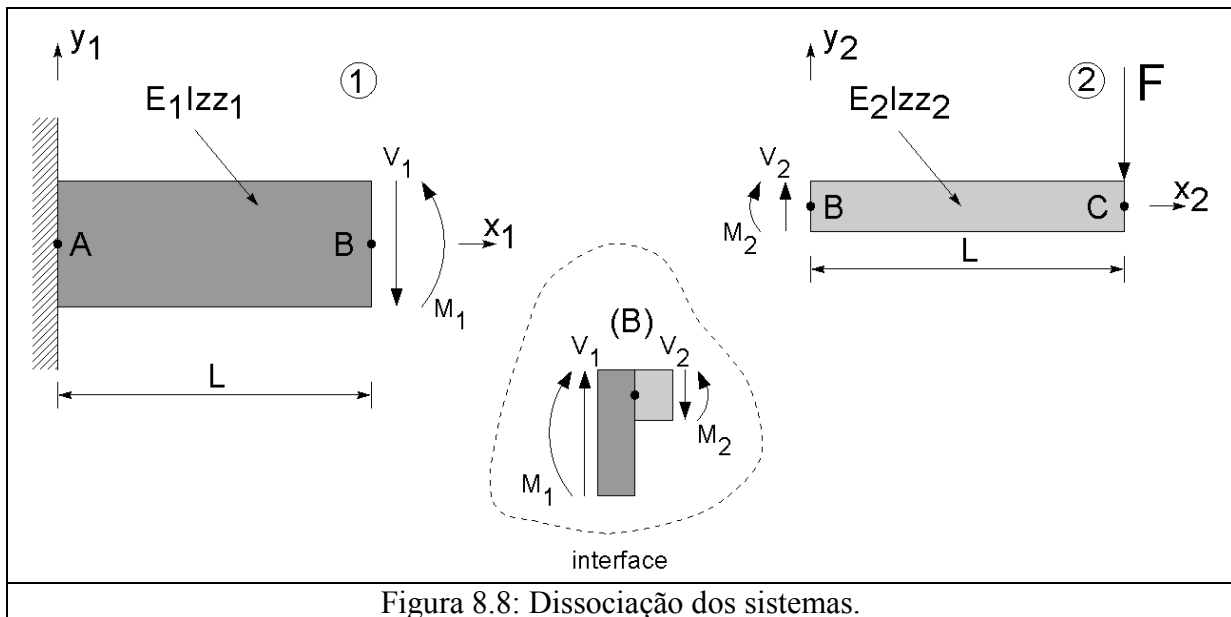
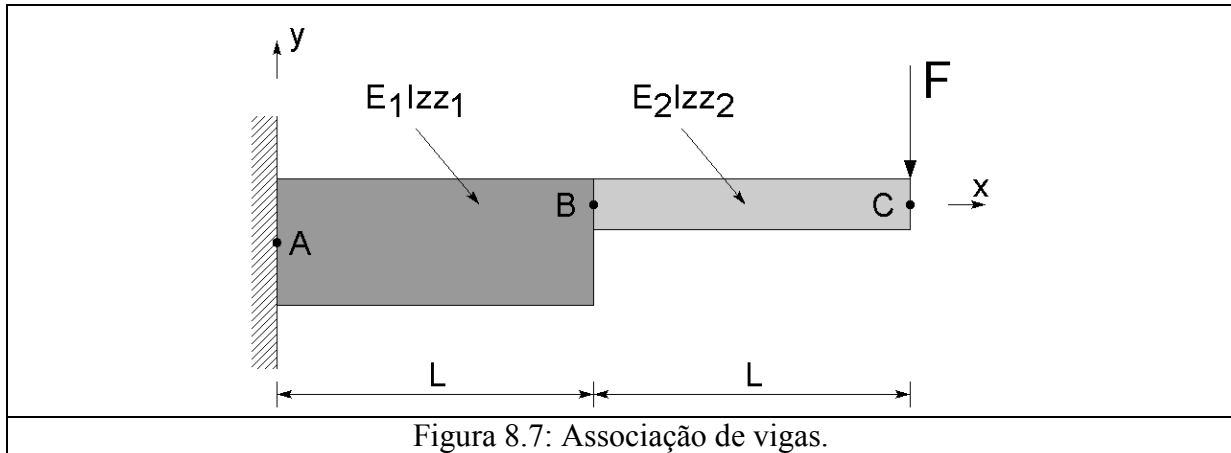
$$\begin{aligned} R_{YA} &= -5600 \text{ N} \\ R_{YB} &= +4200 \text{ N} \\ R_{YC} &= +8400 \text{ N} \end{aligned} \quad (15)$$

#### 4. Associação de vigas flexíveis

Considere a associação de vigas mostrada na Figura 8.7.

##### 4.1 Dissociação dos sistemas

A Figura 8.7 mostra a separação da associação de vigas em dois problemas distintos. Ao separar as duas vigas, é necessário representar em cada uma delas as reações devido à parte que foi removida. Consegue-se isso por meio de esforços cortantes e momentos fletores que são incógnitas.



#### 4.2 Compatibilidade cinemática

$$v_1(x_1 = L_1) = v_B = v_2(x_2 = 0) \quad (16)$$

$$\theta_{z1}(x_1 = L_1) = \theta_{zB} = \theta_{z2}(x_2 = 0) \quad (17)$$

#### 4.3 Equilíbrio na interface

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 - V_2 = 0 \quad (18)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_1 - M_2 = 0 \quad (19)$$

#### 4.4 Levantamento de incógnitas e equações

Cada uma das vigas (1) e (2) tem quatro constantes de integração que são incógnitas. Além disso, desconhecemos os esforços internos entre as vigas,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $M_1$  e  $M_2$ . Ao todo, o problema tem 12 incógnitas. Por outro lado, cada uma das vigas tem quatro condições de contorno. Com as duas equações de compatibilidade cinemática e as duas de equilíbrio, temos 12 equações. Assim, o problema é bem colocado e pode ser resolvido.

#### 4.5 Solução da viga (1)

a) Equação do carregamento

$$q_1(x_1) = 0 \quad (20)$$

b) Condições de contorno

$$v_1(x_1 = 0) = 0 \quad (21)$$

$$\theta_{z1}(x_1 = 0) = 0 \quad (22)$$

$$Vy_1(x_1 = L_1) = +V_1 \quad (23)$$

$$M_{z1}(x_1 = L_1) = +M_1 \quad (24)$$

c) Integração da equação diferencial

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d^4}{dx_1^4} v_1(x_1) = q_1(x_1) = 0 \quad (25)$$

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d^3}{dx_1^3} v_1(x_1) = Vy_1(x_1) = C_1 \quad (26)$$

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d^2}{dx_1^2} v_1(x_1) = M_{z1}(x_1) = C_1 x_1 + C_2 \quad (27)$$

$$E_1 I_{ZZ1} \frac{d}{dx_1} v_1(x_1) = E_1 I_{ZZ1} \theta_{z1}(x_1) = \frac{1}{2} C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3 \quad (28)$$

$$E_1 I_{ZZ1} v_1(x_1) = \frac{1}{6} C_1 x_1^3 + \frac{1}{2} C_2 x_1^2 + C_3 x_1 + C_4 \quad (29)$$

d) Determinação das constantes de integração

$$\text{Substitui-se (21) em (29) para se obter: } C_4 = 0; \quad (30)$$

$$\text{Substitui-se (22) em (28) para se obter: } C_3 = 0; \quad (31)$$

$$\text{Substitui-se (23) em (26) para se obter: } C_1 = V_1; \quad (32)$$

$$\text{Substitui-se (24) em (27) para se obter: } C_2 = M_1 - V_1 L_1. \quad (33)$$

e) Equações finais

Substituindo-se de (30) a (33) em (25) a (29), tem-se:

$$Vy_1(x_1) = V_1 \quad (34)$$

$$M_{z1}(x_1) = V_1 x_1 + M_1 - V_1 L_1 \quad (35)$$

$$E_1 I_{ZZ1} \theta_{z1}(x_1) = \frac{1}{2} V_1 x_1^2 + (M_1 - V_1 L_1) x_1 \quad (36)$$

$$E_1 I_{ZZ1} v_1(x_1) = \frac{1}{6} V_1 x_1^3 + \frac{1}{2} (M_1 - V_1 L_1) x_1^2 \quad (37)$$

#### 4.6 Solução da viga (2)

a) Equação do carregamento

$$q_2(x_2) = 0 \quad (38)$$

b) Condições de contorno

$$Vy_2(x_2 = 0) = +V_2 \quad (39)$$

$$M_{z_2}(x_2 = 0) = +M_2 \quad (40)$$

$$Vy_2(x_2 = L_2) = +F \quad (41)$$

$$M_{z_2}(x_2 = L_2) = 0 \quad (42)$$

c) Integração da equação diferencial

$$E_2 I_{zz_2} \frac{d^4}{dx_2^4} v_2(x_2) = q_2(x_2) = 0 \quad (43)$$

$$E_2 I_{zz_2} \frac{d^3}{dx_2^3} v_2(x_2) = Vy_2(x_2) = D_1 \quad (44)$$

$$E_2 I_{zz_2} \frac{d^2}{dx_2^2} v_2(x_2) = M_{z_2}(x_2) = D_1 x_2 + D_2 \quad (45)$$

$$E_2 I_{zz_2} \frac{d}{dx_2} v_2(x_2) = E_2 I_{zz_2} \theta_{z_2}(x_2) = \frac{1}{2} D_1 x_2^2 + D_2 x_2 + D_3 \quad (46)$$

$$E_2 I_{zz_2} v_2(x_2) = \frac{1}{6} D_1 x_2^3 + \frac{1}{2} D_2 x_2^2 + D_3 x_2 + D_4 \quad (47)$$

d) Determinação das constantes de integração

$$\text{Substitui-se (39) em (44) para se obter: } D_1 = V_2; \quad (48)$$

$$\text{Substitui-se (41) em (44) para se obter: } D_1 = F; \quad (49)$$

$$\text{Substitui-se (48) em (49) para se obter: } V_2 = F; \quad (50)$$

$$\text{Substitui-se (40) em (45) para se obter: } D_2 = M_2; \quad (51)$$

$$\text{Substitui-se (42) em (45) para se obter: } D_1 L_2 + M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = -FL_2. \quad (52)$$

e) Equações finais

Substituindo-se de (48) a (52) em (43) a (47), tem-se:

$$Vy_2(x_2) = +F \quad (53)$$

$$M_{z_2}(x_2) = F(x_2 - L_2) \quad (54)$$

$$E_2 I_{zz_2} \theta_{z_2}(x_2) = \frac{1}{2} F x_2^2 - FL_2 x_2 + D_3 \quad (55)$$

$$E_2 I_{zz_2} v_2(x_2) = \frac{1}{6} F x_2^3 - \frac{1}{2} FL_2 x_2^2 + D_3 x_2 + D_4 \quad (56)$$

#### 4.7 Resolvendo a associação

Observe que, neste caso, as condições de contorno do problema (2) não são suficientes para determinar todas as constantes de integração. Para determinar  $D_3$  e  $D_4$ , é necessário recorrer às equações de compatibilidade cinemática e equilíbrio.

Substituindo-se (37) e (56) em (16), tem-se:

$$v_1(x_1 = L_1) = v_B = v_2(x_2 = 0) \quad (16)$$

$$v_1(x_1) = \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ \frac{1}{6} V_1 x_1^3 + \frac{1}{2} (M_1 - V_1 L_1) x_1^2 \right\} \Rightarrow v_1(L_1) = \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ \frac{1}{6} V_1 L_1^3 + \frac{1}{2} (M_1 - V_1 L_1) L_1^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{3} V_1 L_1^3 + \frac{1}{2} M_1 L_1^2 \right\}$$

$$v_2(x_2) = \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} \left\{ \frac{1}{6} F x_2^3 - \frac{1}{2} F L_2 x_2^2 + D_3 x_2 + D_4 \right\} \Rightarrow v_2(0) = \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} D_4$$

$$\therefore \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} D_4 = \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{3} V_1 L_1^3 + \frac{1}{2} M_1 L_1^2 \right\} \quad (57)$$

Substituindo-se (36) e (55) em (17), tem-se:

$$\theta_{z1}(x_1 = L_1) = \theta_{zB} = \theta_{z2}(x_2 = 0) \quad (17)$$

$$\theta_{z1}(x_1) = \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ \frac{1}{2} V_1 x_1^2 + (M_1 - V_1 L_1) x_1 \right\} \Rightarrow \theta_{z1}(L_1) = \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ \frac{1}{2} V_1 L_1^2 + (M_1 - V_1 L_1) L_1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{2} V_1 L_1^2 + M_1 L_1 \right\}$$

$$\theta_{z2}(x_2) = \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} \left\{ \frac{1}{2} F x_2^2 - F L_2 x_2 + D_3 \right\} \Rightarrow \theta_{z2}(0) = \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} D_3$$

$$\therefore \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} D_3 = \frac{1}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{2} V_1 L_1^2 + M_1 L_1 \right\} \quad (58)$$

Substitui-se (50) em (18), (52) em (19) e então em (57) e (58) para se obter:

$$D_4 = \frac{E_2 I_{ZZ2}}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{3} F L_1^3 - \frac{1}{2} F L_2 L_1^2 \right\} \quad (59)$$

$$D_3 = \frac{E_2 I_{ZZ2}}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{2} F L_1^2 - F L_2 L_1 \right\} \quad (60)$$

#### 4.8 Equações finais

Finalmente, pode-se escrever as equações finais para as vigas dissociadas:

$$V_{y1}(x_1) = +F \quad (61)$$

$$M_{z1}(x_1) = F(x_1 - L_1 - L_2) \quad (62)$$



$$E_1 I_{ZZ1} \theta_{z1}(x_1) = \frac{1}{2} F x_1^2 - F(L_1 + L_2)x_1 \quad (63)$$

$$E_1 I_{ZZ1} v_1(x_1) = \frac{1}{6} F x_1^3 - \frac{1}{2} F(L_1 + L_2)x_1^2 \quad (64)$$

$$V_{y_2}(x_2) = +F \quad (65)$$

$$M_{z_2}(x_2) = F(x_2 - L_2) \quad (66)$$

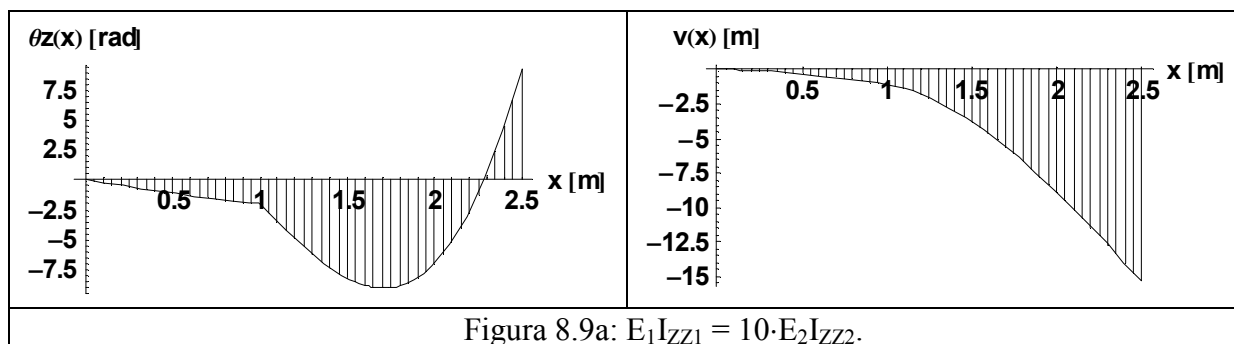
$$E_2 I_{ZZ2} \theta_{z2}(x_2) = \frac{1}{2} F x_2^2 - F L_2 x_2 + \frac{E_2 I_{ZZ2}}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{2} F L_1^2 - F L_2 L_1 \right\} \quad (67)$$

$$E_2 I_{ZZ2} v_2(x_2) = \frac{1}{6} F x_2^3 - \frac{1}{2} F L_2 x_2^2 + \frac{E_2 I_{ZZ2}}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{2} F L_1^2 - F L_2 L_1 \right\} x_2 + \frac{E_2 I_{ZZ2}}{E_1 I_{ZZ1}} \left\{ -\frac{1}{3} F L_1^3 - \frac{1}{2} F L_2 L_1^2 \right\} \quad (68)$$

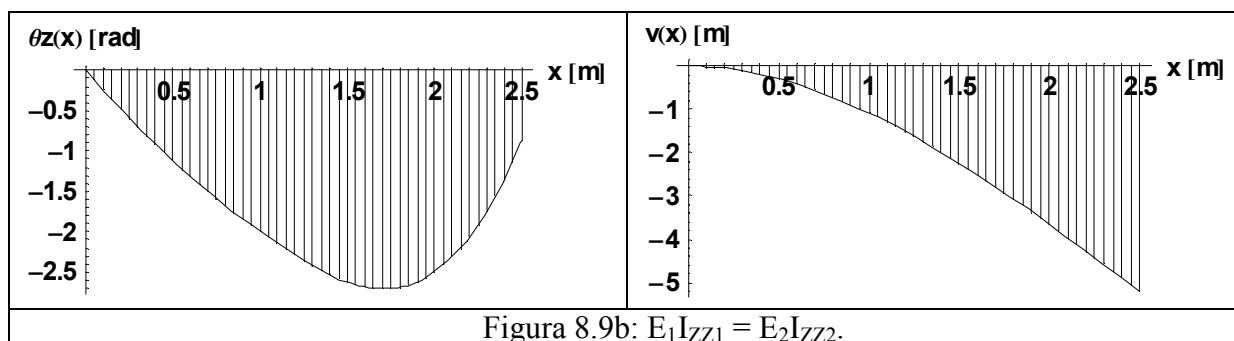
### 4.9 Diagramas de deflexões no sistema associado

Observe que as expressões dos esforços internos, Equações 61, 62, 65 e 66, não dependem da configuração dos materiais, como era previsível.

As figuras a seguir ilustram o comportamento da deflexão ao longo do sistema associado conforme se varia a relação de rigidez ( $E_1 I_{ZZi}$ ) entre eles. Observe que, como era de se esperar, não há descontinuidade na flecha ou rotação no corpo das vigas. Nestes gráficos, adotou-se  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 1,5$  e  $F = 1$ .



Compare o resultado observado na Figura 8.9b com o resultado que seria esperado em uma viga homogênea.



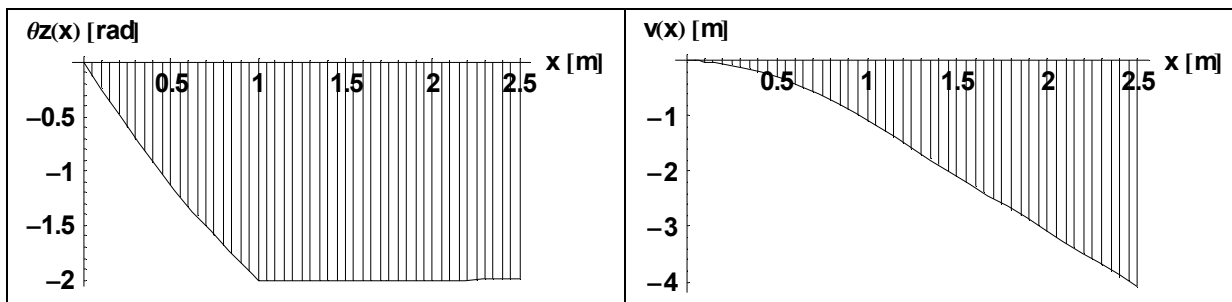


Figura 8.9d:  $E_1 I_{zz1} = 0,001 \cdot E_2 I_{zz2}$ .

5. Casos particulares de associação de vigas – carga concentrada na interface

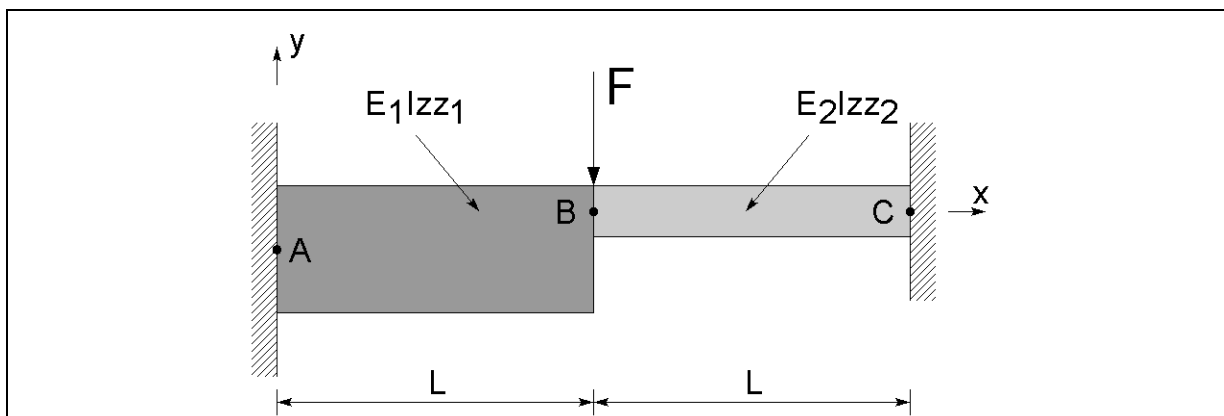


Figura 8.10: Associação de vigas com carga concentrada na interface.

A Figura 8.10 mostra um caso em que uma carga concentrada é aplicada na interface entre duas vigas de propriedades diferentes. A forma correta de dissociar este tipo de problema é mostrada na Figura 8.11.

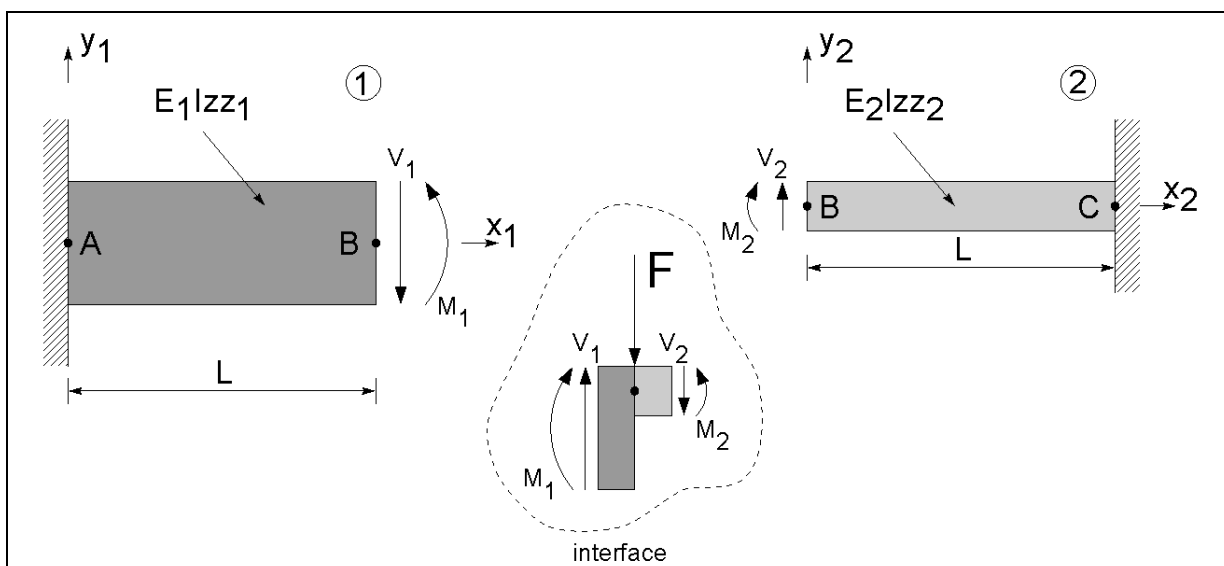


Figura 8.11: Dissociação de sistemas com carga concentrada na interface.

Neste caso, as expressões de compatibilidade cinemática e equilíbrio na interface se tornam:

### 5.1 Compatibilidade cinemática

$$v_1(x_1 = L_1) = v_B = v_2(x_2 = 0) \quad (69)$$

$$\theta_{z1}(x_1 = L_1) = \theta_{zB} = \theta_{z2}(x_2 = 0) \quad (70)$$

### 5.2 Equilíbrio na interface

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + F - V_2 = 0 \quad (71)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_1 - M_2 = 0 \quad (72)$$

### 6. Casos particulares de associação de vigas – vínculo na interface

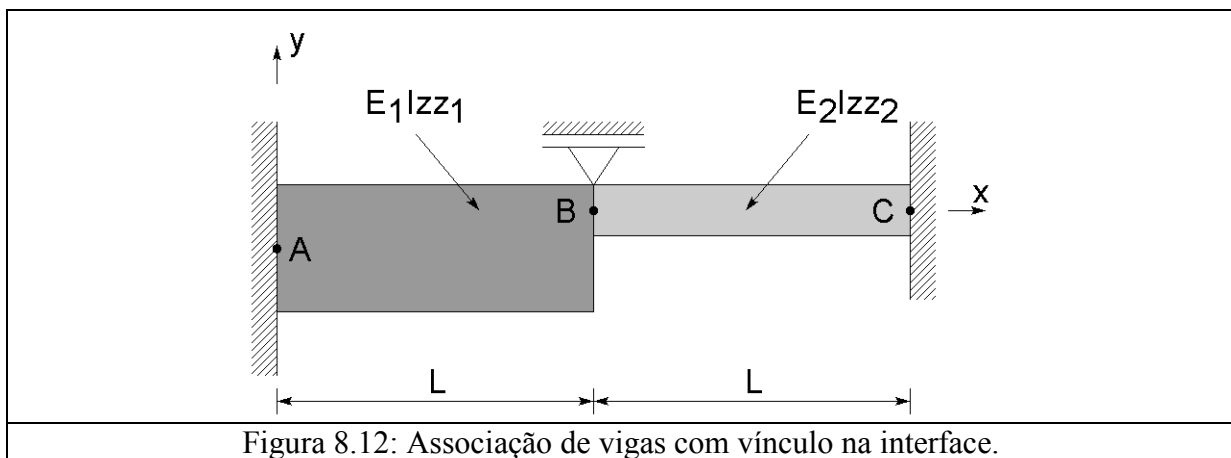


Figura 8.12: Associação de vigas com vínculo na interface.

O mesmo acontece para associações que apresentam um vínculo na interface. A Figura 8.12 mostra um exemplo deste tipo. A dissociação destes sistemas, com o vínculo na interface, é mostrada pela Figura 8.13.

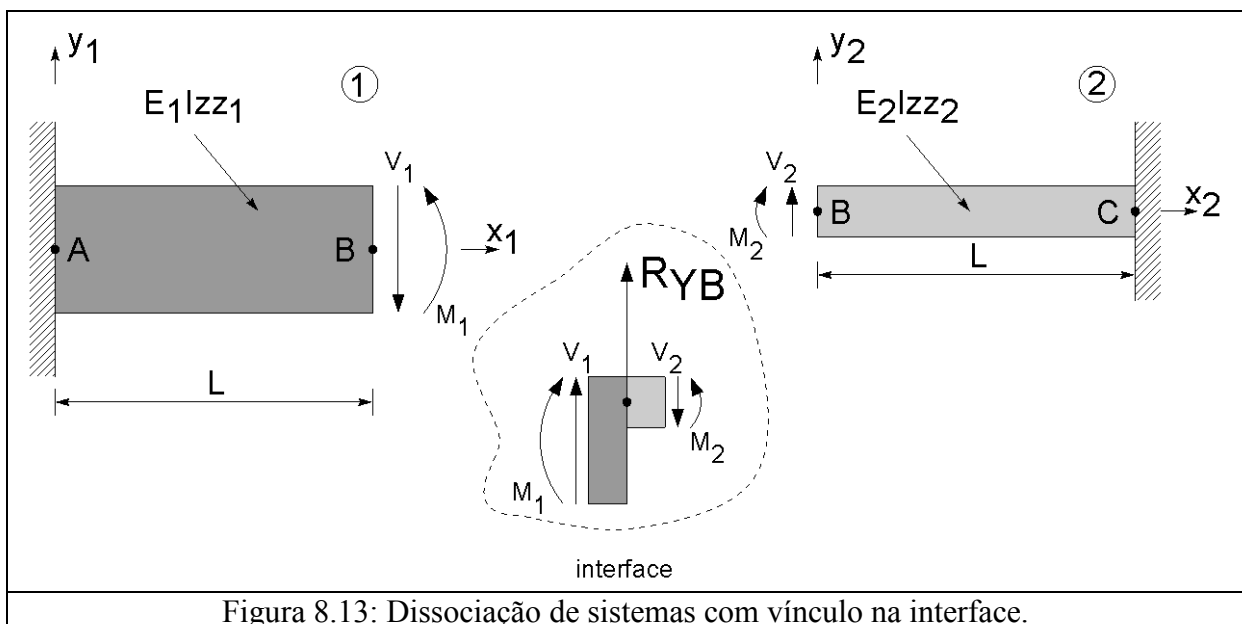


Figura 8.13: Dissociação de sistemas com vínculo na interface.

**6.1 Compatibilidade cinemática**

$$v_1(x_1 = L_1) = v_B = v_2(x_2 = 0) \tag{73}$$

$$\theta_{z1}(x_1 = L_1) = \theta_{zB} = \theta_{z2}(x_2 = 0) \tag{74}$$

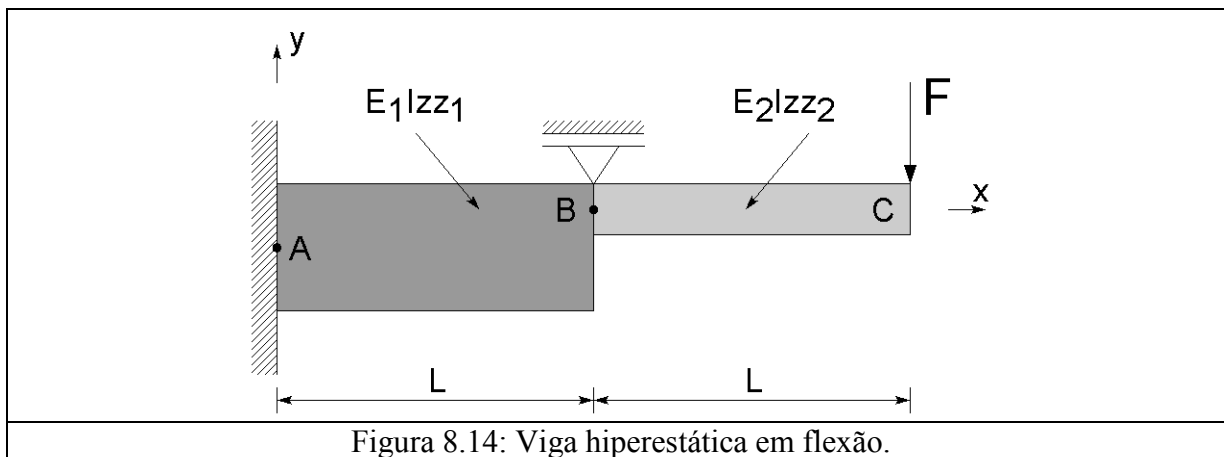
**6.2 Equilíbrio na interface**

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_1 + R_{yB} - V_2 = 0 \tag{75}$$

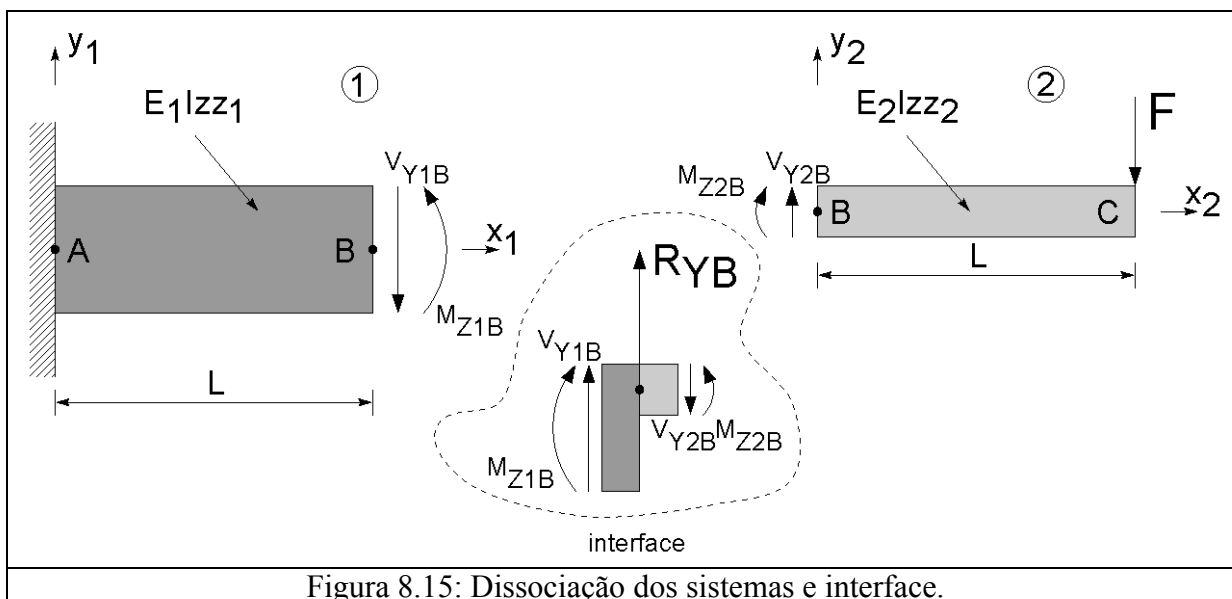
$$\sum M_Z = 0 \Rightarrow M_1 - M_2 = 0 \tag{76}$$

**7. Exemplo 1 (Do Exame de 2001; 10,0 pontos)**

A viga hiperestática mostrada na Figura 8.14, constituída de duas seções transversais cujas propriedades são  $E_1I_{zz1}$  e  $E_2I_{zz2}$ , é solicitada por uma força  $F$  em  $x = 2L$ . Para esta viga, determinar as equações que governam o sistema constituído por estas duas vigas. Indicar com clareza o conjunto de equações que formam a solução. Determinar a deflexão do ponto C,  $v_C$ .



**7.1 Dissociação dos sistemas**



## 7.2 Compatibilidade cinemática e restrição do vínculo

$$v_B = v(x_1 = L) = v(x_2 = 0) \quad (77)$$

$$\theta_{z1}(x_1 = L_1) = \theta_{zB} = \theta_{z2}(x_2 = 0) \quad (78)$$

$$v_B = 0 \quad (79)$$

## 7.3 Equilíbrio na interface

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{YB} + V_{Y1B} - V_{Y2B} = 0 \quad (80)$$

$$\sum M_Z = 0 \Rightarrow -M_{Z1B} + M_{Z2B} = 0 \quad (81)$$

## 7.4 Condições de contorno da viga (1)

$$v_1(x_1 = 0) = 0 \quad (82)$$

$$\theta_{z1}(x_1 = 0) = 0 \quad (83)$$

$$V_{Y1}(x_1 = L_1) = +V_{Y1B} \quad (84)$$

$$M_{Z1}(x_1 = L_1) = +M_{Z1B} \quad (85)$$

## 7.5 Condições de contorno da viga (2)

$$V_{Y2}(x_2 = 0) = +V_{Y2B} \quad (86)$$

$$M_{Z2}(x_2 = 0) = +M_{Z2B} \quad (87)$$

$$V_{Y2}(x_2 = L_2) = +F \quad (88)$$

$$M_{Z2}(x_2 = L_2) = 0 \quad (89)$$

## 7.7 Balanço de incógnitas × equações

As reações na interface entre as vigas são quatro incógnitas:  $V_{Y1B}$ ,  $M_{Z1B}$ ,  $V_{Y2B}$  e  $M_{Z2B}$ . Cada uma das vigas tem 4 constantes de integração que são incógnitas. Por fim, a reação no vínculo B também é desconhecida. Ao todo se tem 13 incógnitas. Com as equações de (77) a (89), tem-se 13 equações com as quais o problema é possível de ser resolvido.

## 8. Casos particulares de associação de vigas – carregamento distribuído

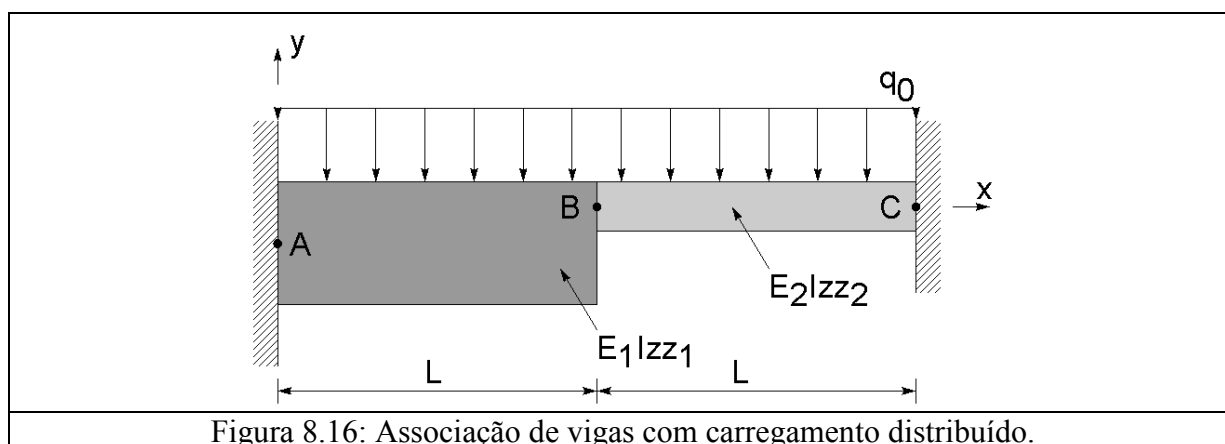


Figura 8.16: Associação de vigas com carregamento distribuído.

No exemplo da Figura 8.16, um carregamento distribuído é aplicado sobre a associação de vigas.

Carregamentos distribuídos precisam de um comprimento útil para que representem uma força resultante. Como interfaces são pontos imateriais, isto é, não têm dimensão, carregamentos distribuídos não se desenvolvem em interfaces (Figura 8.17).

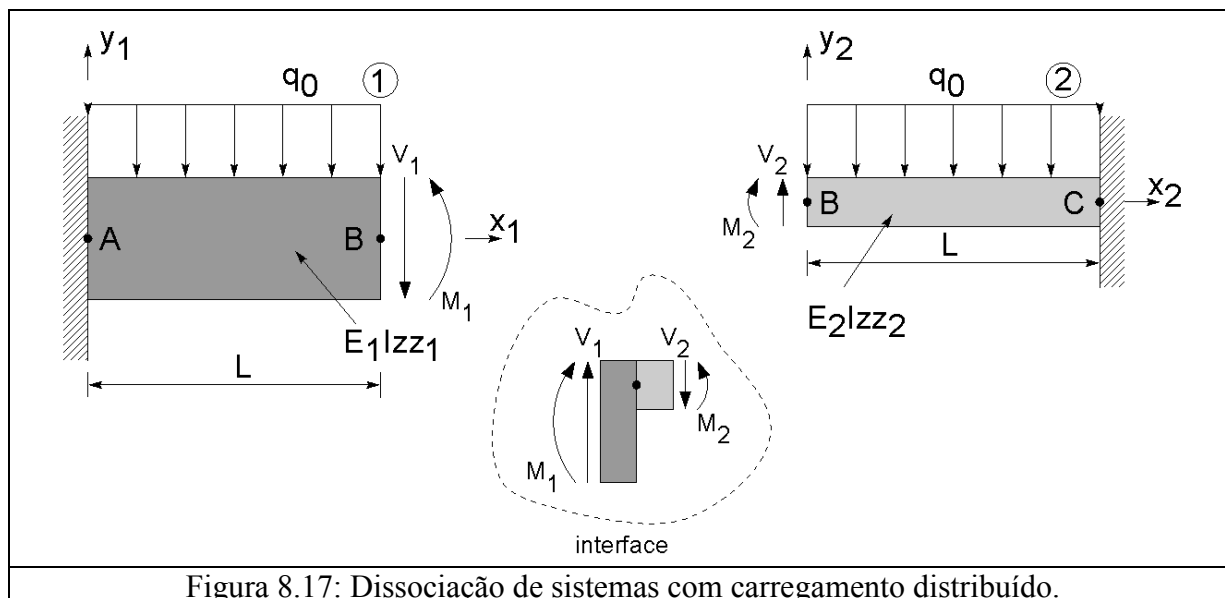


Figura 8.17: Dissociação de sistemas com carregamento distribuído.

### 8.1 Compatibilidade cinemática

$$v_1(x_1 = L_1) = v_B = v_2(x_2 = 0) \quad (90)$$

$$\theta_{z1}(x_1 = L_1) = \theta_{zB} = \theta_{z2}(x_2 = 0) \quad (91)$$

### 8.2 Equilíbrio na interface

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 - V_2 = 0 \quad (92)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_1 - M_2 = 0 \quad (93)$$

## 9. Casos particulares de associação de vigas – rótulas (Da P2 de 03/07/2009; 2,0 pontos)

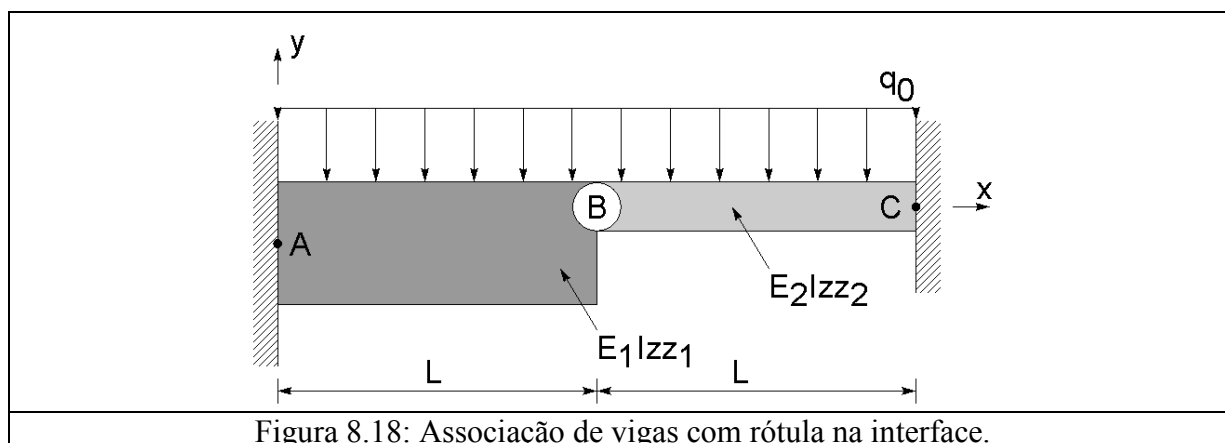
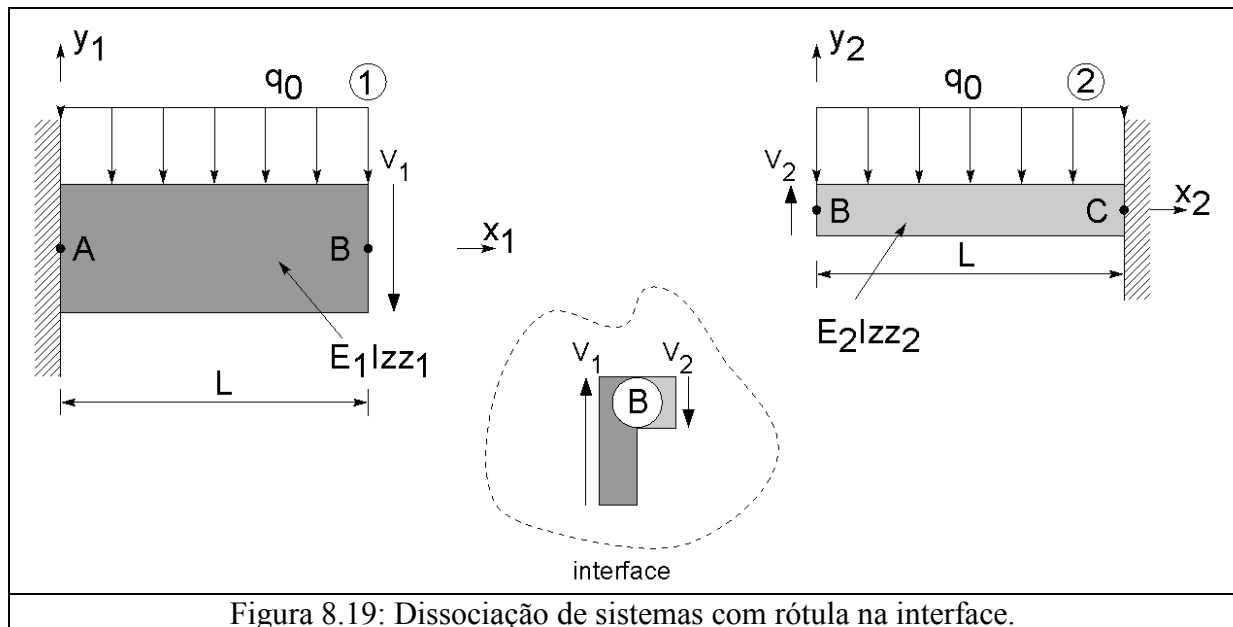


Figura 8.18: Associação de vigas com rótula na interface.

A Figura 8.18 mostra um exemplo de associação de vigas com a presença de uma rótula na interface. Rótulas são características construtivas que não permitem a passagem de momento fletor. Assim, a diferença entre este problema e os anteriores é que não há momento fletor atuando na interface (Figura 8.19). Além disso, como a rótula provoca uma descontinuidade na rotação das vigas, a única compatibilidade cinemática neste tipo de interface é referente à flecha (Equação 94).



### 9.1 Compatibilidade cinemática

$$v_1(x_1 = L_1) = v_B = v_2(x_2 = 0) \quad (94)$$

### 9.2 Equilíbrio na interface

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_1 - V_2 = 0 \quad (95)$$

## 10. Associação de cabos e vigas flexíveis (Da P2 Especial de 17/07/2009; 3,0 pontos / Da P2 de 28/06/2005; 4,0 pontos)

O sistema estrutural mostrado pela Figura 8.20 é composto por uma viga engastada e um cabo. Um momento concentrado é aplicado no meio da viga, que tem módulo de elasticidade  $E$ , momento de inércia  $I_{ZZ}$  e comprimento  $2L$ . O cabo é construído do mesmo material que a viga, tem seção transversal de área  $A$  e comprimento  $H$ . Usando o método de Associação de Sistemas, determine analiticamente a intensidade da força transmitida da viga para o cabo e qual o alongamento do cabo.

### 10.1 Dissociação dos sistemas

A separação do cabo e da viga, juntamente com sua interface, é mostrada na Figura 8.21.

### 10.2 Equilíbrio na interface

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow +V_1 + F_C = 0 \Rightarrow +V_1 = -F_C \quad (96)$$

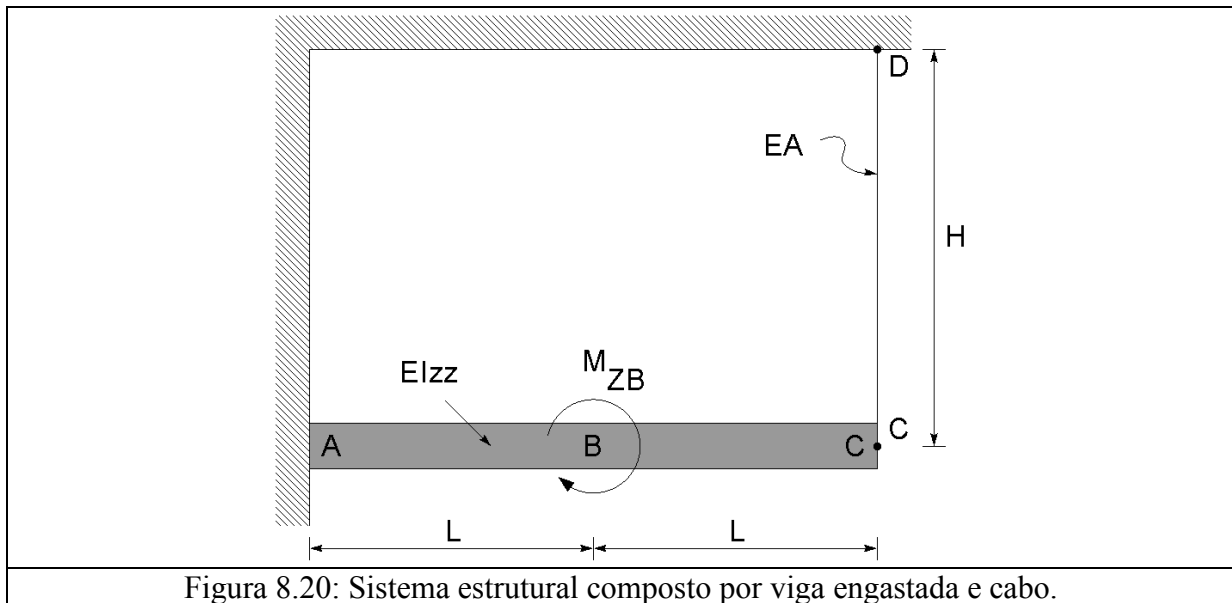


Figura 8.20: Sistema estrutural composto por viga engastada e cabo.

### 10.3 Compatibilidade cinemática

De acordo com o sentido positivo de  $v_C$  e  $u_C$  (Figura 8.21), tem-se:

$$v_C = v(x = 2L) = -u_C = -u(x_C = H) \quad (97)$$

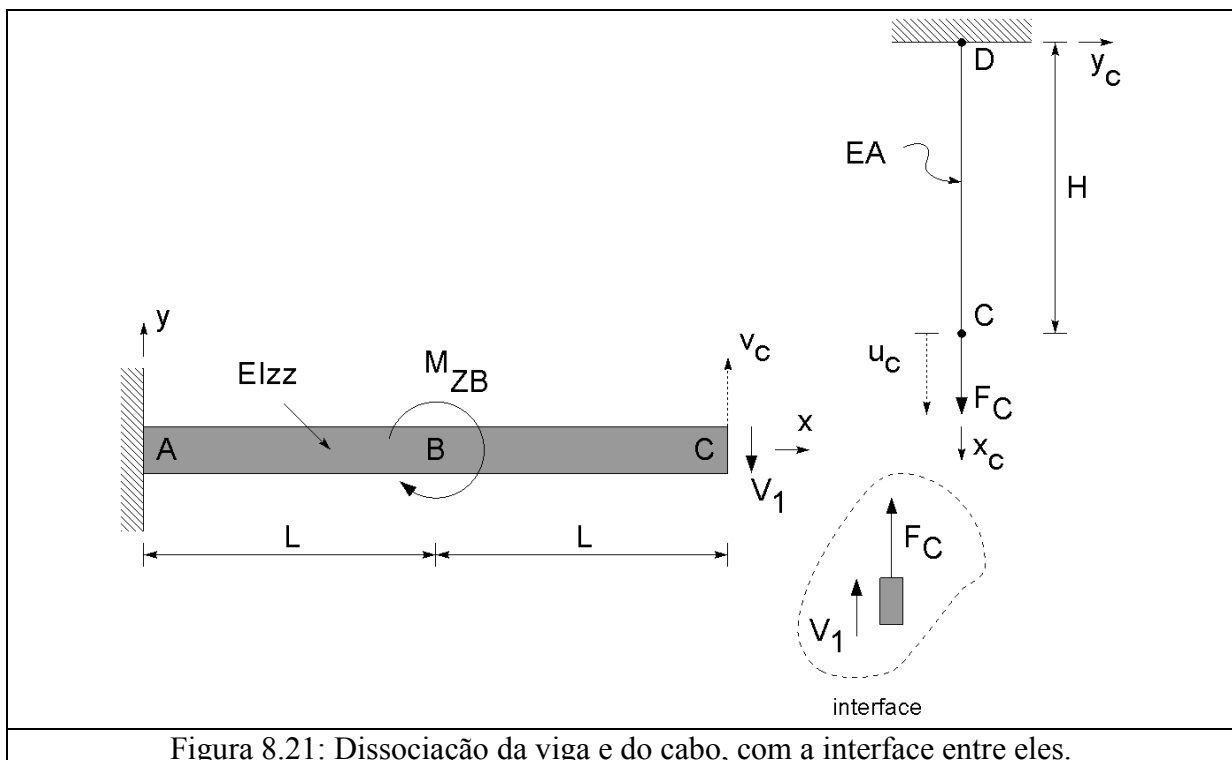


Figura 8.21: Dissociação da viga e do cabo, com a interface entre eles.



### 10.4 Solução do problema da viga

Para esta viga, tem-se a seguinte equação de carregamento e condições de contorno:

$$q(x) = +M_{ZB} \langle x - L \rangle^{-2} \quad (98)$$

$$v(x=0) = 0 \quad (99)$$

$$\theta_z(x=0) = 0 \quad (100)$$

$$M_z(x=2L) = 0 \quad (101)$$

$$V_y(x=2L) = +V_1 \quad (102)$$

A equação diferencial que descreve este problema de viga é:

$$EI_{ZZ} \frac{d^4}{dx^4} v(x) = q(x) \quad (103)$$

A integração da Equação 103, em conjunto com a equação de carregamento e condições de contorno mostradas, permite determinar a expressão da deflexão da viga como sendo:

$$EI_{ZZ} v(x) = \frac{1}{2} M_{ZB} \langle x - L \rangle^2 + \frac{1}{6} V_1 x^3 - \frac{1}{2} (M_{ZB} + 2LV_1) x^2 \quad (104)$$

### 10.5 Solução do problema do cabo

Para um cabo engastado sujeito a uma força concentrada na extremidade, como é o caso deste problema, a expressão do deslocamento é:

$$EAu(x_c) = F_c x_c \quad (105)$$

### 10.6 Solução da associação

Substituindo-se (104) e (105) em (97), tem-se:

$$v(x=2L) = \frac{1}{EI_{ZZ}} \left\{ \frac{1}{2} M_{ZB} L^2 + \frac{4}{3} V_1 L^3 - 2(M_{ZB} + 2LV_1) L^2 \right\} = -u(x_c = H) = -\frac{F_c H}{EA}$$

$$\frac{1}{EI_{ZZ}} \left\{ \frac{1}{2} M_{ZB} L^2 + \frac{4}{3} V_1 L^3 - 2(M_{ZB} + 2LV_1) L^2 \right\} + \frac{F_c H}{EA} = 0 \quad (106)$$

Substituindo-se (96) em (106), tem-se:

$$\frac{1}{EI_{ZZ}} \left\{ \frac{1}{2} M_{ZB} L^2 - \frac{4}{3} F_c L^3 - 2(M_{ZB} - 2LF_c) L^2 \right\} + \frac{F_c H}{EA} = 0 \quad (107)$$

Simplificando (107), chega-se à força transmitida da viga para o cabo:

$$F_C = \frac{9}{2} \frac{M_{zB} AL^2}{(8AL^3 + 3HI_{zz})} \quad (108)$$

Finalmente, substitui-se (108) em (105) para determinar o alongamento do cabo:

$$u_C = u(x_C = H) = \frac{F_C H}{AE} = \frac{9}{2} \frac{M_{zB} HL^2}{(8AL^3 + 3HI_{zz}) E}$$

$$u_C = \frac{9}{2} \frac{M_{zB} HL^2}{(8AL^3 + 3HI_{zz}) E} \quad (109)$$

## 11. Casos particulares de associação de cabos e vigas – forças na interface

A Figura 8.22 mostra um exemplo de associação de cabo e viga flexíveis em que uma carga concentrada é aplicada na interface entre eles. Analogamente ao que foi mostrado na associação de vigas, a dissociação correta deste tipo de problema é mostrada na Figura 8.23.

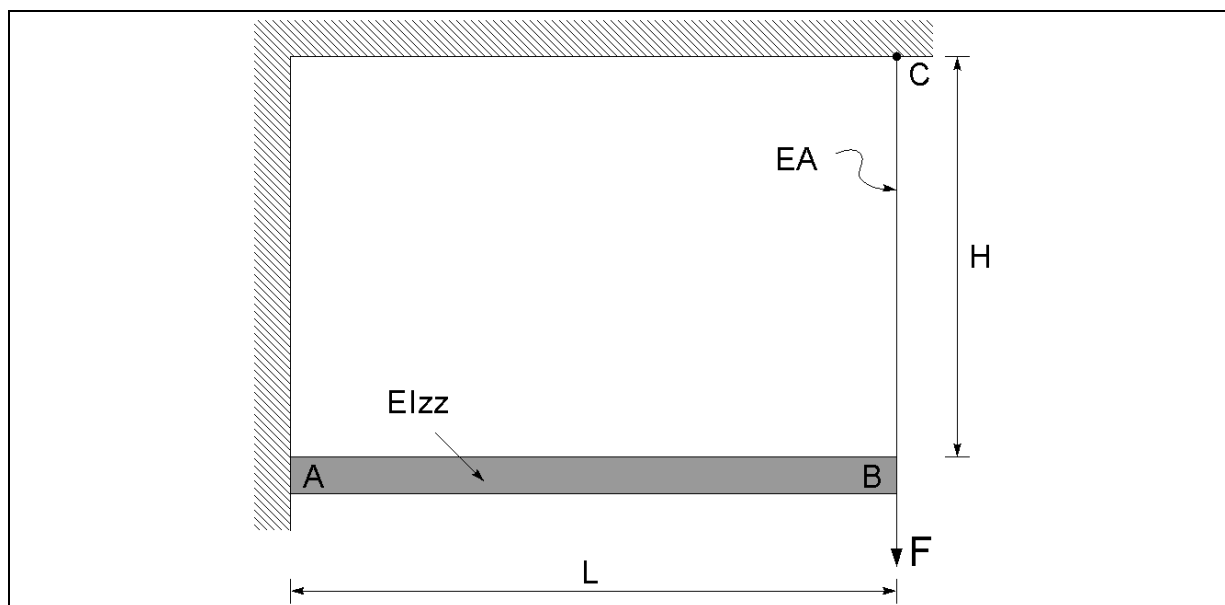


Figura 8.22: Associação de cabo e viga flexíveis com carga concentrada na interface.

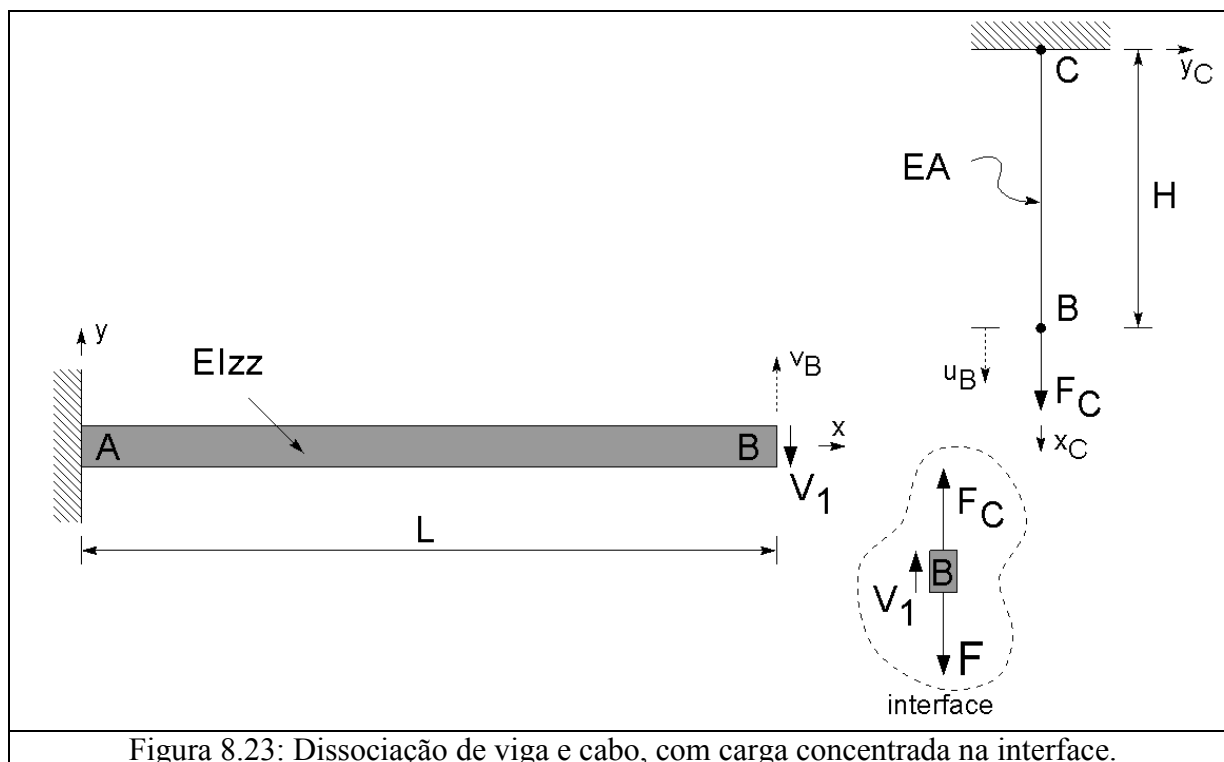
### 11.1 Compatibilidade cinemática

De acordo com o sentido positivo de  $v_B$  e  $u_B$  (Figura 8.23), tem-se:

$$v_B = v(x = L) = -u_B = -u(x_C = H) \quad (110)$$

### 11.2 Equilíbrio na interface

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow +V_1 + F_C - F = 0 \quad (111)$$

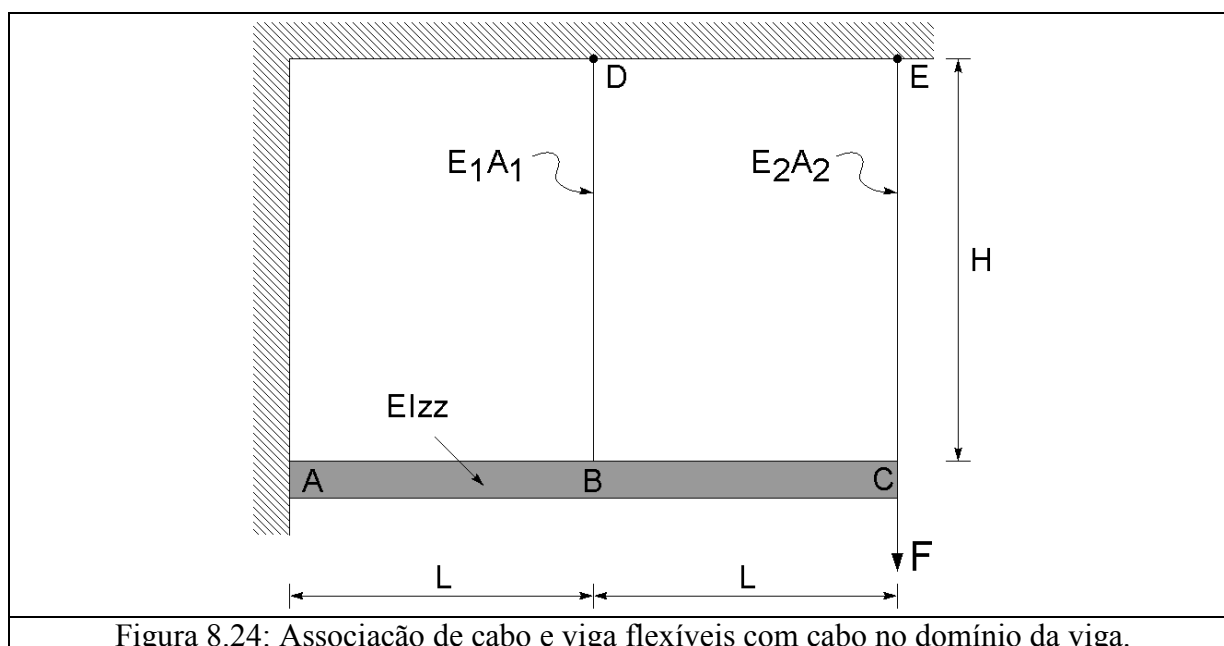


## 12. Casos particulares de associação de cabos e vigas – cabos no domínio da viga

A Figura 8.24 mostra uma associação de cabos e viga flexíveis em que um dos cabos está fixado dentro do domínio da viga. Em situações como esta, a reação do cabo na viga deve ser considerada na equação de carregamento da viga. Neste exemplo, a equação de carregamento é:

$$q(x) = +R_{yC1} \langle x - L \rangle^{-1} \quad (112)$$

A dissociação destes sistemas é mostrada na Figura 8.25.

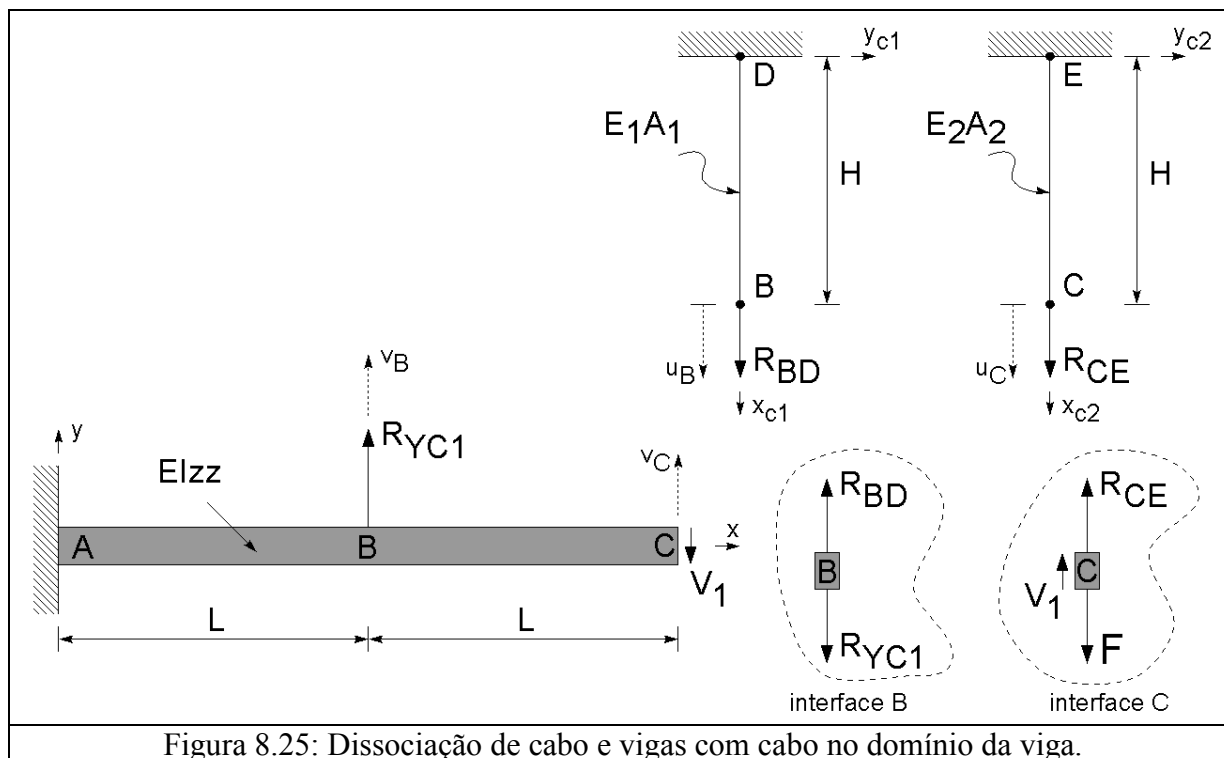


## 12.1 Compatibilidade cinemática

De acordo com o sentido positivo de  $v_B$  e  $u_B$  e de  $u_C$  e  $v_C$  (Figura 8.25), tem-se:

$$v_B = v(x=L) = -u_B = -u(x_{C1} = H) \quad (113)$$

$$v_C = v(x=2L) = -u_C = -u(x_{C2} = H) \quad (114)$$



## 12.2 Equilíbrio nas interfaces

$$\sum F_{Y \text{ interface B}} = 0 \Rightarrow +R_{BD} - R_{YC1} = 0 \quad (115)$$

$$\sum F_{Y \text{ interface C}} = 0 \Rightarrow +V_1 + R_{CE} - F = 0 \quad (116)$$

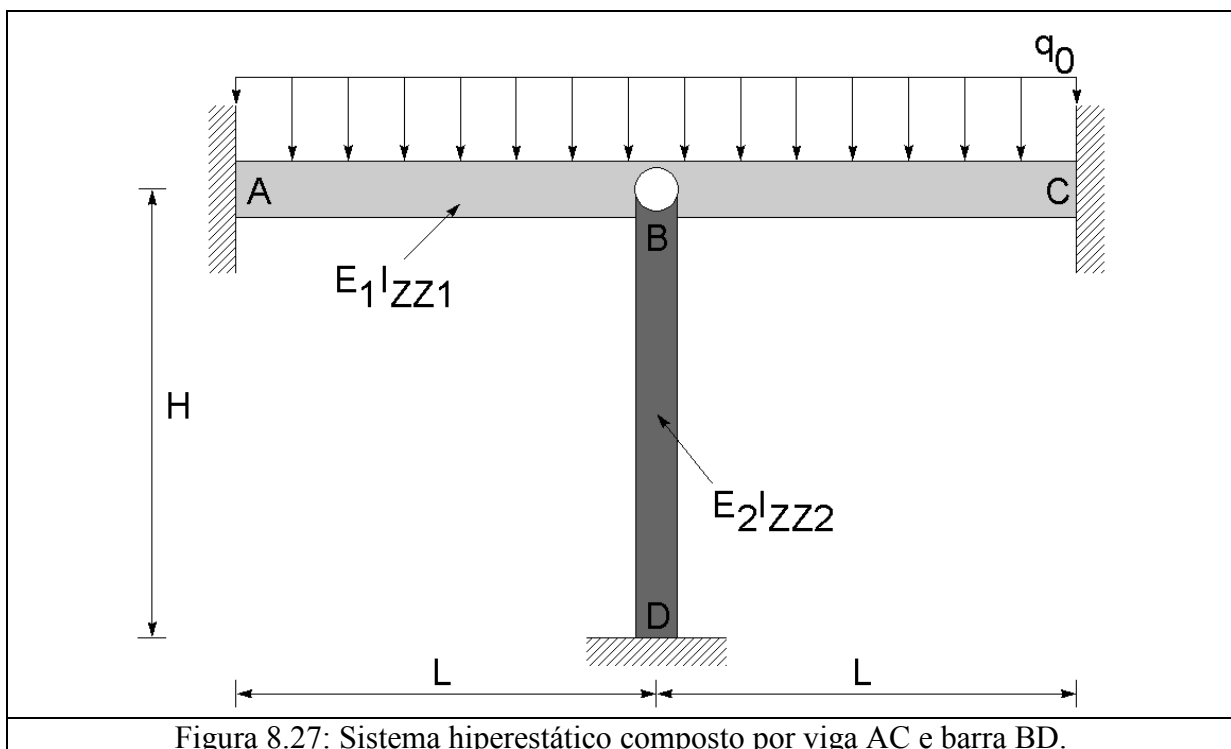
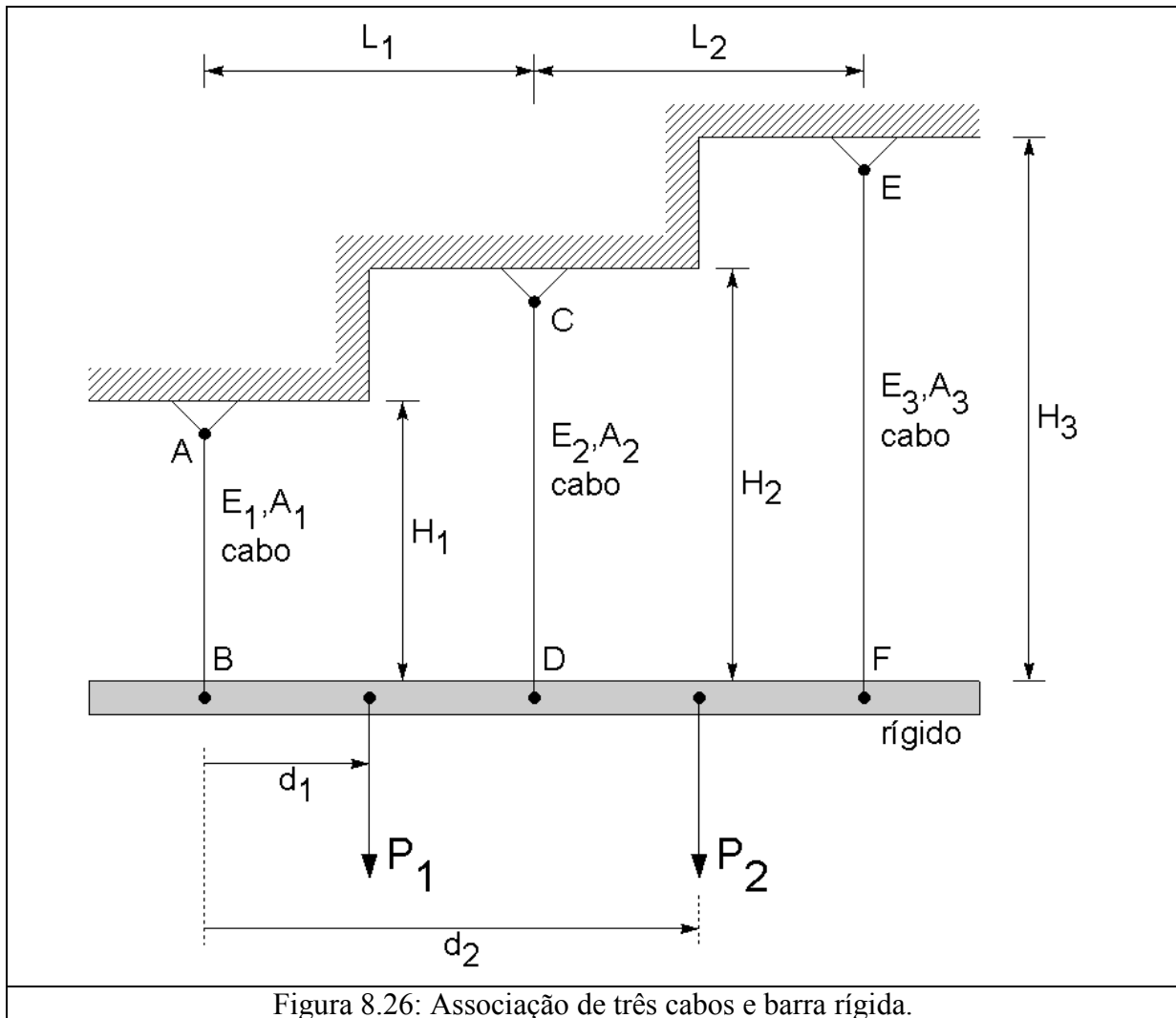
## 13. Exercício proposto

Considere o exemplo de associação entre uma barra rígida e três cabos flexíveis, mostrada na Figura 8.26. Determinar as reações nos apoios e o alongamento dos cabos.

**Dados:**  $L_1 = L_2 = 1000 \text{ mm}$ ;  $H_1 = H_2 = H_3 = 1000 \text{ mm}$ ;  $A_1 = A_2 = A_3 = 10 \text{ mm}^2$ ;  $E_1 = E_2 = E_3 = 210 \text{ GPa}$ ;  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 1000 \text{ N}$ ;  $d_1 = 500 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 1500 \text{ mm}$ .

## 14. Exercício proposto (Do Exame de 2007; 10,0 pontos)

O sistema estrutural hiperestático mostrado na Figura 8.27 é composto por uma viga AC e por uma barra BD. A viga está sujeita a um carregamento uniformemente distribuído  $q_0$  (N/m). A barra está presa à viga por um pino (não há transmissão de momento da viga para a barra). Determinar a expressão da constante de rigidez de mola  $k_{BD}$  da barra BD.



# CAPÍTULO XII

## MÉTODOS DE ENERGIA NA ELASTOSTÁTICA

Prof. Euclides de Mesquita Neto

Fonte: E. Pestel/ J. Wittemburg

Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre

Bibliographisches Institut, Mannheim, 1986

### 1. Introdução

Nos capítulos precedentes foram determinados deslocamentos, deformações e tensões que ocorriam em barras e vigas prismáticas sob determinados carregamentos prescritos. O procedimento em todos os casos era idêntico. Para o sistema não deformado foram escritas as equações de equilíbrio e foram formuladas relações geométricas. Estas continham as deformações e deslocamentos procurados. Finalmente foram introduzidas as equações constitutivas que acoplavam deformações e tensões. A partir desta etapa podiam ser determinadas todas as incógnitas.

Das três etapas acima descritas (equilíbrio, equações constitutivas e geometria) a maior dificuldade estava na síntese ou determinação das relações geométricas adequadas. Estas dificuldades crescem consideravelmente se em vez de barras e vigas investigarmos sistemas estruturais bem mais complexos como, por exemplo, vigas curvas, treliças, discos, placas, cascas, etc. Rapidamente encontraremos o limite a partir do qual as dificuldades não serão superáveis. Para estes casos necessitamos de novos métodos de cálculo.

Os chamados Métodos de Energia da Elastostática são estes novos métodos. Relações geométricas são aqui também necessárias, mas elas assumem um significado secundário. Em lugar das equações de equilíbrio aparecerão agora expressões nas quais o trabalho externo de uma força para deformar um sistema se relaciona com uma energia armazenada no próprio sistema. As equações constitutivas serão utilizadas como o foram até o presente momento. Uma das razões para a maior eficiência dos métodos de energia pode ser encontrada no fato de que energia e trabalho são grandezas escalares ao passo que forças e deslocamentos são grandezas vetoriais. O cálculo com grandezas escalares é significativamente mais simples.

### 2. Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para um corpo elástico ideal

O ponto de partida de todos os métodos de energia é o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Este princípio expressa uma condição de equilíbrio:

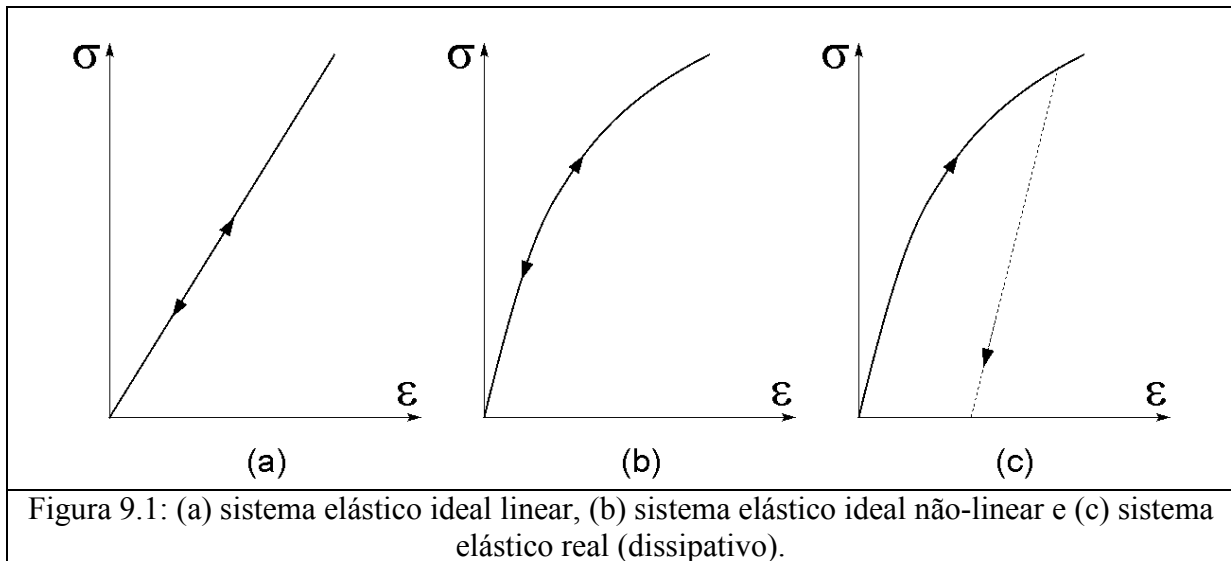
*“Um sistema elástico ideal sujeito à ação de forças externas se encontra em posição ou condição de equilíbrio quando, para um dado deslocamento virtual a partir desta posição de equilíbrio, o trabalho virtual das forças externas  $\delta W_a$  for igual à variação da virtual energia de deformação  $\delta U$  armazenado no sistema.”*

Expresso de forma matemática o princípio acima se torna:

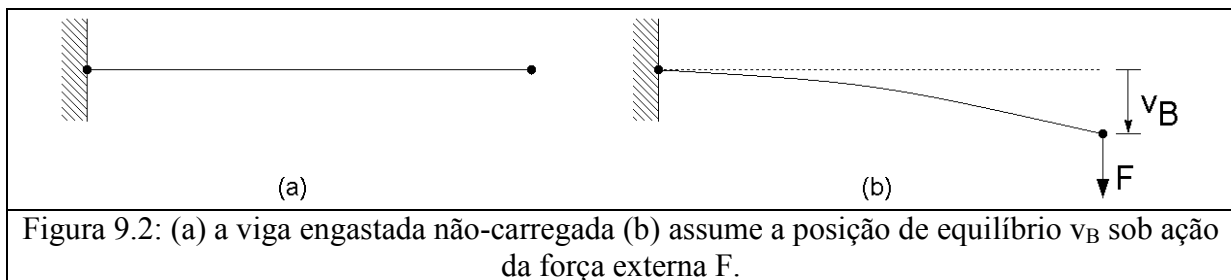
$$\delta W_a = \delta U \tag{1}$$

Este teorema pouco claro contém uma série de termos que deverão ser explicados mais detalhadamente. O termo *sistema elástico* inclui tanto os sistemas elástico lineares quanto os não-lineares. A expressão *elástico ideal* significa que toda a deformação causada por uma força desaparece completamente se a força for retirada. A Figura 9.1 mostra um exemplo de

sistema elástico ideal (ou conservativo) linear e não-linear e de um sistema elástico real, dissipativo.

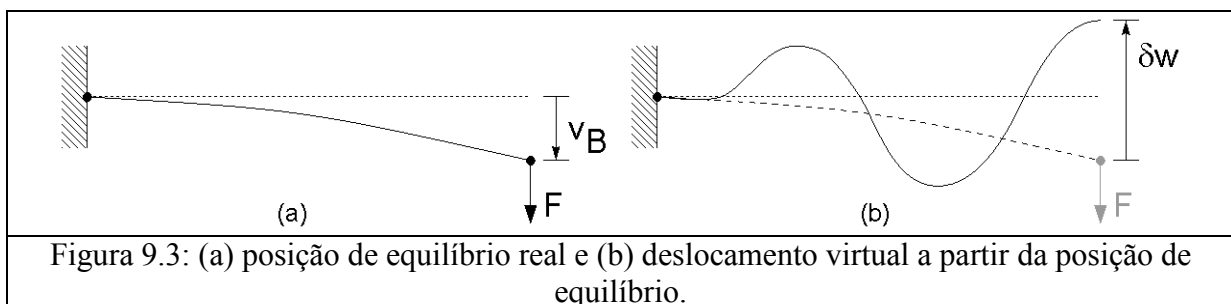


A expressão *posição de equilíbrio* é a posição que um sistema assume quando sob ação de forças externas. No exemplo da Figura 9.2,  $v_B$  é a posição de equilíbrio que a viga engastada assumiu sob ação da força  $F$ .



O termo mais importante do teorema é, sem dúvida, *deslocamento virtual*. Sem o acréscimo do termo *virtual* à palavra deslocamento tem o significado que já lhe foi atribuída, isto é, de que após o deslocamento o sistema se encontra em outra posição. A expressão técnica *deslocamento virtual* refere-se a um deslocamento que:

- é compatível com todos os vínculos cinemáticos do sistema;
- é infinitesimalmente pequeno e
- dentro destas limitações, é absolutamente *arbitrário*.



Vínculos cinemáticos são restrições aos deslocamentos possíveis. Eles surgem da forma de fixação do sistema e da rigidez dos materiais que o compõe. Por exemplo, a viga da Figura 9.3 pode ser deformada de modo que todos os pontos no engaste mantenham sua posição e que ao longo de seu comprimento não surjam nenhuma descontinuidade ou mesmo uma ‘quina’.

A Figura 9.4a dá um exemplo de deslocamento virtual válido. Sua expressão é arbitrária, contínua, e é compatível com a vinculação (neste caso, o engaste). A Figura 9.4b mostra um caso de deslocamento virtual incompatível com a vinculação, porque, ao contrário do que acontece com o deslocamento real de uma viga engastada, neste caso tem-se:

$$\delta v(x=0) \neq 0, \frac{d}{dx} \delta v(x=0) = \delta \theta_z(x=0) \neq 0$$

Nas figuras 9.4c e 9.4d, tem-se dois exemplos de deslocamentos virtuais também não válidos. Na primeira, o deslocamento virtual  $\delta v(x)$  é descontínuo, e na segunda sua derivada  $\delta \theta_z(x)$  é descontínua.

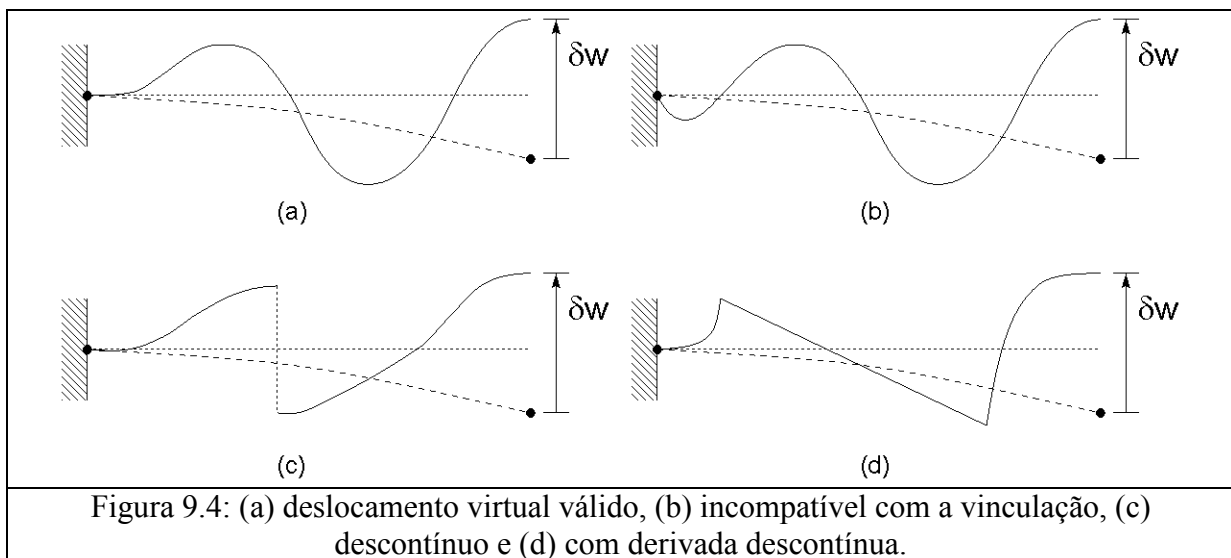


Figura 9.4: (a) deslocamento virtual válido, (b) incompatível com a vinculação, (c) descontínuo e (d) com derivada descontínua.

A mais importante propriedade dos deslocamentos virtuais se esconde na palavra *arbitrária*. A Equação 1 é geral no sentido de que qualquer deslocamento compatível a satisfaz e não somente algum deslocamento particular (desconhecido ou procurado).

Arbitrariedade na escolha dos deslocamentos também implica que eles não obrigatoriamente devem ser considerados como diferenciais de alguma função. Este é o motivo pelo qual eles são designados pelo símbolo  $\delta$  e não pelo clássico símbolo do diferencial  $d$ . Dentro da infinidade de deslocamentos virtuais possíveis, podemos escolher alguns bem determinados e expressar os termos  $\delta W_a$  e  $\delta U$  através deles. Por exemplo, podemos escolher aqueles deslocamentos que realmente ocorrem sob determinadas condições. Nestes casos os deslocamentos assumem o caráter de diferenciais. É esta grande gama de possibilidades que se constitui na força do *Princípio dos Trabalhos Virtuais* (PTV). Para um deslocamento virtual as forças externas atuando sobre o sistema são deslocadas sem mudança de sentido ou módulo. Neste processo elas realizam um trabalho infinitesimalmente pequeno. Este trabalho recebe o nome de *trabalho virtual das forças externas* e está representado na Equação 1 pelo termo  $\delta W_a$ .

A *energia de deformação*  $U$  armazenada no sistema é a grandeza física mais importante de todos os métodos de energia. Ela ainda será discutida de forma detalhada. O princípio é



uma lei independente da natureza. Ele não pode ser deduzido das equações de equilíbrio utilizadas até agora (soma de todas as forças e momentos é igual a zero). As propriedades elásticas do sistema não têm qualquer função nas equações de equilíbrio. Por sua vez as propriedades elásticas são essenciais para a energia de deformação  $U$  e para a *variação de energia de deformação*  $\delta U$ . Do PTV não resulta, entretanto, nenhuma expressão que esteja em contradição com aquelas obtidas pelas equações de equilíbrios e constitutivas.

Na estática já foi apresentado um princípio dos trabalhos virtuais para corpos rígidos. Ele representa um caso particular do princípio aqui formulado. Corpos rígidos não podem armazenar energia de deformação. Para eles,  $U = 0$  e conseqüentemente  $\delta U = 0$ . A Equação 1 assume então a forma:

$$\delta W_a = 0 \quad (2)$$

O princípio dos trabalhos virtuais na forma da Equação 1 é ele próprio um caso especial de um princípio mais geral que rege os sistemas estáticos e também cinéticos com quaisquer propriedades materiais. Na sua forma mais geral ele é conhecido com “Princípio de D’Alembert”.

### 3. Princípio de Conservação de Energia (PCE)

O princípio dos trabalhos virtuais será agora utilizado para deduzirmos o princípio da conservação da energia. Seja um sistema elástico linear ou não-linear que pode estar arbitrariamente vinculado e deformado. Ele pode ser interna- e externamente estaticamente determinado ou indeterminado. No sistema atuam quaisquer formas de carregamento externo, tal como mostrado esquematicamente na Figura 9.5 abaixo.

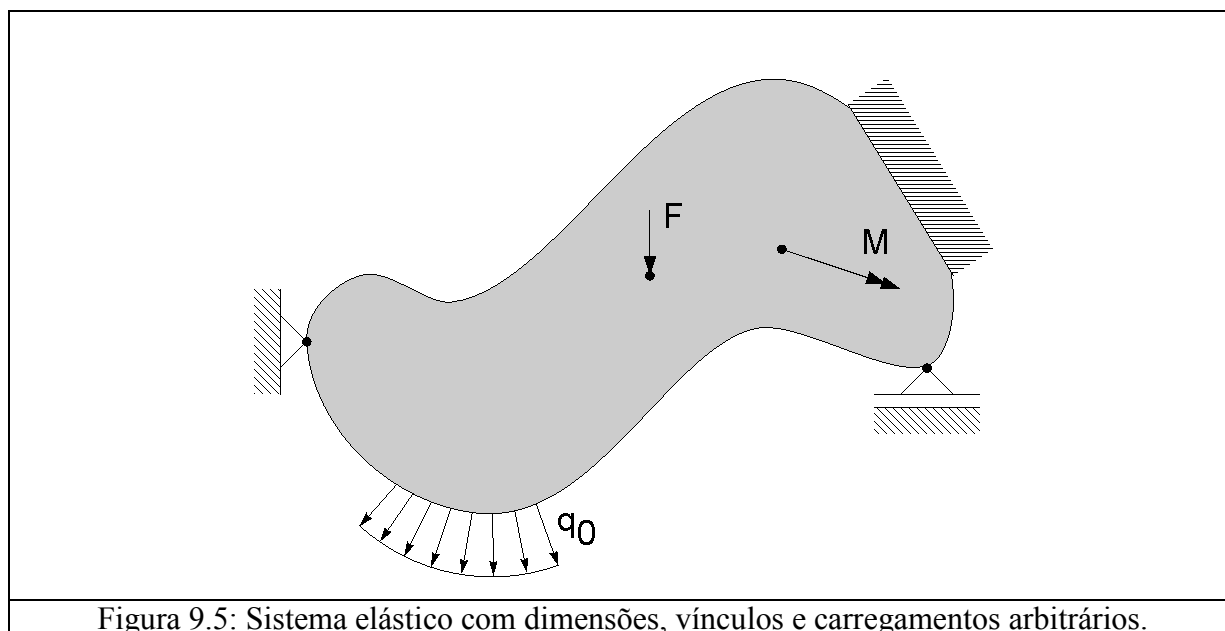


Figura 9.5: Sistema elástico com dimensões, vínculos e carregamentos arbitrários.

Sob a ação do carregamento o sistema assume uma determinada posição de equilíbrio. Nós vamos imaginar que os carregamentos externos crescem com uma velocidade infinitamente pequena de zero ao seu valor máximo. Neste processo o sistema passa por uma série contínua de situações ou condições de equilíbrio intermediárias ao final das quais a posição de equilíbrio permanente será atingida. Este processo não é unívoco, pois nada foi dito a respeito da seqüência em que o carregamento ocorre, se todas as forças crescem

proporcionais umas às outras ou umas após as outras e em que seqüência. Mostraremos mais adiante que o resultado do processo não depende da seqüência dos carregamentos para sistemas elásticos.

Imaginemos agora alguma lei de crescimento das forças externas de forma que uma determinada seqüência de posições de equilíbrio seja percorrida. A qualquer das situações de equilíbrio à qual associamos um determinado valor das forças externas, vamos aplicar o princípio dos trabalhos virtuais. Estas forças externas realizarão um trabalho virtual  $\delta W_a$  quando elas sofrerem um deslocamento virtual sem alterar seu módulo e direção. Da infinita variedade de possíveis deslocamentos virtuais vamos escolher aquele que realmente ocorre devido a um acréscimo infinitesimal das forças externas, sempre obedecendo à lei de crescimento escolhida para as mesmas. Isto significa que escolhemos para deslocamentos virtuais dos pontos de aplicação das forças externas deslocamentos que realmente ocorrem que na verdade são os diferenciais das funções de deslocamentos observadas quando do crescimento das forças externas. Conseqüentemente, o trabalho virtual  $\delta W_a$  também passa a ser um diferencial, e na verdade o diferencial do trabalho total realizado ao longo do crescimento das forças,  $dW_a$ . Analogamente  $\delta U$  passa a ser o diferencial  $dU$  da energia de deformação armazenada no sistema durante o processo. A expressão matemática do princípio dos trabalhos virtuais  $\delta W_a = \delta U$  assume então a forma  $dW_a = dU$ . Esta equação pode ser integrada entre os estados com carregamento nulo e carregamento máximo, fornecendo a expressão abaixo.

$$W_a = U \quad (3)$$

Na Equação 3 o termo  $W_a$  designa o trabalho (real) realizado pelas forças externas durante o processo completo de carregamento. Ele é chamado de *trabalho de deformação das forças externas*. O termo  $U$  designa a energia de deformação armazenada no sistema deformado. A Equação 3 é um teorema de conservação de energia, que afirma que o trabalho das forças externas durante o processo de deformação  $W_a$  se converterá integralmente, isto é, sem perdas, na energia de deformação armazenada no sistema  $U$ . Necessitamos ainda mostrar que as grandezas  $W_a$  e  $U$  não dependem da ordem ou seqüência que as forças externas crescem aos seus valores máximos. Esta demonstração será feita mais adiante.

#### 4. Energia de deformação de um sistema elástico linear

Voltemos ao sistema da Figura 9.5 e à seqüência de posições de equilíbrio percorridas devido a um crescimento muito lento do carregamento. A partir deste ponto vamos limitar a nossa análise para materiais elásticos lineares. A energia de deformação  $U$  se encontra distribuída em todo o sistema, uma vez que todos os elementos de volume se deformam. Ela pode ser expressa como a integral sobre todo o volume de uma grandeza definida como *densidade de energia de deformação* (por unidade de volume)  $dU/dV$ :

$$U = \int_V \frac{dU}{dV} dV \quad (4)$$

Para determinarmos a densidade de energia de deformação consideremos um volume elementar do corpo em questão, tal qual mostrado na Figura 9.6, abaixo. As dimensões do corpo antes do carregamento são  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ . Segundo o teorema da conservação da energia, Equação 3, a energia armazenada no volume elementar é igual ao trabalho realizado durante o processo de deformação pelas forças externas ao volume que, neste caso, são as forças

provenientes das distribuições de tensões normais ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ ) e tangenciais ( $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ ) nas faces do volume.

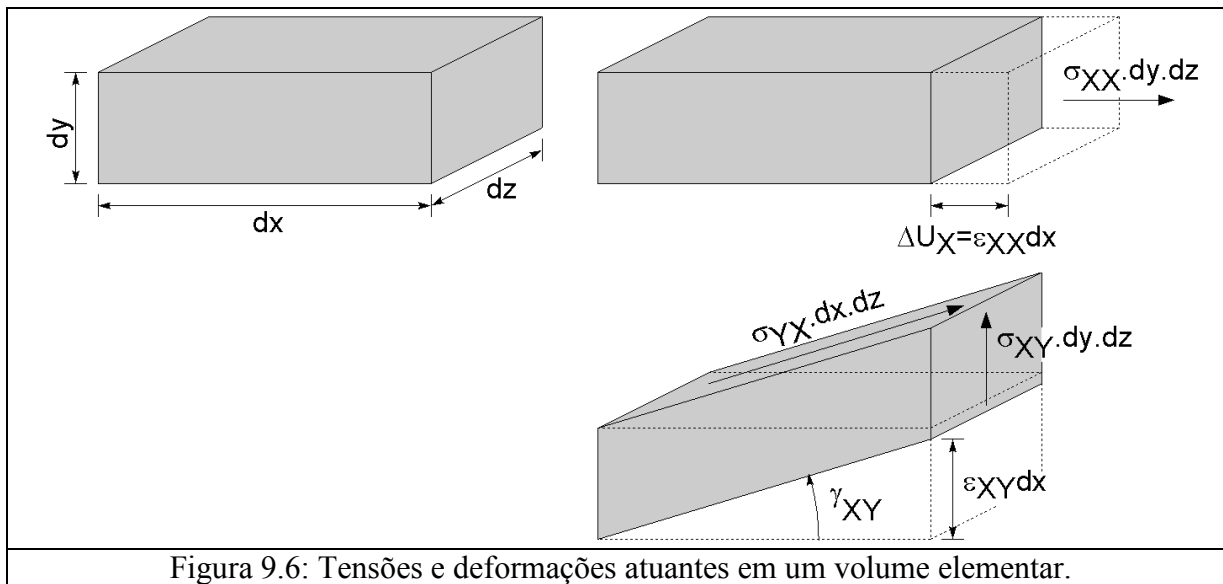


Figura 9.6: Tensões e deformações atuantes em um volume elementar.

Quando os carregamentos crescem de forma infinitamente lenta de zero aos seus valores finais, também crescem de forma correspondente os valores das tensões. Neste processo ocorrem deformações lineares (alongamentos ou encurtamentos) ( $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  e  $\epsilon_{zz}$ ) e angulares ( $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ ) que são proporcionais às tensões devido ao comportamento elástico linear do material. A Figura 9.6b mostra a relação entre uma força normal  $N_x$ , devido às tensões normais  $\sigma_{xx}$  plotada contra o alongamento da face do volume elementar na direção  $x$ ,  $\Delta u_x$ .

$$N_x = \sigma_{xx} dy \cdot dz \tag{5}$$

$$\Delta u_x = \epsilon_{xx} dx \tag{6}$$

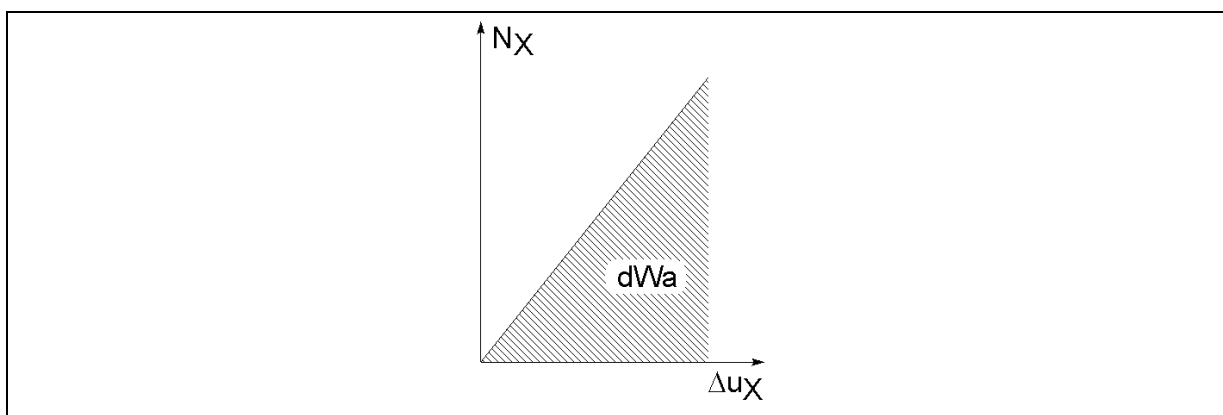


Figura 9.6b: Trabalho realizado pela força normal para causar uma deformação. Notar que  $\Delta u_x$  foi causada por  $N_x$  ao longo do seu processo de crescimento.

Ao crescer até seu valor final a força normal  $N_x = \sigma_{xx} dy dz$  realiza um trabalho igual à área mostrada sob a curva força  $\times$  deslocamento da Figura 9.6b, e que pode ser escrito como:

$$N_x \Delta u_x = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} dy \cdot dz) (\epsilon_{xx} dx) = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV \tag{7}$$

A força associada à tensão tangencial realiza, de forma análoga, um trabalho ao longo da deformação  $\varepsilon_{XY}$  que pode ser escrito como:

$$\frac{1}{2}(\sigma_{XY}dydz)(\gamma_{YZ}dx) = \frac{1}{2}\sigma_{XY}\gamma_{XY}dV \quad (8)$$

Uma expressão análoga pode ser escrita para todas as forças externas atuando no volume elementar e que foram causadas pela distribuição de tensões. Assim o trabalho das forças externas  $dW_a$  sobre o volume elementar pode ser escrito como:

$$dW_a = \frac{1}{2}(\sigma_{XX}\varepsilon_{XX} + \sigma_{YY}\varepsilon_{YY} + \sigma_{ZZ}\varepsilon_{ZZ} + \sigma_{XY}\gamma_{XY} + \sigma_{XZ}\gamma_{XZ} + \sigma_{YZ}\gamma_{YZ}) \quad (9)$$

Aplicando o teorema de conservação da energia  $dW_a = dU$  em (9) e dividindo pelo volume  $dV$ , achamos a seguinte expressão de energia de deformação,

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}(\sigma_{XX}\varepsilon_{XX} + \sigma_{YY}\varepsilon_{YY} + \sigma_{ZZ}\varepsilon_{ZZ} + \sigma_{XY}\gamma_{XY} + \sigma_{XZ}\gamma_{XZ} + \sigma_{YZ}\gamma_{YZ}) \quad (10)$$

As deformações lineares e angulares  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  podem ser eliminadas da Equação 10 com auxílio das equações constitutivas para materiais homogêneos, isotrópico e lineares, também conhecida como Lei de Hooke. Isto nos leva à seguinte equação:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E}[\sigma_{XX}^2 + \sigma_{YY}^2 + \sigma_{ZZ}^2 - 2\nu(\sigma_{XX}\sigma_{YY} + \sigma_{XX}\sigma_{ZZ} + \sigma_{YY}\sigma_{ZZ})] + \frac{1}{2G}(\sigma_{XY}^2 + \sigma_{XZ}^2 + \sigma_{YZ}^2) \quad (11)$$

Integrando a Equação 11 energia de deformação para o sobre todo o corpo temos corpo inteiro

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_{XX}^2 + \sigma_{YY}^2 + \sigma_{ZZ}^2 - 2\nu(\sigma_{XX}\sigma_{YY} + \sigma_{XX}\sigma_{ZZ} + \sigma_{YY}\sigma_{ZZ})] + \frac{1}{G} (\sigma_{XY}^2 + \sigma_{XZ}^2 + \sigma_{YZ}^2) \right\} dV \quad (12)$$

Conforme podemos observar a partir da Equação 12, a energia de deformação  $U$  somente depende do estado de tensões finais que atuam no corpo após o desenvolvimento completo do carregamento. Ela não está relacionada com o caminho ou a seqüência de crescimento da forças externas através da qual o corpo foi carregado. Uma energia com estas características é chamada de *energia potencial*. Se quisermos calcular a energia de deformação interna de um sistema mecânico devemos explicitar as tensões  $\sigma_{ij}$  em função dos esforços que atuam nas seções transversais, tais como forças normais, cortantes e momentos fletores. Estes esforços resultantes nas seções transversais podem agora ser expressos em função dos carregamentos externos, de forma que no final a expressão para  $U$  será uma função do carregamento externo.

#### 4.1 Energia de deformação de barras

Seja uma barra de comprimento  $L$  com uma seção transversal variável ao longo do eixo  $x$ ,  $A(x)$  e submetida a um esforço normal também função de  $x$ ,  $N_x(x)$ . Escolhemos como volume elementar  $dV$  uma barra de comprimento  $dx$  e área  $A(x)$ .

$$dV = A(x) dx \quad (13)$$

As tensões atuando neste elemento infinitesimal são:

$$\sigma_{XX} = N_X(x)/A(x), \quad \sigma_{XY} = \sigma_{XZ} = \sigma_{YY} = \sigma_{YZ} = \sigma_{ZZ} = 0 \quad (14)$$

Aplicando (14) em (12), obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma_{XX}^2(x)}{E} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{E} \left( \frac{N_X(x)}{A(x)} \right)^2 A(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N_X^2(x)}{EA(x)} dx \quad (15)$$

No caso particular de uma barra de área de seção transversal  $A(x) = A$  e uma força normal  $N(x) = N$  constantes, a Equação 15 de reduz a:

$$U = \frac{1}{2} \frac{N_X^2 L}{EA} \quad (16)$$

#### 4.1.1 Exemplo 1: barra homogênea

Considere a barra homogênea mostrada na Figura 9.7a. O trabalho da força externa  $F$  para deslocar o ponto B uma distância  $u_B$  é:

$$W_a = \frac{1}{2} F \cdot u_B \quad (b1)$$

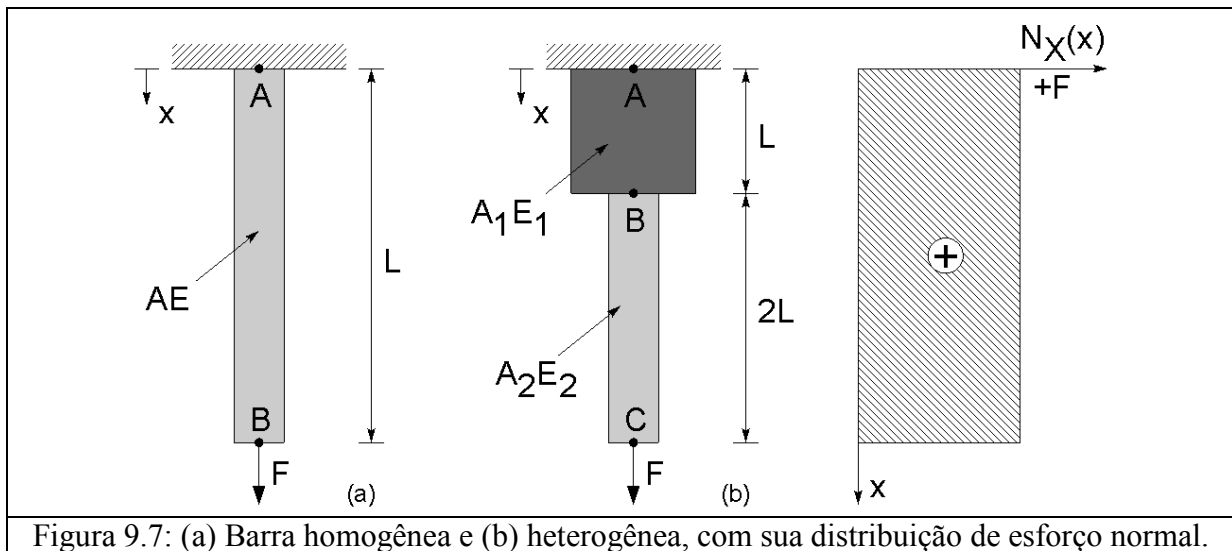


Figura 9.7: (a) Barra homogênea e (b) heterogênea, com sua distribuição de esforço normal.

A energia de deformação dessa barra é:

$$U_{\text{barra}} = \frac{1}{2E} \int_{x=0}^{x=L} \frac{N_X(x)^2}{A(x)} dx = \frac{1}{2E} \int_{x=0}^{x=L} \frac{F^2}{A} dx = \frac{F^2 L}{2AE} \quad (b2)$$

Do Princípio de Conservação de Energia, tem-se então:

$$W_a = U \Rightarrow \frac{1}{2} F \cdot u_B = \frac{F^2 L}{2AE} \Rightarrow u_B = \frac{FL}{AE} \quad (b3)$$

#### 4.1.2 Exemplo 2: barra heterogênea

Considere agora a barra heterogênea mostrada na Figura 9.7b. O trabalho da força externa  $F$  para deslocar o ponto  $C$  uma distância  $u_C$  é:

$$W_a = \frac{1}{2} F \cdot u_C \quad (b4)$$

Para calcular a energia de deformação dessa barra, é necessário dividir o intervalo de integração em duas partes, porque tanto o material quanto a área variam ao longo do domínio da barra.

$$\begin{aligned} U_{\text{barra}} &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=3L} \frac{N_x(x)^2}{E(x)A(x)} dx = \frac{1}{2E_1} \int_{x=0}^{x=L} \frac{F^2}{A_1} dx + \frac{1}{2E_2} \int_{x=L}^{x=3L} \frac{F^2}{A_2} dx = \\ &= \frac{F^2}{2E_1 A_1} \int_{x=0}^{x=L} dx + \frac{F^2}{2E_2 A_2} \int_{x=L}^{x=3L} dx = \frac{F^2 L}{2} \left( \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right) \end{aligned} \quad (b5)$$

Do Princípio de Conservação de Energia, tem-se então:

$$W_a = \frac{1}{2} F \cdot u_C = U_{\text{barra}} = \frac{F^2 L}{2} \left( \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right) \Rightarrow u_C = FL \left( \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right) \quad (b6)$$

#### 4.2 Energia de deformação de eixos

Seja um eixo de seção circular cheia ou vazada com um momento polar de inércia  $J_p(x)$  submetido a um momento torsor  $M_X(x)$ . Como volume elementar escolhe-se uma área  $dA$  na seção transversal com um comprimento  $dx$ , tal como indicado na Figura 9.8. Assim, tem-se  $dV = dA \cdot dx$ .

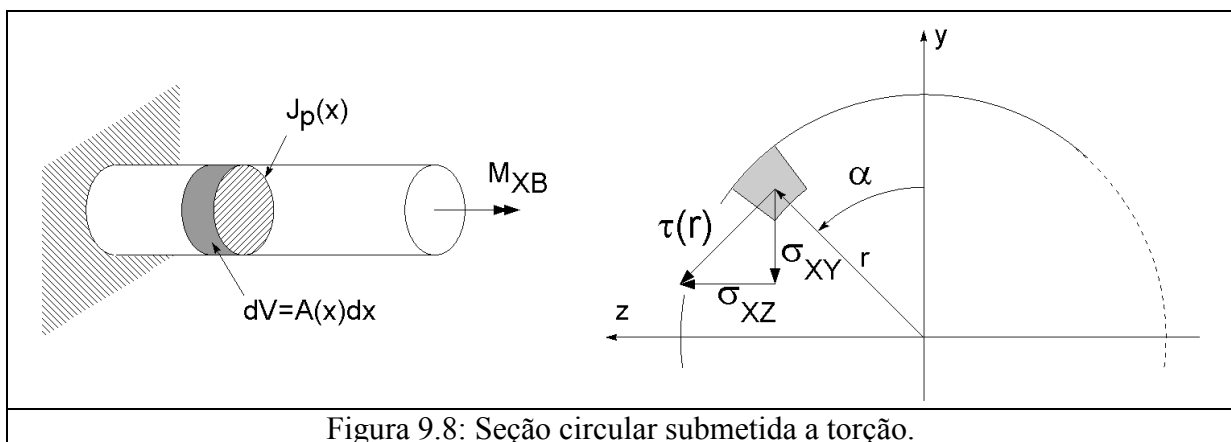


Figura 9.8: Seção circular submetida a torção.

A tensão tangencial que atua no elemento de área  $dA$  cresce linearmente a partir do centro da seção transversal, é perpendicular a direção radial (Figura 9.8) e pode ser determinada a partir da seguinte equação:

$$\tau(x, r) = \frac{M_x(x)}{J_p(x)} r \quad (17)$$

Podemos também mostrar que existe a seguinte relação entre as tensões tangenciais orientadas segundo os eixos coordenados  $y, z$  (Figura 9.8).

$$\tau^2(x, r) = \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 = \frac{M_x^2(x)}{J_p^2(x)} r^2 \quad (17)$$

As demais tensões que atuam na seção são:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (18)$$

Substituindo (17) e (18) em (12), obtém-se a energia de deformação de eixos,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{G} \left[ \int_{A(x)} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dA \right] dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{G} \tau^2(x, r) dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{G} \left[ \int_{A(x)} \frac{M_x^2(x)}{J_p^2(x)} r^2 dA \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{G} \frac{M_x^2(x)}{J_p^2(x)} \underbrace{\int_{A(x)} r^2 dA}_{J_p(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{G} \frac{M_x^2(x)}{J_p^2(x)} J_p(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_x^2(x)}{GJ_p(x)} dx \end{aligned} \quad (19)$$

Para um caso de seção circular com momento polar de inércia  $J_p(x)$  constante, a Equação 19 se torna:

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 L}{GJ_p} \quad (20)$$

### 4.3 Energia de deformação de vigas

Consideremos uma viga prismática de comprimento  $L$  com uma seção transversal  $A(x)$ , com um momento de inércia  $I_{zz}(x)$  em relação ao eixo  $z$  que passa pelo centróide e em cuja seção atuam o momento fletor  $M_z(x)$  e o esforço cortante  $V_y(x)$ .

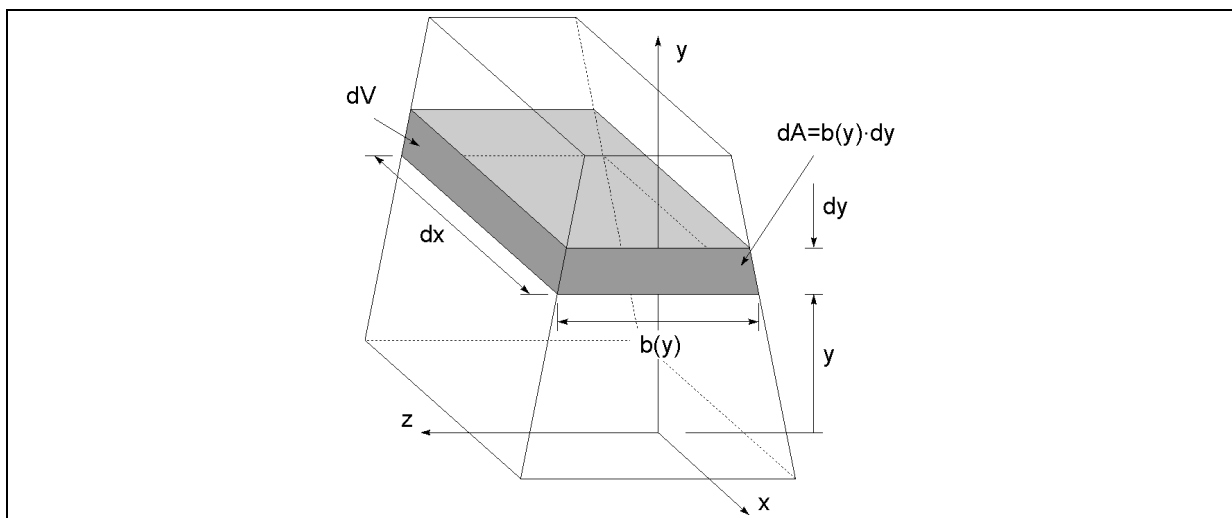


Figura 9.9: Volume elementar de uma viga sujeita à flexão.

Um elemento de volume desta viga está mostrado na Figura 9.9. Vamos escolher um volume elementar  $dV$  como o produto de uma área  $dA = b(y)dy$  pelo comprimento  $dx$ ,

$$dV = dA \cdot dx = b(y)dy \cdot dx \quad (21)$$

Na área elementar  $dA$  atuam uma tensão normal  $\sigma_{XX}$  e uma tensão tangencial  $\sigma_{XY}$  que se relacionam com as resultantes das forças na seção transversal através das seguintes expressões:

$$\sigma_{XX}(x, y) = -\frac{M_Z(x)}{I_{ZZ}(x)} y \quad (22)$$

$$\sigma_{XY}(x, y) = -\frac{V_Y(x)}{I_{ZZ}(x)} \frac{Q_{Zp}(y)}{b(y)} \quad (23)$$

As demais tensões nesta seção são:  $\sigma_{YY} = \sigma_{ZZ} = \sigma_{XZ} = \sigma_{YZ} = 0$ .

Aplicando as Equações 22 e 23 em 12, temos para a energia  $U$  da viga a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \left[ \frac{\sigma_{XX}^2}{E} + \frac{\sigma_{XY}^2}{G} \right] dV = \frac{1}{2} \int_V \left[ \frac{M_Z^2(x)}{EI_{ZZ}^2(x)} y^2 + \frac{V_Y^2(x) Q_{Zp}^2(y)}{I_{ZZ}^2 b^2(y)} \right] dV = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L \frac{M_{ZZ}^2(x)}{EI_{ZZ}^2(x)} \underbrace{\int_{A(x)} y^2 dA}_{I_{ZZ}(x)} dx + \int_0^L \frac{1}{G} \frac{V_Y^2(x)}{I_{ZZ}^2(x)} \left[ \int_{A(x)} \frac{Q_{Zp}^2(y)}{b^2(y)} dA \right] dx \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Podemos escrever ainda:

$$\int_{A(x)} \frac{Q_{Zp}^2(y)}{b^2(y)} dA = \int_{A(x)} \frac{Q_{Zp}(y)}{b^2(y)} b(y) dy = \int_{A(x)} \frac{Q_{Zp}(y)}{b(y)} dy \quad (27)$$

A integral da Equação 27 é uma integral que deve ser avaliada ao longo do eixo  $y$  e é somente uma função da geometria da seção transversal. É interessante simplificarmos a Equação 24 introduzindo um fator adimensional  $\xi$  que é também somente uma função da forma geométrica da seção transversal,

$$\xi(x) = \frac{A(x)}{I_{ZZ}^2(x)} \int_y \frac{Q_{Zp}(y)}{b(y)} dy \quad (28)$$

Substituindo (28) em (24) temos a expressão para a energia de deformação  $U$  de uma viga submetida à flexão com momento fletor  $M_Z$  e esforço cortante  $V_Y$  atuando na seção transversal,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_Z^2(x)}{EI_{ZZ}(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \xi(x) \frac{V_Y^2(x)}{GA(x)} dx \quad (29)$$

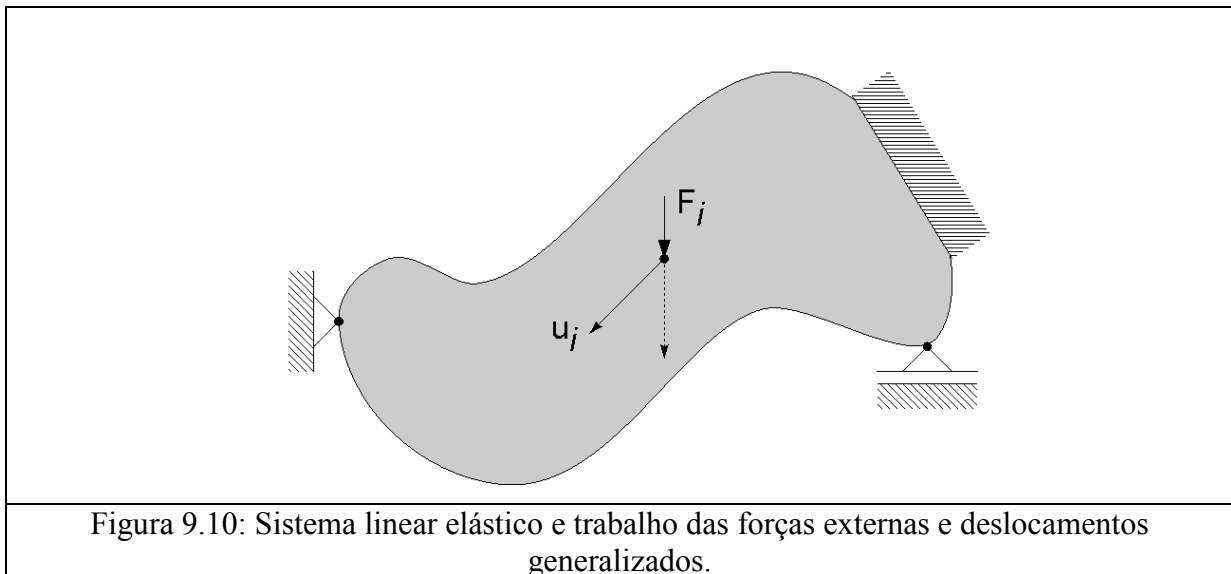


Uma leitura mais atenta da Equação 29 nos indica que a energia de deformação da viga flexionada é composta de duas partes. A primeira parte está relacionada às tensões normais, causadas pelos momentos fletores e a segunda parte está relacionada com as tensões tangenciais e conseqüentemente aos esforços cortantes. Mostraremos mais adiante que o segundo termo da Equação 29 se torna muito pequeno em relação ao primeiro à medida que a viga vai se tornando mais delgada, quer dizer, à medida que o comprimento  $L$  passa a ser bem maior que as dimensões da seção transversal. Para estas vigas delgadas podemos desprezar a contribuição das tensões tangenciais à energia de deformação e  $U$  se torna

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{EI_{zz}(x)} dx \quad (30)$$

### 5. Trabalho de deformação das forças externas: forças e deslocamentos generalizados

Seja um sistema elástico linear arbitrário tal como mostrado na Figura 9.10. Neste sistema atuam, como carregamento externo, as forças  $F_1$  até  $F_n$ . Do teorema da conservação da energia sabemos que  $U = Wa$  e que  $U$  não depende da seqüência em que estas forças foram aplicadas. Conseqüentemente, o trabalho de deformação das forças externas  $Wa$  também independe da seqüência de aplicação de  $F_i$ .



Vamos agora expressar o trabalho das forças externas  $Wa$  através das forças  $F_i$  que atuam sobre o sistema e dos deslocamentos nos pontos de aplicação destas forças. Estas forças  $F_i$  ao serem aplicadas causam deslocamentos nos seus pontos de aplicação que em geral não são paralelos à direção das forças. Para o nosso problema estamos procurando o deslocamento no ponto de aplicação de  $F_i$  e paralelo à sua direção. Este deslocamento na direção da força  $F_i$  e que é essencial para a determinação do trabalho executado pela força chamamos de  $U_i$  (Figura 9.10).

Para determinarmos o trabalho das forças externas  $Wa$  vamos escolher uma seqüência de carregamento na quais todas as forças cresçam proporcionalmente de zero ao seu valor máximo. Neste processo elas devem também manter suas direções de aplicação inalteradas. Sob estas condições temos uma relação linear entre o crescimento das forças e o crescimento dos deslocamentos  $U_i$  nos seus pontos de aplicação. A Figura 9.7 mostra uma relação força  $\times$

deslocamento para tal seqüência de carga. O trabalho realizado pela força  $F_i$  é a área mostrada na figura, e igual a:

$$W_a = \frac{1}{2} F_i U_i \quad (31)$$

Para o caso de termos 'n' forças o seu trabalho será dado por:

$$W_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i U_i \quad (32)$$

Voltemos agora para a Figura 9.10 e imaginemos que em vez de uma força temos um momento  $M_i$  aplicado. Neste caso o ponto de aplicação sofrerá uma rotação e um deslocamento. A rotação não será em geral paralela ao eixo do momento. Para determinarmos, entretanto, o trabalho realizado pelo momento vamos considerar somente a componente da rotação paralela ao eixo de atuação de  $M_i$  e vamos chamá-la de  $\theta_i$ . Se os momentos forem aplicados da mesma forma descrita acima para as forças então o trabalho externo por eles realizado será

$$W_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \theta_i \quad (33)$$

As Equações 32 e 33 são formalmente iguais. Podemos unificá-las se introduzirmos o conceito de forças ( $F_i$ ,  $M_i$ ) e deslocamentos ( $u_i$ ,  $\theta_i$ ) generalizados.

Com as expressões para a energia de deformação das Equações 15, 19 e 29, bem como com expressões para o trabalho das forças externas generalizadas fornecidas pelas Equações 32 e 33 e com a utilização do princípio da conservação da energia  $U = W_a$ , podemos determinar os deslocamentos de uma série de estruturas. Poderemos determinar de forma bastante direta o deslocamento do ponto de aplicação da força externa na direção desta força em sistemas estaticamente determinados interna e externamente e sujeitos à aplicação de uma única força externa. Neste caso a aplicação do princípio da conservação da energia nos fornece

## 6. Energia de deformação devido ao esforço cortante

Seja uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra, tal qual mostrada na Figura 9.11. A viga está submetida a um carregamento  $F$  na extremidade A. A seção transversal da viga é constante. Queremos saber qual a flecha na extremidade A,  $v_A$  na direção da força  $F$ . Desejamos também saber qual a relação entre a flecha provocada pelos momentos fletores e pelos esforços cortantes.

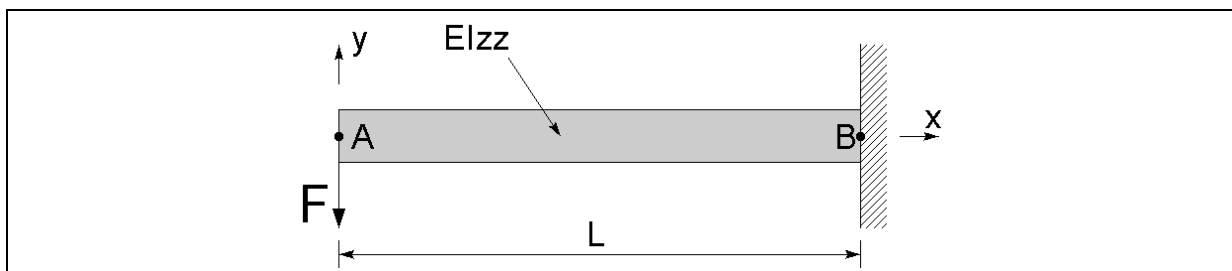


Figura 9.11: Viga engastada em uma extremidade e sujeita a uma força concentrada na outra.

As expressões para o esforço cortante  $V_Y(x)$  e fletor  $M_Z(x)$  são respectivamente:

$$V_Y(x) = -F \quad (a)$$

$$M_Z(x) = -Fx \quad (b)$$

Substituindo as expressões (a) e (b) em (29) obtemos a expressão para a energia de deformação  $U$  da viga.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(-Fx)^2}{EI_{ZZ}(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \xi(x) \frac{(-F)^2}{GA(x)} dx \quad (c)$$

ou ainda,

$$U = \frac{F^2}{2EI_{ZZ}} \int_0^L x^2 dx + \frac{F^2}{2GA} \xi(x) \int_0^L dx = \frac{F^2 L^3}{6EI_{ZZ}} + \xi \frac{F^2 L}{2GA} \quad (d)$$

Por sua vez o trabalho da força externa  $F$  é igual a:

$$W_a = \frac{1}{2} F v_A \quad (e)$$

em que  $v_A$  é o deslocamento do ponto de aplicação da força  $F$ . Igualando  $U = W_a$ , ou seja, (d) e (e), temos a expressão para a deflexão no ponto A:

$$v_A = \frac{FL^3}{3EI_{ZZ}} + \xi \frac{FL}{GA} \quad (f)$$

Uma análise da expressão (f) nos indica que a deflexão  $v_A$  é composta de uma parte associada ao momento fletor e outra ao esforço cortante. Vamos construir o quociente entre estas duas parcelas.

$$\begin{aligned} k_{CF} &= \frac{\text{parcela do esforço cortante}}{\text{parcela do momento fletor}} = 3\xi \frac{E I_{ZZ}}{G AL^2} = 3\xi \frac{E}{G} \left( \frac{BH^3}{12} \right) \frac{1}{(BH)L^2} = \\ &= 3\xi \frac{2}{3} \frac{(1+\nu)}{3} \left( \frac{H^2}{12L^2} \right) = \xi \frac{(1+\nu)}{2} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \end{aligned} \quad (g)$$

No exemplo acima assumimos uma viga de seção cheia de base  $B$  e altura  $H$ . Pode-se facilmente verificar que neste caso o coeficiente  $\xi$  assume o valor:

$$\xi = \frac{6}{5} \quad (h)$$

Como mostrado na equação (g), a relação que controla a influência das deflexões devido ao esforço cortante incluindo o empenamento na seção transversal devido a uma distribuição

não uniforme das tensões tangenciais é basicamente o quadrado da relação  $H/L$ . Por esta razão havíamos dito no início do curso que o modelo de deformação cinemático no qual as seções inicialmente planas continuam planas após a inclusão do carregamento é válido para vigas com  $H/L$  pequeno. À medida que a altura aumenta em relação ao comprimento a influência do empenamento da seção passa a ser importante.

O fator  $\xi$  tem uma interpretação geométrica. Imaginemos que uma viga esteja submetida a um esforço cortante constante  $F$  ao longo de seu comprimento. Neste caso  $V_Y(x) = V_Y = -F$ . Vamos assumir também que esta força tangencial  $F$  seja a resultante de uma distribuição constante de tensões tangenciais ao longo da direção  $y$ ,  $\sigma_{XY}(x) = \sigma_{XY} = F/A$ . Sabemos que no caso de flexão de vigas a distribuição real é parabólica (ver **Capítulo 8c – Cisalhamento na Flexão**). Se a distribuição de tensões tangenciais  $\sigma_{XY}$  é constante ao longo da seção transversal e o material da viga for elástico linear então a deformação angular  $\gamma_{XY}$  causada por ela também é constante na seção. Para um elemento de comprimento  $\Delta L$ , a deflexão linear no final do elemento é dada por:  $\Delta v = \Delta L \gamma_{XY}$ . Para uma viga de comprimento  $L$  engastada em uma extremidade e submetida a uma distribuição constante de tensões tangenciais o deslocamento vertical  $v$  na extremidade livre será dado por (Figura 9.12):

$$v = \gamma_{XY} L = \frac{\gamma_{XY}}{E} L = \frac{FL}{AE} \quad (j)$$

Comparando a equação (j) com a segunda parcela de (f) percebemos que o fator  $\xi$  é a diferença de deflexão linear provocada por uma distribuição constante de tensões e uma distribuição parabólica, que é mais próxima da realidade (Figura 9.12). Ou ainda,  $\xi$  é um fator de correção entre o deslocamento calculado a partir de  $\sigma_{XY}$  considerada constante e a distribuição parabólica.

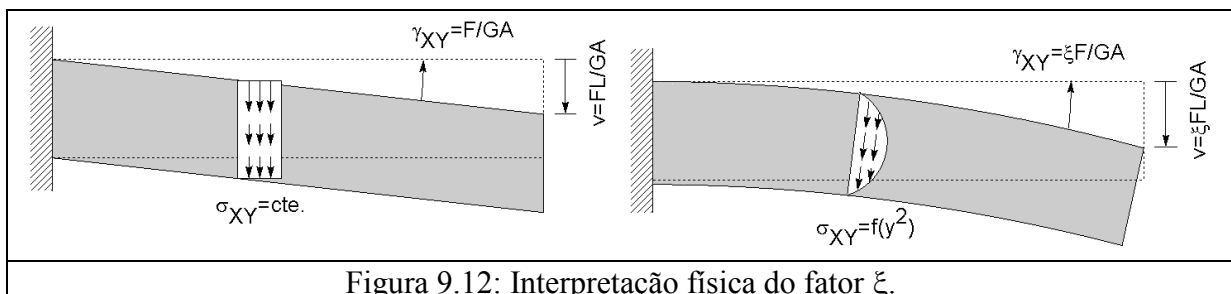


Figura 9.12: Interpretação física do fator  $\xi$ .

### 7. Exemplo 3: viga

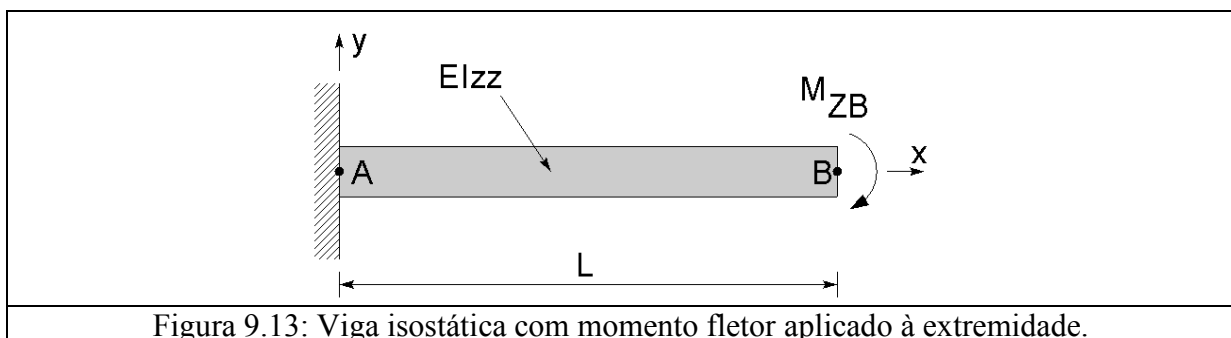


Figura 9.13: Viga isostática com momento fletor aplicado à extremidade.

Considere o exemplo da viga isostática mostrada na Figura 9.13, cuja expressão do momento fletor é  $M_Z(x) = -M_{ZB}$ .

Desprezando a contribuição dos esforços de cisalhamento na energia de deformação,

$$U_{\text{viga}} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} \frac{M_Z^2(x)}{E(x)I_{ZZ}(x)} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{EI_{ZZ}} \int_{x=0}^{x=L} (-M_{ZB})^2 dx = \frac{M_{ZB}^2 L}{2EI_{ZZ}} \quad (34)$$

O trabalho do momento  $M_{ZB}$  para rotacionar o ponto B de um ângulo  $\theta_{ZB}$  é:

$$W_a = \frac{1}{2} M_{ZB} \theta_{ZB} \quad (35)$$

Assim, do PCE, tem-se:

$$W_a = U_{\text{viga}} = \frac{1}{2} M_{ZB} \theta_{ZB} = \frac{M_{ZB}^2 L}{2EI_{ZZ}} \Rightarrow \theta_{ZB} = \frac{M_{ZB} L}{EI_{ZZ}} \quad (36)$$

### 8. Exemplo 4: pórtico

Considere o pórtico isostático mostrado na Figura 9.14. O trabalho da força  $F$  para deslocar o ponto C horizontalmente de uma distância  $u_C$  é dado por:

$$W_a = \frac{1}{2} F u_C \quad (37)$$

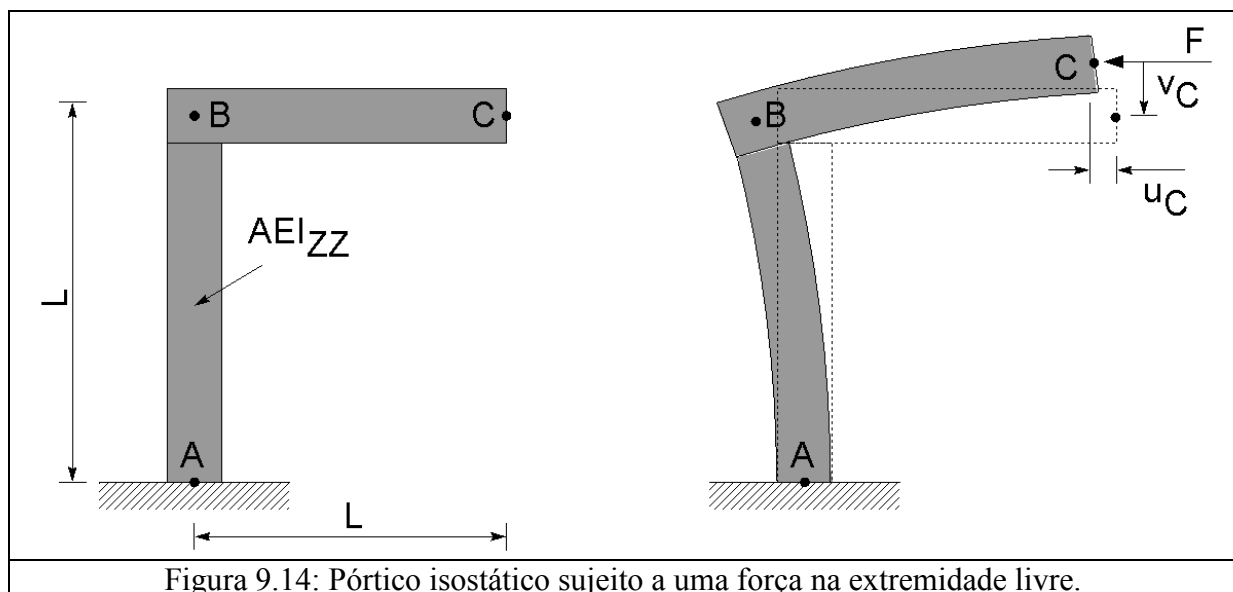


Figura 9.14: Pórtico isostático sujeito a uma força na extremidade livre.

Para calcular a energia de deformação, é necessário determinar as expressões de esforços internos em cada uma das partes do pórtico. Para tanto, faz-se a decomposição mostrada na Figura 9.15.

Do equilíbrio da parte (2), tem-se que  $F_2 = F$ . Da interface, tem-se que  $F_1 = F_2 = F$ . Assim, o esforço normal atuante na parte (2) é  $N_x(x) = -F$ , e o momento fletor atuante na parte (1) é  $M_Z(x) = F(L-x)$  (Figura 9.16).

A energia de deformação no pórtico é dada pela soma da energia de deformação das partes, como mostrado na Equação 38. Desprezando o efeito dos esforços de cisalhamento na

energia de deformação da parte (1), essas parcelas são dadas pela Equação 39.

$$U_{\text{total}} = \sum U_{\text{elementos}} = U_{\text{viga}} + U_{\text{barra}} \quad (38)$$

$$U_{\text{barra}} = \frac{1}{2E} \int_{x=0}^{x=L} \frac{N_x(x)^2}{A(x)} dx \quad \text{e} \quad U_{\text{viga}} = \frac{1}{2E} \int_{x=0}^{x=L} \frac{M_z^2(x)}{I_{zz}(x)} dx \quad (39)$$

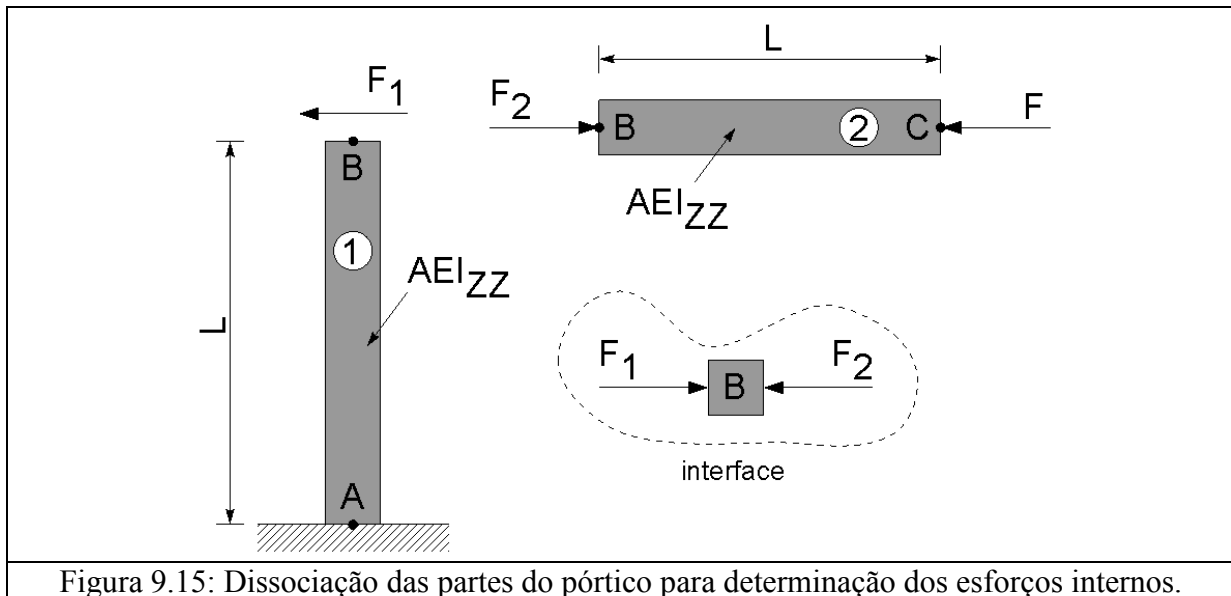


Figura 9.15: Dissociação das partes do pórtico para determinação dos esforços internos.

Para este problema, em particular, tem-se:

$$U_{\text{barra}} = \frac{1}{2EA} \int_{x=0}^{x=L} (-F)^2 dx = \frac{F^2 L}{2EA} \quad \text{e} \quad U_{\text{viga}} = \frac{1}{2EI_{zz}} \int_{x=0}^{x=L} [F(L-x)]^2 dx = \frac{F^2 L^3}{6EI_{zz}} \quad (40)$$

$$\therefore U_{\text{total}} = \frac{F^2 L^3}{6EI_{zz}} + \frac{F^2 L}{2EA} \quad (41)$$

Do Princípio de Conservação de energia, tem-se então:

$$W_a = \frac{1}{2} F \cdot u_c = U_{\text{total}} = \frac{F}{2} \left( \frac{FL^3}{3EI_{zz}} + \frac{FL}{EA} \right) \Rightarrow u_c = \frac{FL^3}{3EI_{zz}} + \frac{FL}{EA} \quad (42)$$

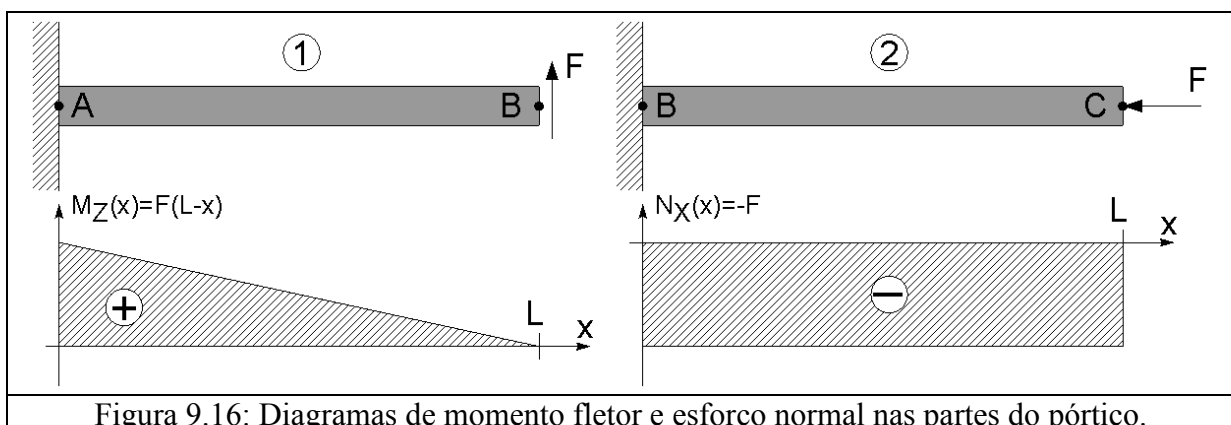


Figura 9.16: Diagramas de momento fletor e esforço normal nas partes do pórtico.

### 9. Exemplo 5: treliça

Considere a treliça composta por  $N$  barras, como mostrada na Figura 9.17 para um exemplo de  $N = 5$  barras. Analogamente ao que foi mostrado pela Equação 38 para o pórtico, para treliças também se tem que a energia de deformação é dada pela soma da energia de deformação de cada uma das partes, isto é:

$$U_{\text{treliça}} = \sum_{i=1}^N U_{\text{barra } i} \quad (43)$$

Cada uma das barras de uma treliça se comporta como a parte (2) do pórtico do exemplo anterior, isto é, como uma barra sujeita a uma carga em sua extremidade. De forma análoga à Equação 40, a energia de deformação de uma barra  $i$  carregada dessa forma é dada por:

$$U_{\text{barra } i} = \frac{F_i^2 L_i}{2E_i A_i} = \frac{(F \alpha_i)^2 L_i}{2E_i A_i} \quad (44)$$

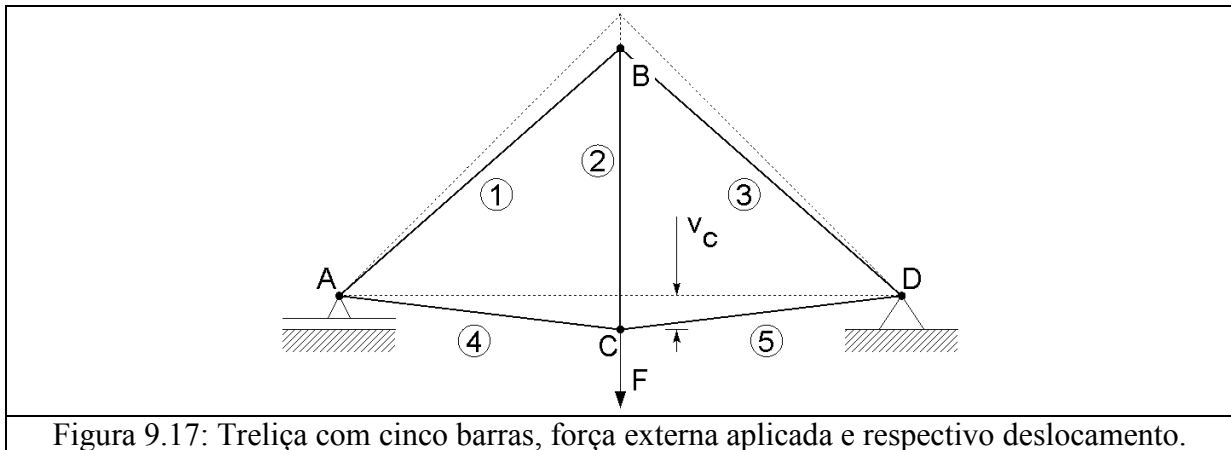


Figura 9.17: Treliça com cinco barras, força externa aplicada e respectivo deslocamento.

As forças  $F_i$  em cada uma das barras é uma proporção da força externa  $F$  aplicada à treliça. A proporção foi escrita na Equação 44 na forma de uma constante  $\alpha_i$  que é diferente para cada barra. O valor desta constante para cada barra da treliça pode ser determinado por métodos da Estática, como o método dos nós.

No exemplo da Figura 9.17, a força externa  $F$  causa um deslocamento vertical  $v_C$  no ponto C. O trabalho da força ao causar este deslocamento é:

$$W_a = \frac{1}{2} F \cdot v_C \quad (45)$$

Assim, do Princípio de Conservação de Energia, o deslocamento  $v_C$  pode ser determinado por:

$$W_a = \frac{1}{2} F \cdot v_C = U_{\text{treliça}} = \sum_{i=1}^N U_{\text{barra } i} = \sum_{i=1}^N \frac{(F \alpha_i)^2 L_i}{2E_i A_i} \quad (46)$$

$$v_C = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^2 L_i}{E_i A_i} \quad (47)$$

**10. Exemplo 6: Limitação do PCE (Da P2 de 03/07/2009; 1,0 ponto)**

Considere o exemplo de barra mostrado na Figura 9.18, sujeita a dois carregamentos  $F_B$  e  $F_C$ . O trabalho das forças externas, nesse caso, será dado por:

$$W_a = \frac{1}{2} F_B \cdot u_B + \frac{1}{2} F_C \cdot u_C \quad (48)$$

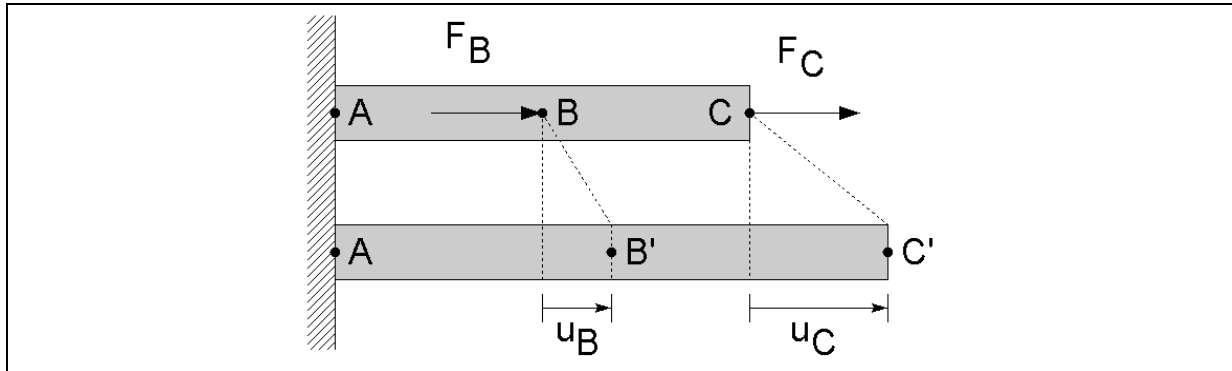


Figura 9.18: Barra sujeita a dois carregamentos simultâneos.

A energia de deformação, por outro lado, será função dessas forças,

$$U = f(F_B, F_C) \quad (49)$$

Mais precisamente, como  $N_x(A < x < B) = F_B + F_C$  e  $N_x(B < x < C) = F_C$ , a energia de deformação desta barra é dada por:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_x \frac{N_x^2(x)}{A(x)E(x)} dx = \frac{1}{2EA} \left\{ \int_A^B (F_B + F_C)^2 dx + \int_B^C F_C^2 dx \right\} = \\ &= \frac{1}{2EA} \left[ (F_B + F_C)^2 (x_B - x_A) + F_C^2 (x_C - x_B) \right] \end{aligned} \quad (50)$$

É correto afirmar, pelo Princípio de Conservação de Energia, que:

$$W_a = \frac{1}{2} F_B \cdot u_B + \frac{1}{2} F_C \cdot u_C = U = \frac{1}{2EA} \left[ (F_B + F_C)^2 (x_B - x_A) + F_C^2 (x_C - x_B) \right] \quad (51)$$

A Equação 51 exprime corretamente os deslocamentos  $u_B$  e  $u_C$  em função de  $F_B$  e  $F_C$ , mas por conter duas incógnitas para somente uma equação, não pode ser resolvida. Assim, problemas submetidos a múltiplos carregamentos são uma limitação importante do Princípio de Conservação de Energia. Veremos a seguir um método capaz de tratar problemas desse tipo pela formulação de energia.

**11. O Princípio das Forças Virtuais (PFV)**

É possível determinar os deslocamentos generalizados de um sistema composto por qualquer número de vigas e barras sujeito a múltiplos carregamentos. Os deslocamentos poderão ser determinados também naqueles pontos onde não atuam esforços externos.

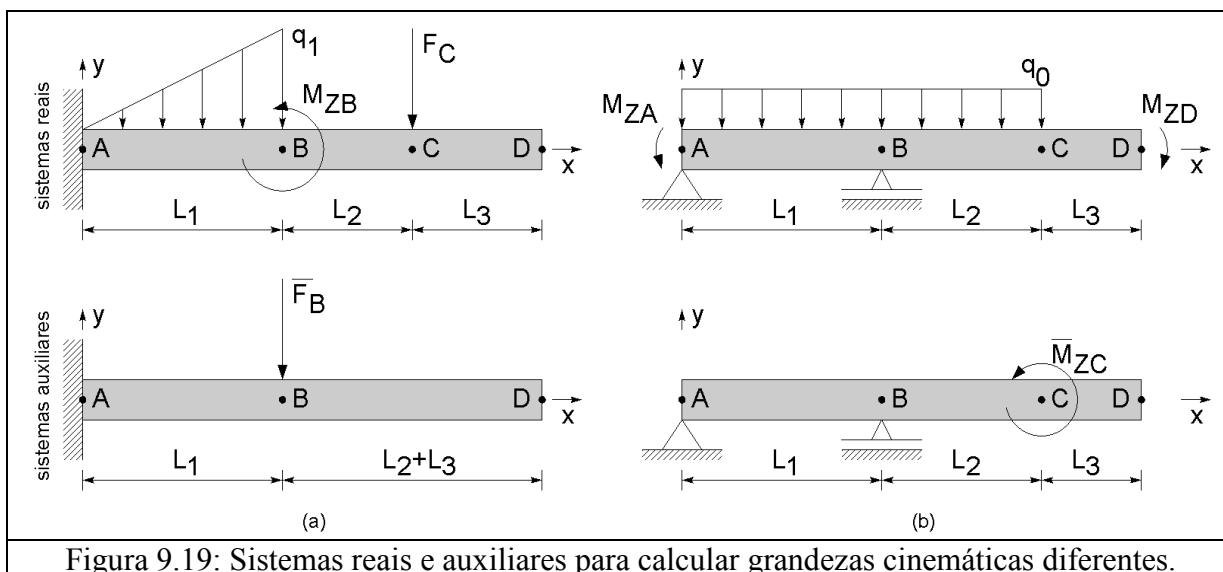


Para a aplicação do PFV, é necessário criar um sistema auxiliar. Um sistema auxiliar tem as seguintes características:

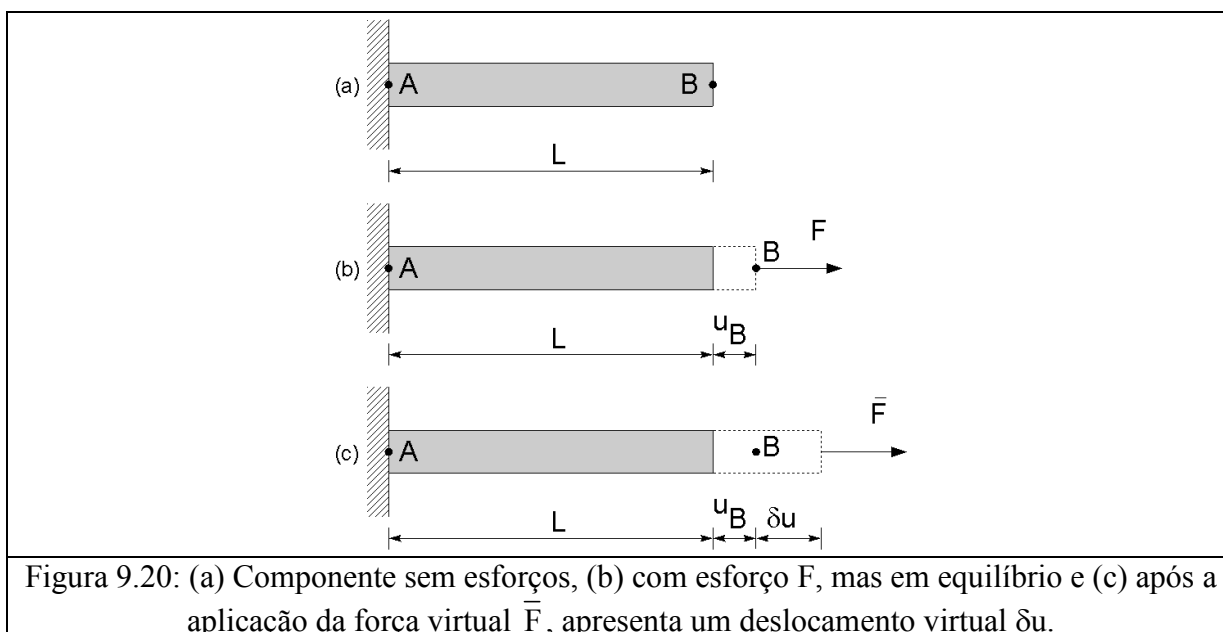
1. Tem as mesmas vinculações do sistema original;
2. Não tem nenhum dos carregamentos do sistema original e
3. Está sujeito a somente um carregamento virtual (força ou momento virtuais) disposto de acordo com a grandeza cinemática que se deseja determinar.

A Figura 9.19a mostra como seria o sistema auxiliar necessário para determinar o deslocamento vertical  $v_B$  do ponto B. Para tanto, retiram-se todos os carregamentos do sistema real e mantém-se todas as vinculações. Uma força virtual é aplicada sobre o ponto B.

A Figura 9.19b mostra o sistema auxiliar para calcular a rotação do ponto C,  $\theta_{ZC}$ . Um momento virtual é aplicado sobre o ponto C.



Após a aplicação dos carregamentos reais, o sistema entra em equilíbrio estático, com uma energia de deformação correspondente,  $U$  (Figura 9.20). Com a aplicação dos esforços virtuais, o sistema se submete um deslocamento virtual  $\delta u$ , e apresenta uma variação da energia de deformação,  $\delta U$ .



O trabalho realizado pela força virtual para causar  $\delta u$  é dado por:

$$\delta W_a = \bar{F} \cdot \underbrace{\delta u}_{\text{arbitrário!}} = \bar{F} \cdot (\mu \cdot u) \quad (52)$$

Como o deslocamento virtual  $\delta u$  é arbitrário, na Equação 52 ele foi escrito como uma proporção  $\mu$  do deslocamento real  $u$ .

Para que seja possível aplicar o Princípio de Conservação de Energia em problemas sujeitos a carregamentos virtuais, é necessário ainda desenvolver as expressões para as variações de energia de deformação devido a esses esforços.

## 12. Variação de energia de deformação em barras

Considere o elemento diferencial mostrado na Figura 9.21, retirado do corpo de uma barra. Já foi mostrado que a deformação real deste elemento, em função de um carregamento real  $N_X(x)$  é:

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{1}{E(x)} \sigma_{xx}(x) = \frac{1}{E(x)} \left( \frac{N_X(x)}{A(x)} \right) = \frac{N_X(x)}{A(x)E(x)} \quad (53)$$

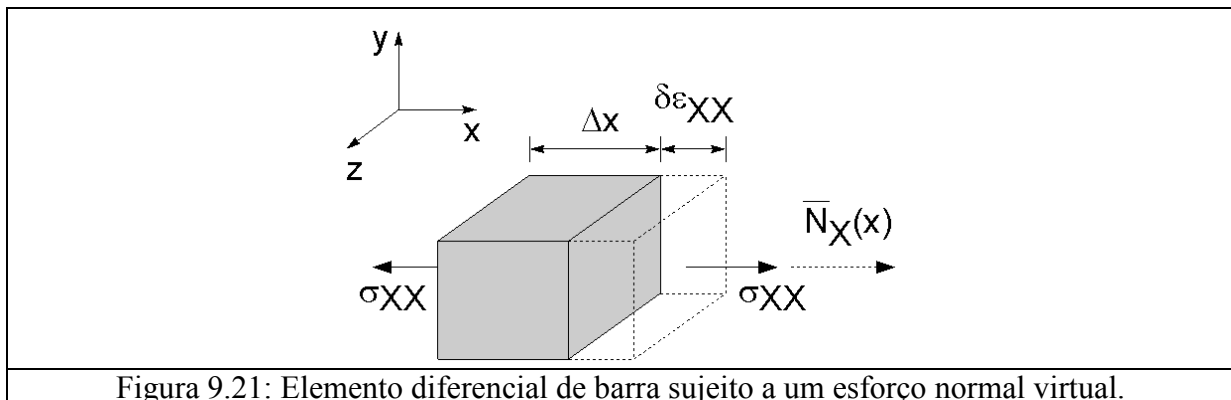


Figura 9.21: Elemento diferencial de barra sujeito a um esforço normal virtual.

A deformação virtual do elemento, em função do carregamento virtual  $\bar{N}_X(x)$ , por outro lado, será dado pela Equação 54. Observe que, como essa deformação é arbitrária, foi escrita como uma proporção  $\mu$  da deformação real.

$$\delta \varepsilon_{xx}(x) = \mu \varepsilon_{xx}(x) = \frac{\bar{N}_X(x)}{A(x)E(x)} \quad (54)$$

Substituindo (54) na expressão da energia de deformação de barras, obtém-se:

$$\delta U_{\text{barra}} = \int_{x=0}^{x=\Delta x} \bar{N}_X(x) \delta \varepsilon_{xx}(x) dx = \int_{x=0}^{x=\Delta x} \bar{N}_X(x) \underbrace{\mu \varepsilon_{xx}(x)}_{\frac{N_X(x)}{A(x)E(x)}} dx \quad (55)$$

$$\therefore \delta U_{\text{barra}} = \mu \int_{x=0}^{x=\Delta x} \frac{\bar{N}_X(x) N_X(x)}{A(x)E(x)} dx \quad (56)$$

### 12.1 Exemplo 7

O deslocamento  $u_B$  do ponto B da barra da Figura 9.22a é um exemplo de problema que não pode ser resolvido pelo PCE. Para este problema, é necessária a formulação de um sistema auxiliar (Figura 9.22b), no qual uma força virtual é aplicada no ponto B.

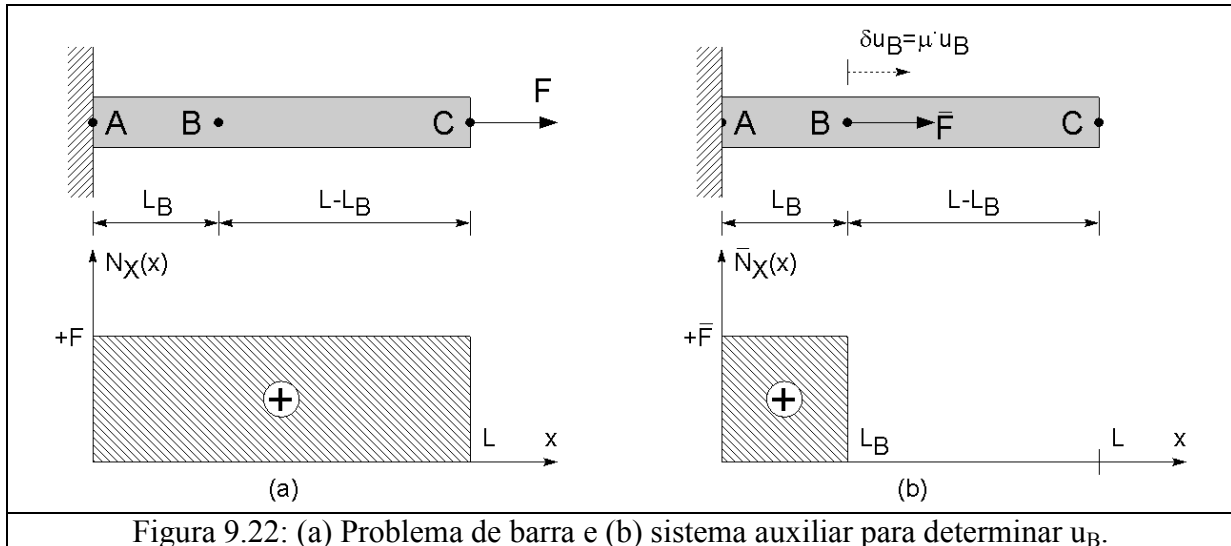


Figura 9.22: (a) Problema de barra e (b) sistema auxiliar para determinar  $u_B$ .

O trabalho da força virtual aplicada é:

$$\delta W_a = \bar{F} \cdot \delta u_B = \mu \bar{F} u_B \quad (57)$$

A variação de energia de deformação devido a esta força é:

$$\begin{aligned} \delta U &= \mu \int_0^L \frac{\bar{N}_X(x) N_X(x)}{A(x)E(x)} dx = \frac{\mu}{AE} \int_0^{L_B} \overbrace{\bar{N}_X(x)}^{\bar{F}} \overbrace{N_X(x)}^F dx + \frac{\mu}{AE} \int_{L_B}^L \overbrace{N_X(x)}^0 \overbrace{N_X(x)}^F dx = \\ &= \frac{\mu}{AE} \int_0^{L_B} \bar{F} F dx = \frac{\mu \bar{F} F}{AE} L_B \end{aligned} \quad (58)$$

Do Princípio de Conservação de Energia, tem-se então:

$$\delta W_a = \mu \bar{F} u_B = \delta U = \frac{\mu \bar{F} F}{AE} L_B \Rightarrow u_B = \frac{FL_B}{AE} \quad (59)$$

### 13. Variação de energia de deformação em vigas

Considere o elemento diferencial mostrado na Figura 9.23, retirado do corpo de uma viga. Sob a hipótese de pequenas deformações, é correto afirmar que:

$$\delta\theta_z \ll 1 \Rightarrow \tan(\delta\theta_z) \approx \theta_z = \frac{\Delta x}{\rho_Y} \quad (60)$$

$$\frac{1}{\rho_Y} = \frac{M_Z(x)}{E(x)I_{ZZ}(x)} \quad (61)$$

$$\bar{M}_Z(x) \delta\theta_Z(x) = \bar{M}_Z(x) \mu \frac{\Delta x}{\rho_Y} = \bar{M}_Z(x) \mu \frac{M_Z(x)}{E(x)I_{ZZ}(x)} \Delta x \quad (62)$$

De forma análoga ao que foi desenvolvido para a barra, agora se tem:

$$\delta U_{\text{viga}} = \mu \int_0^L \frac{\bar{M}_Z(x) M_Z(x)}{E(x)I_{ZZ}(x)} dx \quad (63)$$

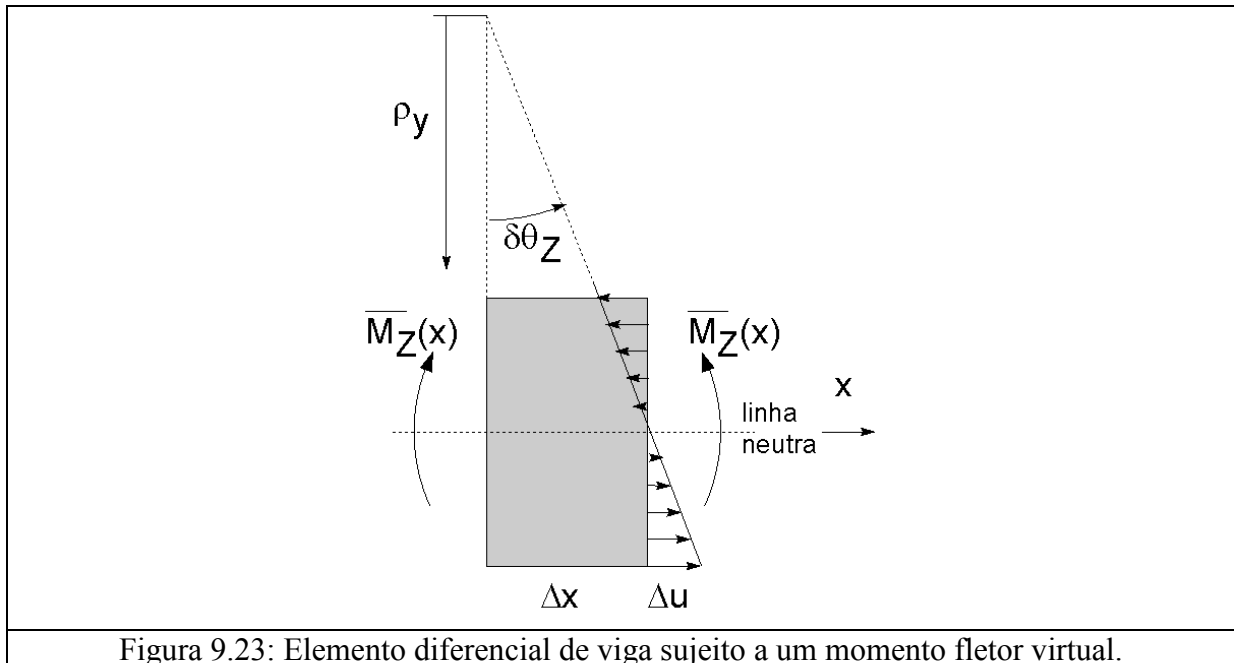


Figura 9.23: Elemento diferencial de viga sujeito a um momento fletor virtual.

### 13.1 Exemplo 8

A rotação  $\theta_{ZB}$  do ponto B da viga da Figura 9.24a é um exemplo de problema que não pode ser resolvido pelo PCE. Para este problema, é necessária a formulação de um sistema auxiliar (Figura 9.24b), no qual um momento virtual é aplicado no ponto B.

O trabalho do momento virtual aplicado é:

$$\delta W_a = \bar{M}_{ZB} \cdot \delta\theta_{ZB} = \mu \bar{M}_{ZB} \theta_{ZB} \quad (64)$$

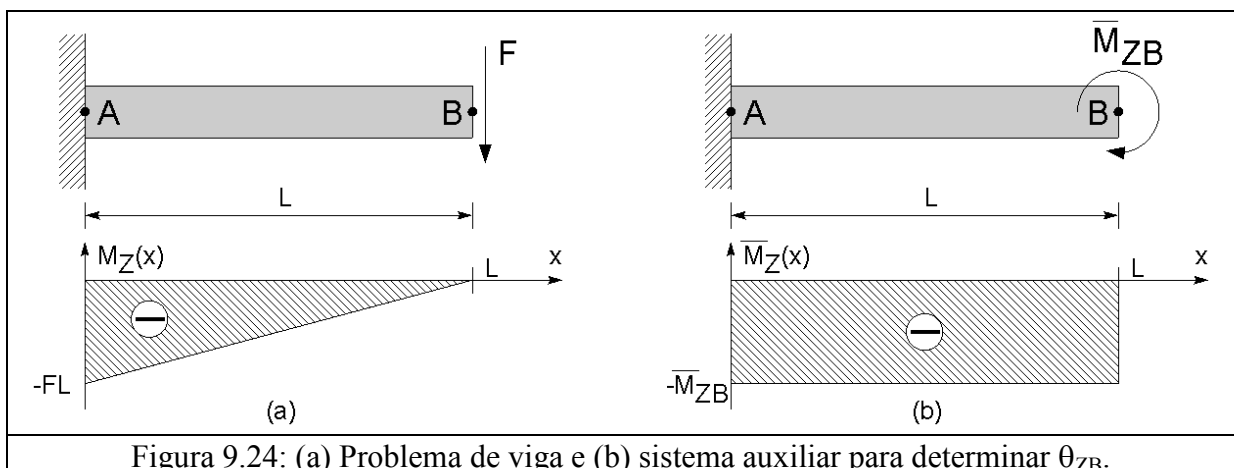


Figura 9.24: (a) Problema de viga e (b) sistema auxiliar para determinar  $\theta_{ZB}$ .

A variação de energia de deformação devido a esta força é:

$$\delta U = \mu \int_0^L \frac{\bar{M}_Z(x) M_Z(x)}{E(x) I_{ZZ}(x)} dx = \frac{\mu}{EI_{ZZ}} \int_0^L \overbrace{\bar{M}_Z(x)}^{-\bar{M}_{ZB}} \overbrace{M_Z(x)}^{-Fx} dx = \frac{\mu}{EI_{ZZ}} \int_0^L (-\bar{M}_{ZB})(-Fx) dx = \frac{\mu \bar{M}_{ZB} FL^2}{2EI_{ZZ}} \quad (65)$$

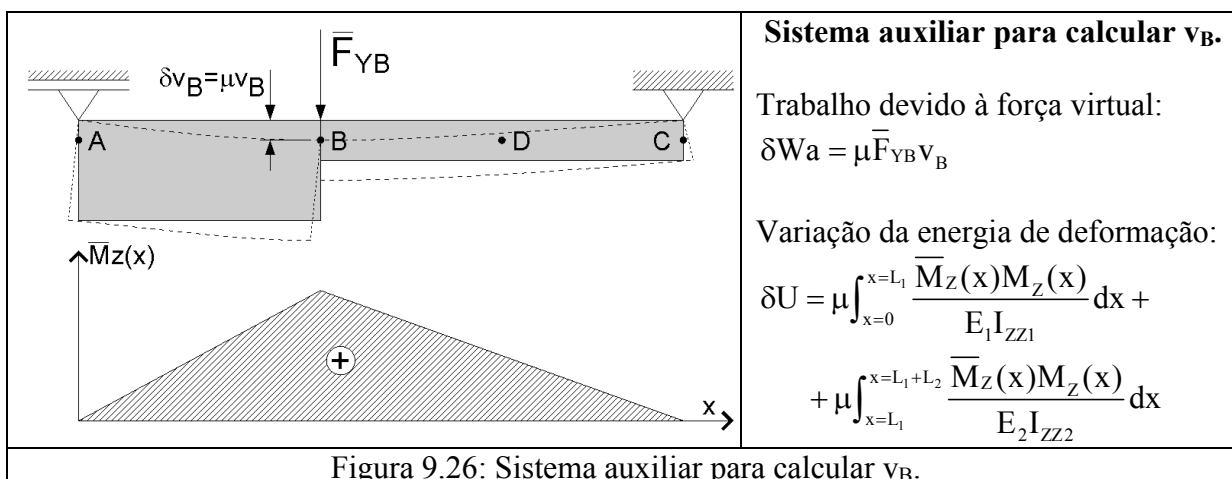
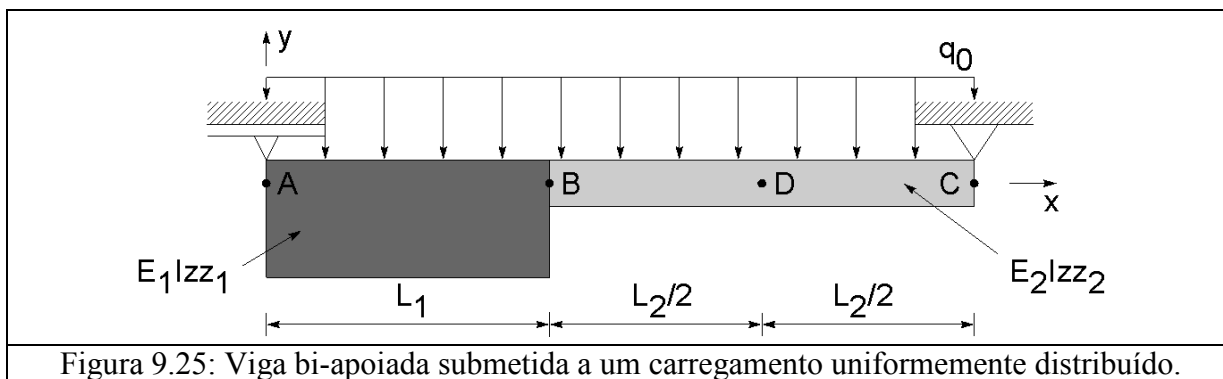
Do Princípio de Conservação de Energia, tem-se então:

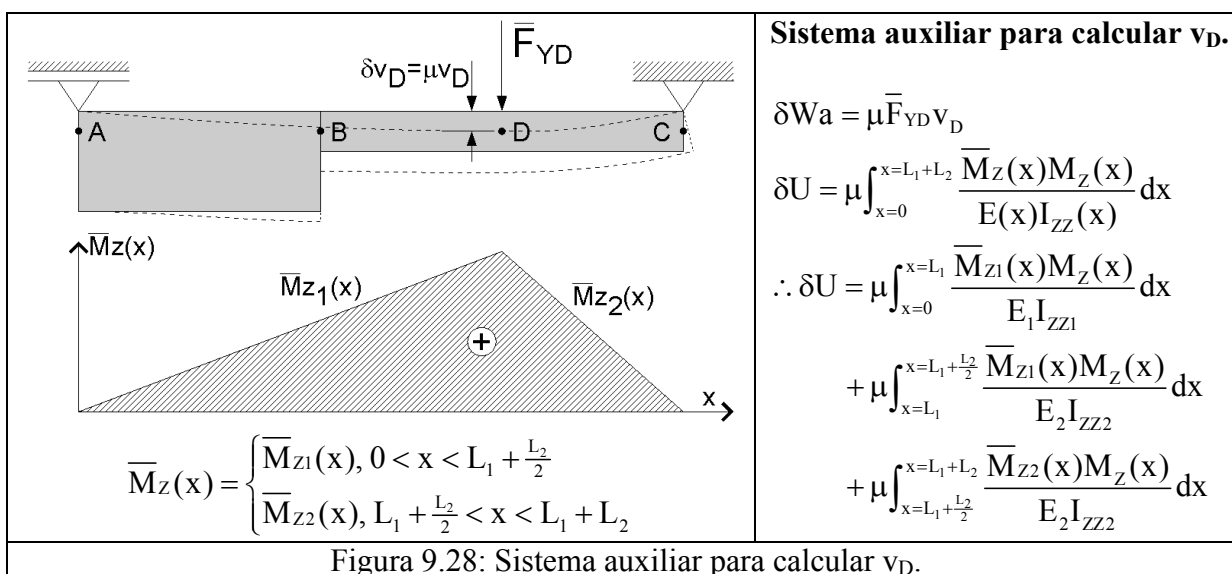
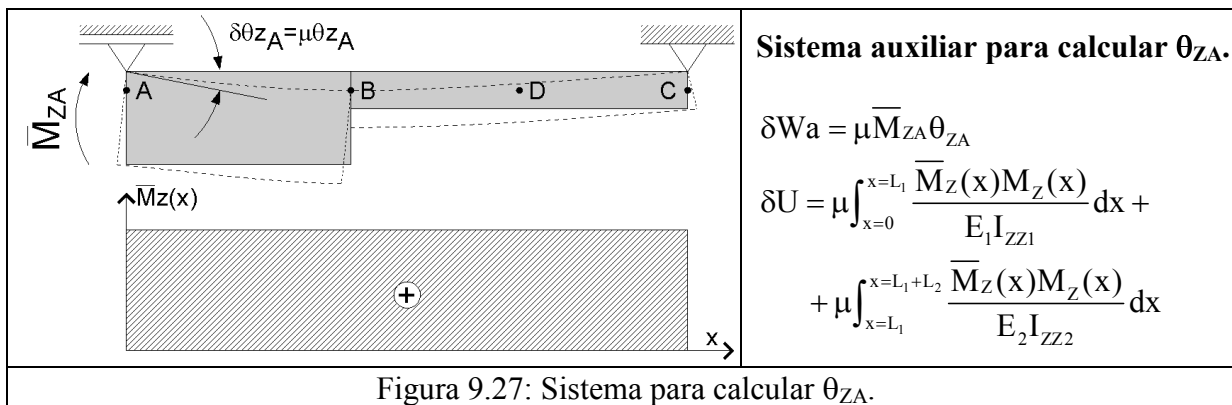
$$\delta W_a = \cancel{\mu \bar{M}_{ZB}} \theta_{ZB} = \delta U = \frac{\mu \bar{M}_{ZB} FL^2}{2EI_{ZZ}} \Rightarrow \theta_{ZB} = \frac{FL^2}{2EI_{ZZ}} \quad (66)$$

### 13.2 Exemplo 9

A viga bi-apoiada mostrada na Figura 9.25 é sujeita a um carregamento uniformemente distribuído. É fácil determinar o momento fletor real devido ao carregamento  $q_0$ . Sua expressão é mostrada na Equação 67. O cálculo de cada uma das grandezas cinemáticas  $v_B$ ,  $\theta_{ZA}$  e  $v_D$  exige a formulação de um sistema auxiliar exclusivo, mostrados respectivamente nas Figuras 9.26, 9.27 e 9.28.

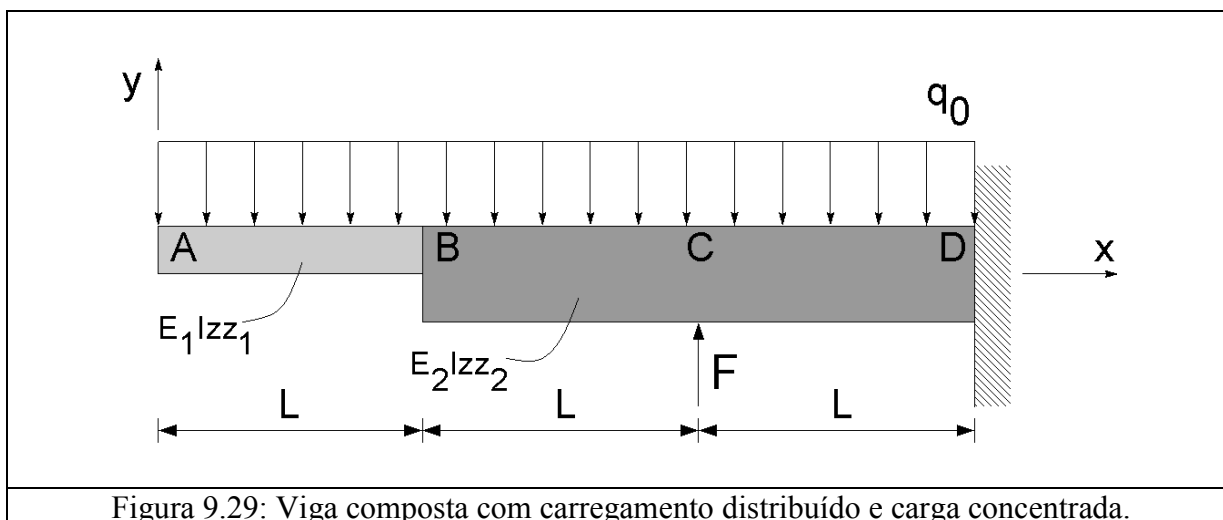
$$M_Z(x) = \frac{q_0}{2}(Lx - x^2) \quad (67)$$





**13.3 Exemplo 10 (Da P2 Especial de 17/07/2009; 5,0 pontos)**

A Figura 9.29 mostra uma viga livre-engastada submetida a um carregamento  $q_0$  uniformemente distribuído. Uma carga concentrada  $F$  é aplicada no ponto C para impedir o ponto B de se deslocar verticalmente ou de rotacionar. Em qual dessas situações o valor de  $F$  será maior?



O momento fletor atuante na viga hiperestática mostrada na Figura 9.29 pode ser facilmente calculado. Sua expressão é:

$$M_Z(x) = -\frac{1}{2}q_0x^2 + F\langle x - 2L \rangle^1 = \begin{cases} -\frac{1}{2}q_0x^2, & x < 2L \\ -\frac{1}{2}q_0x^2 + Fx - 2FL, & x > 2L \end{cases} \quad (68)$$

O sistema auxiliar para o cálculo da flecha da viga no ponto B é mostrado abaixo.

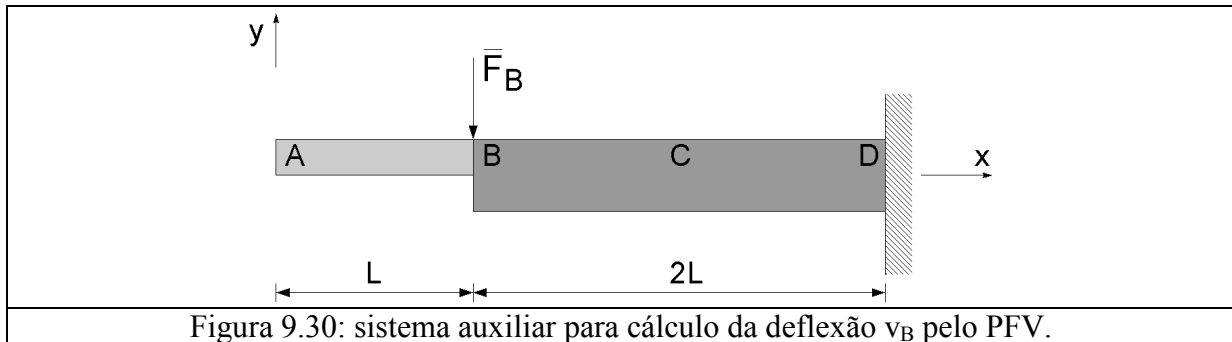


Figura 9.30: sistema auxiliar para cálculo da deflexão  $v_B$  pelo PFV.

O momento fletor atuante neste sistema auxiliar devido à força virtual  $F_B$  é dado por:

$$\bar{M}_Z(x) = -\bar{F}_B \langle x - L \rangle^1 = \begin{cases} 0, & x < L \\ -\bar{F}_B(x - L), & x > L \end{cases} \quad (69)$$

O trabalho virtual causado pela força virtual  $F_B$  para deslocar o ponto B de uma distância  $v_B$  pode ser escrito por:

$$\delta W_a = \bar{F}_B \cdot \delta v_B = \bar{F}_B \cdot \mu v_B \quad (70)$$

Por outro lado, a variação da energia de deformação causada por esta força é:

$$\delta U_v = \mu \int_x \frac{\bar{M}_Z(x) M_Z(x)}{E(x) I_{ZZ}(x)} dx + \mu \int_x \xi(x) \frac{\bar{V}_Y(x) V_Y(x)}{G(x) A(x)} dx \quad (71)$$

da qual se pode desprezar o efeito do esforço cortante.

A integral da Equação 71 precisa ser dividida em três domínios, porque os momentos fletores reais e virtuais, e também as propriedades dos materiais,  $E(x)$  e  $I_{ZZ}(x)$ , têm expressões diferentes ao longo da viga. Assim,

$$\begin{aligned} \delta U_v = & \frac{\mu}{E_1 I_{ZZ1}} \int_{x=0}^{x=L} \bar{M}_Z(0 < x < L) M_Z(0 < x < L) dx + \\ & + \frac{\mu}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=L}^{x=2L} \bar{M}_Z(L < x < 2L) M_Z(L < x < 2L) dx + \\ & + \frac{\mu}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=2L}^{x=3L} \bar{M}_Z(2L < x < 3L) M_Z(2L < x < 3L) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta U_V &= \frac{\mu}{E_1 I_{ZZ1}} \int_{x=0}^{x=L} [0] \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 \right] dx + \\ &+ \frac{\mu}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=L}^{x=2L} [-\bar{F}_B (x-L)] \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 \right] dx + \\ &+ \frac{\mu}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=2L}^{x=3L} [-\bar{F}_B (x-L)] \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 + Fx - 2FL \right] dx = \frac{\mu \bar{F}_B}{E_2 I_{ZZ2}} \left[ \frac{17}{3} q_0 L^4 - \frac{5}{6} FL^3 \right] \end{aligned}$$

Assim, pelo princípio de conservação de energia,

$$\delta W_a = \bar{F}_B \cdot \mu v_B = \delta U_V = \frac{\mu \bar{F}_B}{E_2 I_{ZZ2}} \left[ \frac{17}{3} q_0 L^4 - \frac{5}{6} FL^3 \right] \quad (72)$$

$$v_B = \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} \left[ \frac{17}{3} q_0 L^4 - \frac{5}{6} FL^3 \right] \quad (73)$$

Assim, da Equação 73 tem-se que, para que a flecha  $v_B$  seja nula, é necessário que:

$$v_B = \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} \left[ \frac{17}{3} q_0 L^4 - \frac{5}{6} FL^3 \right] = 0 \Rightarrow F(v_B = 0) = \frac{34}{5} q_0 L \quad (74)$$

O sistema auxiliar para o cálculo da rotação da viga no ponto B é mostrado abaixo.

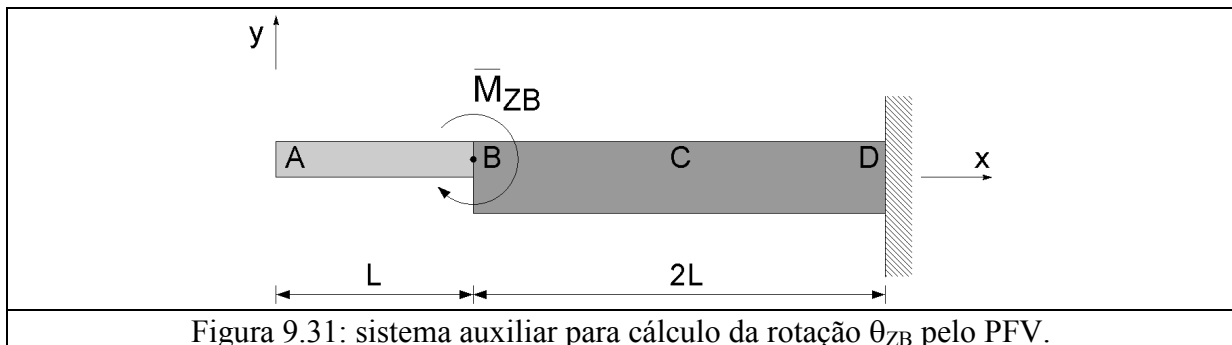


Figura 9.31: sistema auxiliar para cálculo da rotação  $\theta_{ZB}$  pelo PFV.

O momento fletor atuante neste sistema auxiliar devido a  $\bar{M}_{ZB}$  é dado por:

$$\bar{M}_Z(x) = \bar{M}_{ZB} \langle x-L \rangle^0 = \begin{cases} 0, & x < L \\ \bar{M}_{ZB}, & x > L \end{cases} \quad (75)$$

O trabalho virtual causado pela força virtual  $F_B$  para rotacionar o ponto B de um ângulo  $\theta_{ZB}$  pode ser escrito por:

$$\delta W_a = \bar{M}_{ZB} \cdot \delta \theta_{ZB} = \bar{M}_{ZB} \cdot \mu \cdot \theta_{ZB} \quad (76)$$

Por outro lado, a variação da energia de deformação causada por este momento virtual é dado pela Equação 71, da qual se pode desprezar o efeito do esforço cortante.



A integral da Equação 71 precisa ser dividida em três domínios, porque os momentos fletores reais e virtuais, e também as propriedades dos materiais,  $E(x)$  e  $I_{ZZ}(x)$ , têm expressões diferentes ao longo da viga. Assim,

$$\begin{aligned} \delta U_v &= \frac{\mu}{E_1 I_{ZZ1}} \int_{x=0}^{x=L} \bar{M}_Z(0 < x < L) M_Z(0 < x < L) dx + \\ &+ \frac{\mu}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=L}^{x=2L} \bar{M}_Z(L < x < 2L) M_Z(L < x < 2L) dx + \\ &+ \frac{\mu}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=2L}^{x=3L} \bar{M}_Z(2L < x < 3L) M_Z(2L < x < 3L) dx \\ \delta U_v &= \frac{\mu}{E_1 I_{ZZ1}} \int_{x=0}^{x=L} [0] \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 \right] dx + \\ &+ \frac{\mu}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=L}^{x=2L} [\bar{M}_{ZB}] \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 \right] dx + \\ &+ \frac{\mu}{E_2 I_{ZZ2}} \int_{x=2L}^{x=3L} [\bar{M}_{ZB}] \left[ -\frac{1}{2} q_0 x^2 + Fx - 2FL \right] dx = \frac{\mu \bar{M}_{ZB}}{E_2 I_{ZZ2}} \left[ -\frac{13}{3} q_0 L^3 + \frac{1}{2} FL^2 \right] \end{aligned}$$

Assim, pelo princípio de conservação de energia,

$$\delta W_a = \bar{M}_{ZB} \cdot \mu \cdot \theta_{ZB} = \delta U_v = \frac{\mu \bar{M}_{ZB}}{E_2 I_{ZZ2}} \left[ -\frac{13}{3} q_0 L^3 + \frac{1}{2} FL^2 \right] \quad (77)$$

$$\theta_{ZB} = \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} \left[ -\frac{13}{3} q_0 L^3 + \frac{1}{2} FL^2 \right] \quad (78)$$

Assim, da Equação 78 tem-se que, para que a rotação  $\theta_{ZB}$  seja nula, é necessário que:

$$\theta_{ZB} = \frac{1}{E_2 I_{ZZ2}} \left[ -\frac{13}{3} q_0 L^3 + \frac{1}{2} FL^2 \right] = 0 \Rightarrow F(\theta_{ZB} = 0) = \frac{26}{3} q_0 L \quad (79)$$

Comparando as Equações 74 e 79, tem-se que a força necessária para manter o ponto B sem rotacionar é maior do que a força necessária para mantê-lo sem se deslocar verticalmente.

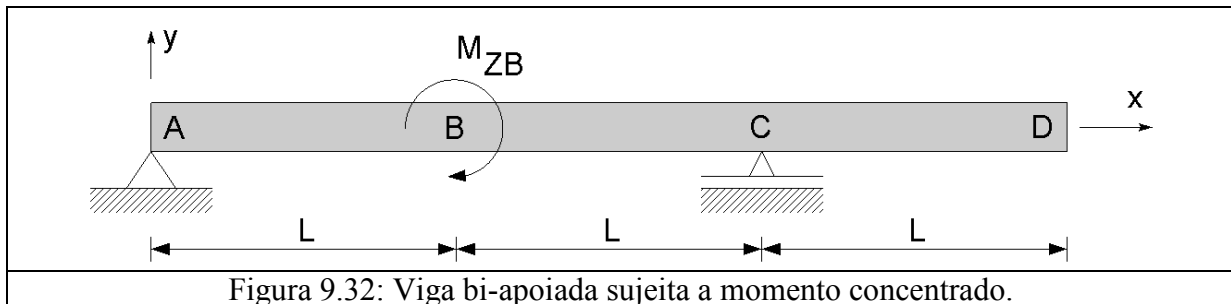
#### 14. Exercício proposto

Demonstre que, conforme foi discutido na Seção 6, em uma viga de seção cheia, de base B e altura H, o coeficiente  $\xi$  vale 6/5. Use o **Capítulo 8c – Cisalhamento na flexão**.

#### 15. Exercício proposto (Da P2 de 03/07/2009; 5,0 pontos)

A viga bi-apoiada mostrada na Figura 9.32 é construída de um material de módulo de elasticidade E e sua seção transversal tem momento de inércia  $I_{ZZ}$ . Um momento fletor concentrado  $M_{ZB}$  é aplicado ao ponto B. Usando o Princípio das Forças Virtuais, determine a deflexão da viga no ponto D. Devido ao carregamento aplicado, o momento fletor dado pela Equação 80 atua sobre a viga.

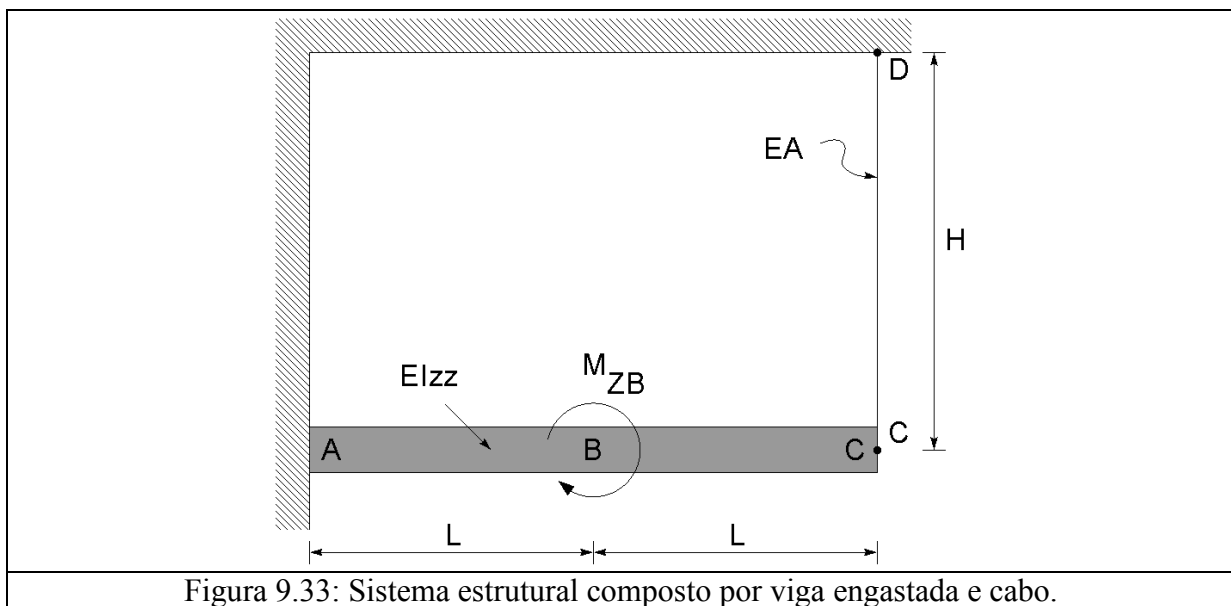
$$M_z(x) = M_{zB} \langle x - L \rangle^0 + \frac{M_{zB}}{2L} \langle x - 2L \rangle^1 - \frac{M_{zB}}{2L} x \quad (80)$$



### 16. Exercício proposto (Da P2 Especial de 17/07/2009; 3,0 pontos / Da P2 de 28/06/2005; 4,0 pontos)

O sistema estrutural mostrado pela Figura 9.33 é composto por uma viga engastada e um cabo. Um momento concentrado é aplicado no meio da viga, que tem módulo de elasticidade  $E$ , momento de inércia  $I_{zz}$  e comprimento  $2L$ . O cabo é construído do mesmo material que a viga, tem seção transversal de área  $A$  e comprimento  $H$ . Usando o Princípio das Forças Virtuais, determine analiticamente a intensidade da força transmitida da viga para o cabo e qual o alongamento do cabo.

Compare a resposta com o resultado já obtido no capítulo anterior, quando o método de Associação de Sistemas foi usado.



### 17. Exercício proposto

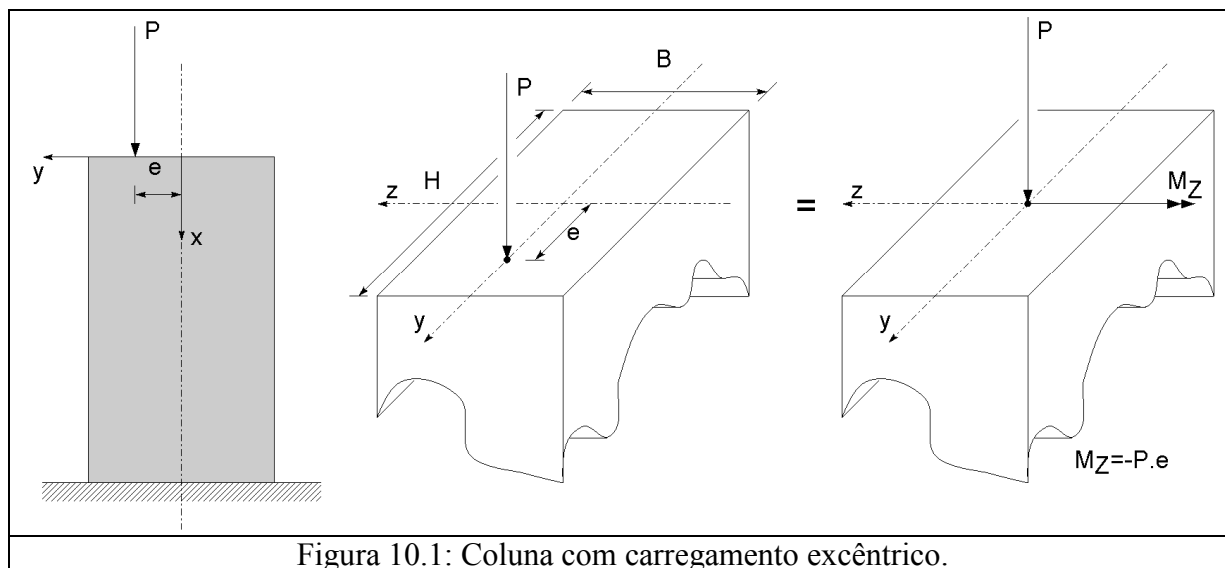
Desenvolva a expressão de variação de energia de deformação para problemas de torção (eixos), para que problemas assim possam ser resolvidos pelo PFV. Para calibrar sua resposta, compare com um problema que também pode ser resolvido pelo PCE, e depois com um problema que não pode ser resolvido pelo PCE. Neste último caso, valide sua resposta resolvendo o problema por Associação de Sistemas. Comente a analogia entre as expressões obtidas e as Equações 56 e 63.

# CAPÍTULO XIII

## ESTABILIDADE

### 1. Colunas com carregamento excêntrico

Pode-se tratar uma coluna com carregamento excêntrico trocando a carga excêntrica por uma carga centrada + um momento equivalente, como visto na Figura 10.1.

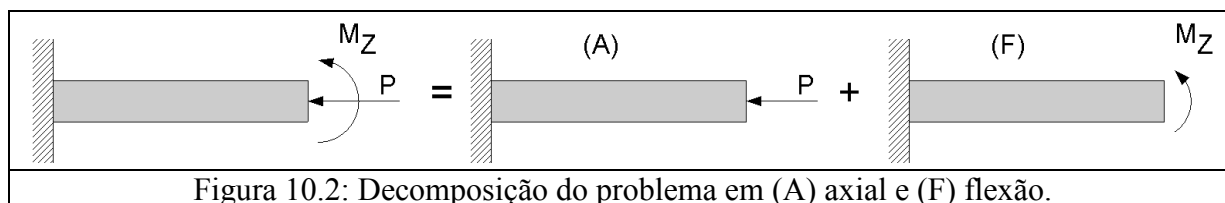


Na Figura 10.2, o problema sujeito ao carregamento P e ao momento fletor  $M_z(P)$  é decomposto. No problema (A) sujeito ao carregamento axial, atua uma tensão normal dada pela Equação 2. No problema (F) sujeito ao carregamento de flexão, atua uma tensão normal dada pela Equação 3.

$$M_z(P) = -P \cdot e \quad (1)$$

$$\sigma_{xx}^{(A)} = \frac{-P}{A} = \frac{-P}{BH} \quad (2)$$

$$\sigma_{xx}^{(F)} = \frac{-M_z y}{I_{zz}} = \frac{-P \cdot e \cdot y}{\left(\frac{BH^3}{12}\right)} \quad (3)$$



Assim, a tensão normal total atuante na seção transversal da viga é dada por:

$$\sigma_{xx}^{(T)} = \sigma_{xx}^{(A)} + \sigma_{xx}^{(F)} = -\frac{P}{BH} - \frac{P \cdot e \cdot y}{\left(\frac{BH^3}{12}\right)} \quad (4)$$

$$\sigma_{XX}^{(T)} = -\frac{P}{BH} \left[ 1 + \frac{12e \cdot y}{H^2} \right] \quad (5)$$

A composição dessas duas tensões, ao longo da seção transversal da coluna, é mostrada na Figura 10.3. Observe que, apesar de haver somente esforços de compressão atuando, se o esforço de tração estiver desalinhado com o eixo da coluna podem surgir tensões de tração.

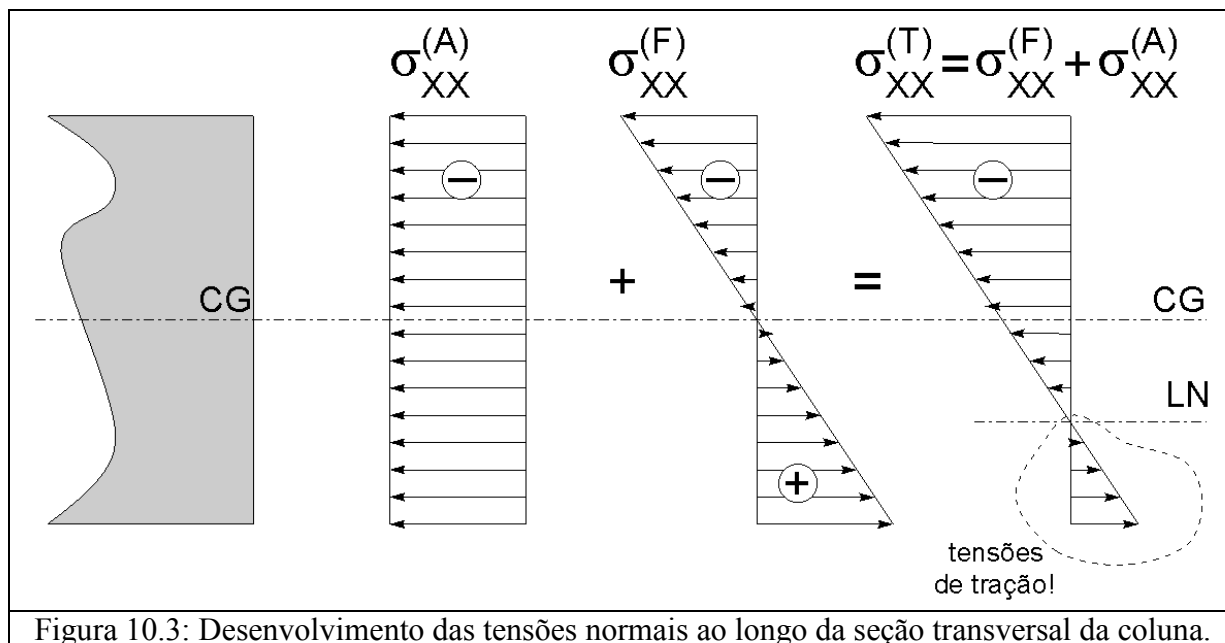


Figura 10.3: Desenvolvimento das tensões normais ao longo da seção transversal da coluna.

## 1.2 Valor máximo de $e$ para não causar tração

Partiremos da expressão da tensão normal atuante (Equação 5), e determinaremos qual o valor de  $e$  para que essa tensão seja nula na parte inferior da seção mostrada na Figura 10.3. Isto é, determinaremos o valor de  $e$  para que a distribuição de tensões seja igual à mostrada na Figura 10.4.

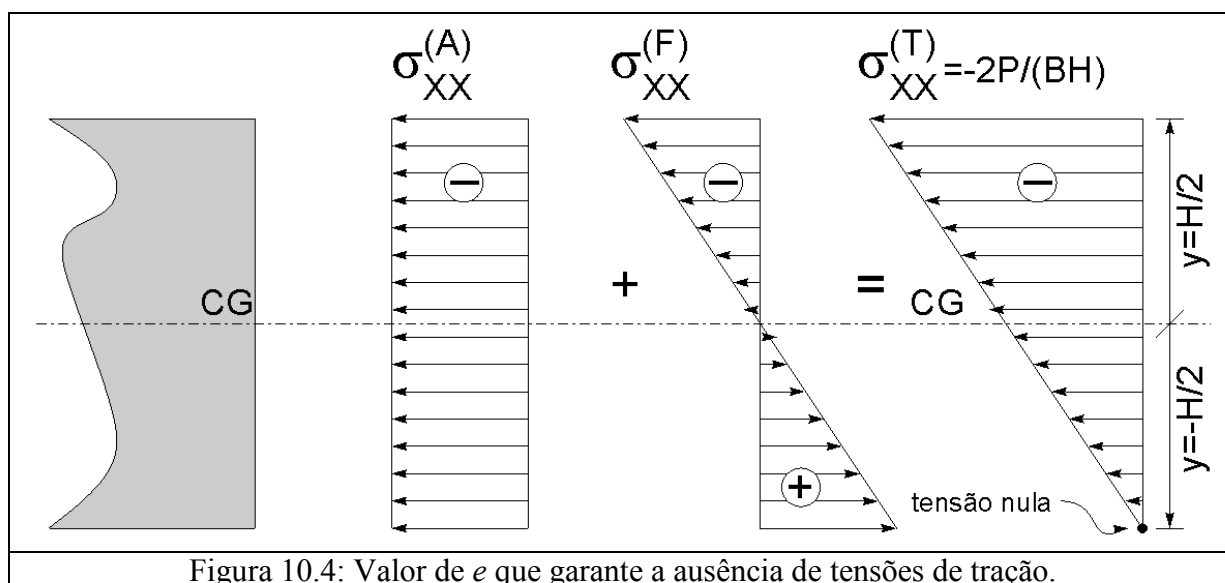


Figura 10.4: Valor de  $e$  que garante a ausência de tensões de tração.

$$\sigma_{xx}^{(T)}\left(y = -\frac{H}{2}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{12e \cdot \left(-\frac{H}{2}\right)}{H^2} = 0 \Rightarrow e = \frac{H}{6} \quad (6)$$

Para um desvio  $e$  maior que este, a tensão passará a ter alguma parcela de tração. Nesta condição, a tensão normal máxima atuando na viga será:

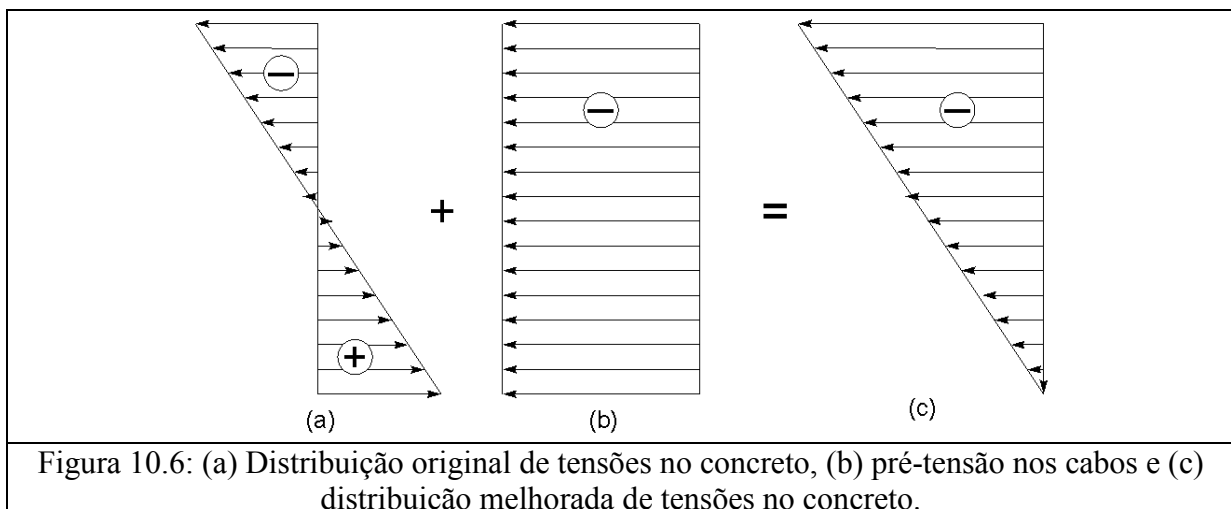
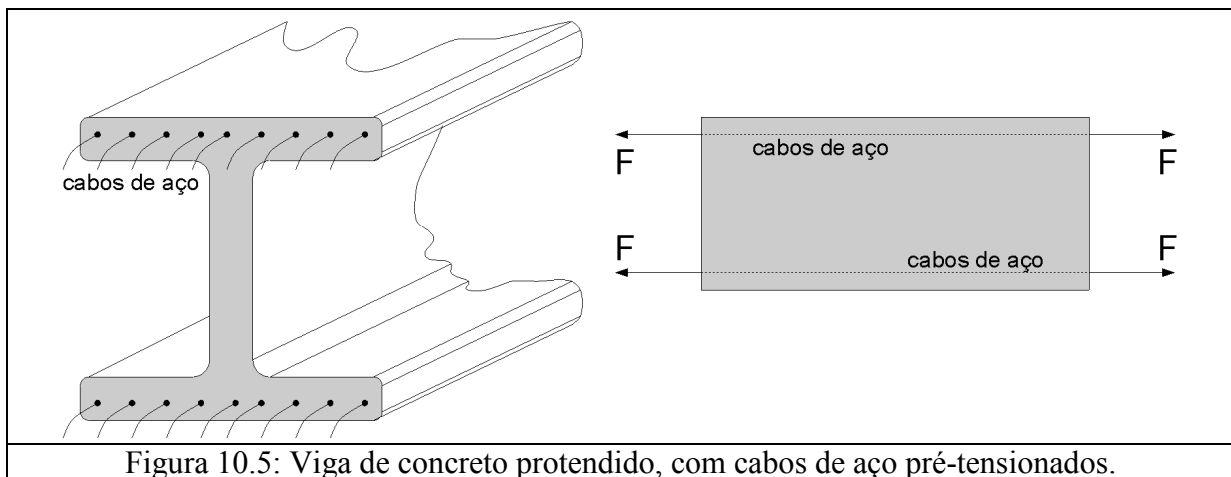
$$\sigma_{xx}^{(T)}\left(y = +\frac{H}{2}, e = \frac{H}{6}\right) = -\frac{2P}{BH} \quad (7)$$

## 2. Princípio do concreto protendido

A resistência à tração do concreto está situada na ordem de 10% de sua resistência à compressão. Este valor é tão pequeno que é geralmente desprezado nos cálculos estruturais. Isto é, admite-se simplesmente que o concreto não suporta tensões de tração, e faz-se os cálculos para que elas não ocorram. Contudo, na prática é impossível evitar o surgimento de carregamentos excêntricos, como o mostrado na Figura 10.1.

Uma forma usual de evitar as tensões de tração devido ao carregamento excêntrico é introduzir na estrutura um estado prévio de tensões, através de uma compressão da peça concretada.

A protensão do concreto é obtida com a utilização de cabos de aço de alta resistência, que são tracionados e fixados no próprio concreto (Figura 10.5).



Após a cura, a distribuição de tensões no concreto se soma à pré-tensão aplicada aos cabos de forma que uma distribuição melhorada é obtida, conforme mostrado na Figura 10.6.

### 3. Exercício proposto

A viga cuja seção transversal é mostrada na Figura 10.7b é carregada conforme visto na Figura 10.7a. Como o material da viga não suporta tração, foi adotada a solução construtiva mostrada na Figura 10.7c: duas placas são pressionadas de encontro às faces da viga por um tirante aparafusado de diâmetro  $d_C$ , que suporta uma tensão normal máxima  $\sigma_{XXCm\acute{a}x}$ . Determine qual a carga  $P$  máxima que pode ser aplicada sem que a viga se submeta a tensões de tração.

**Dados:**  $d_C = 25,4 \text{ mm}$ ;  $\sigma_{XXCm\acute{a}x} = 45 \text{ N/mm}^2$ ;  $L = 5 \text{ m}$ ;  $H = 300 \text{ mm}$ ;  $B = 200 \text{ mm}$ ;  $T = 25 \text{ mm}$ .

**Resposta:**  $P = 5506 \text{ N}$ .

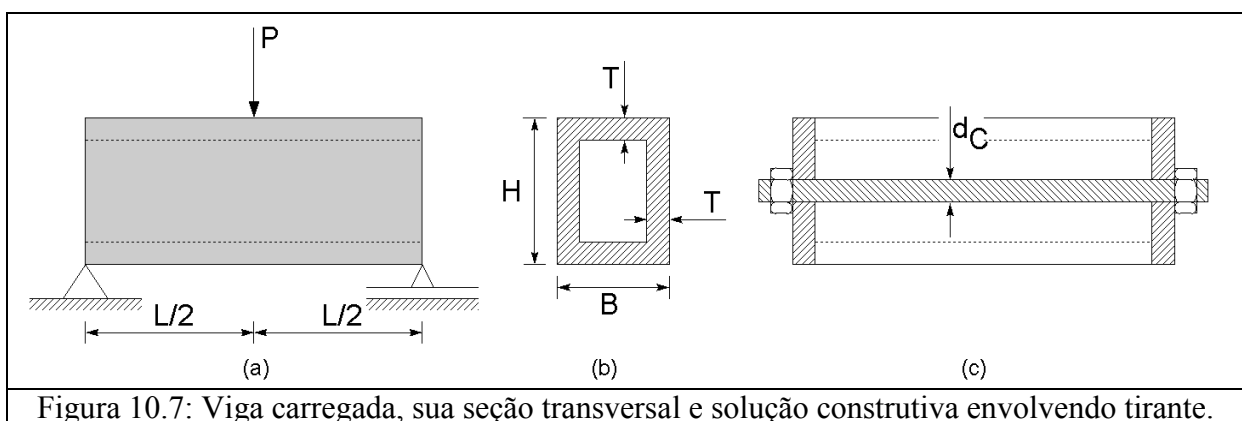


Figura 10.7: Viga carregada, sua seção transversal e solução construtiva envolvendo tirante.

### 4. Estabilidade de colunas

As equações diferenciais clássicas para vigas (Equação 8), com as quais temos trabalhado até este momento, foram deduzidas com base em modelos simplificados de vigas. Nestes modelos, o momento fletor e deflexões da viga eram independentes de esforços axiais que eventualmente estivessem sendo aplicados à viga (Figura 10.8).

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) I_{zz}(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right] = q(x) \quad (8)$$

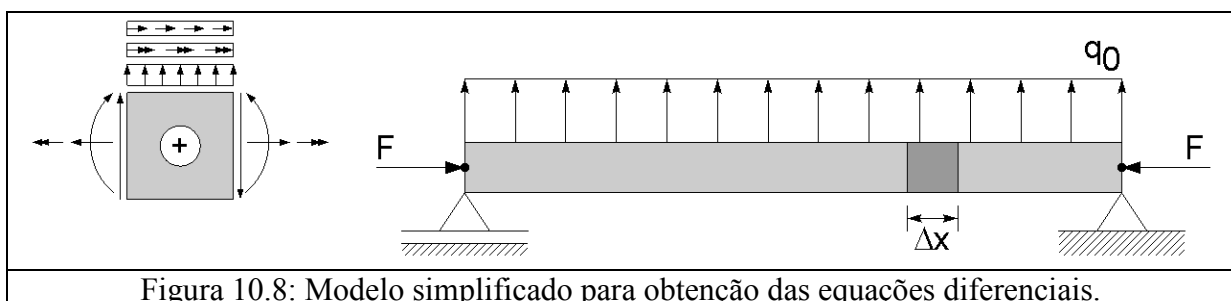


Figura 10.8: Modelo simplificado para obtenção das equações diferenciais.

Agora, um modelo de estado deformado mais realístico será considerado. As novas equações diferenciais determinadas a partir dele permitirão considerar a influência dos esforços axiais no comportamento das vigas.

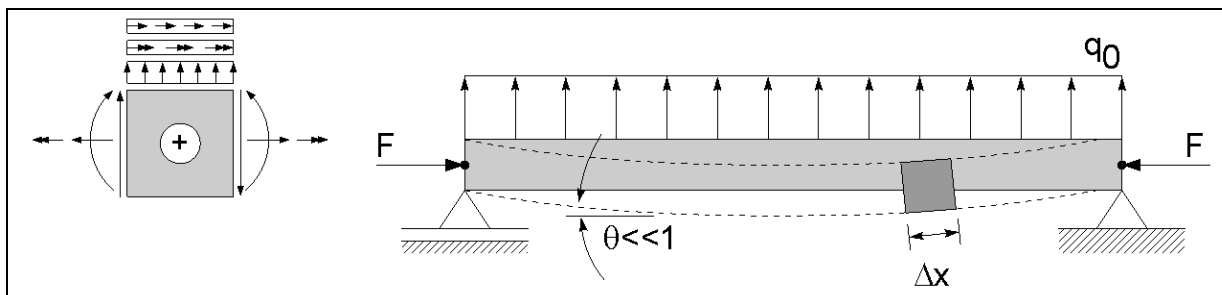
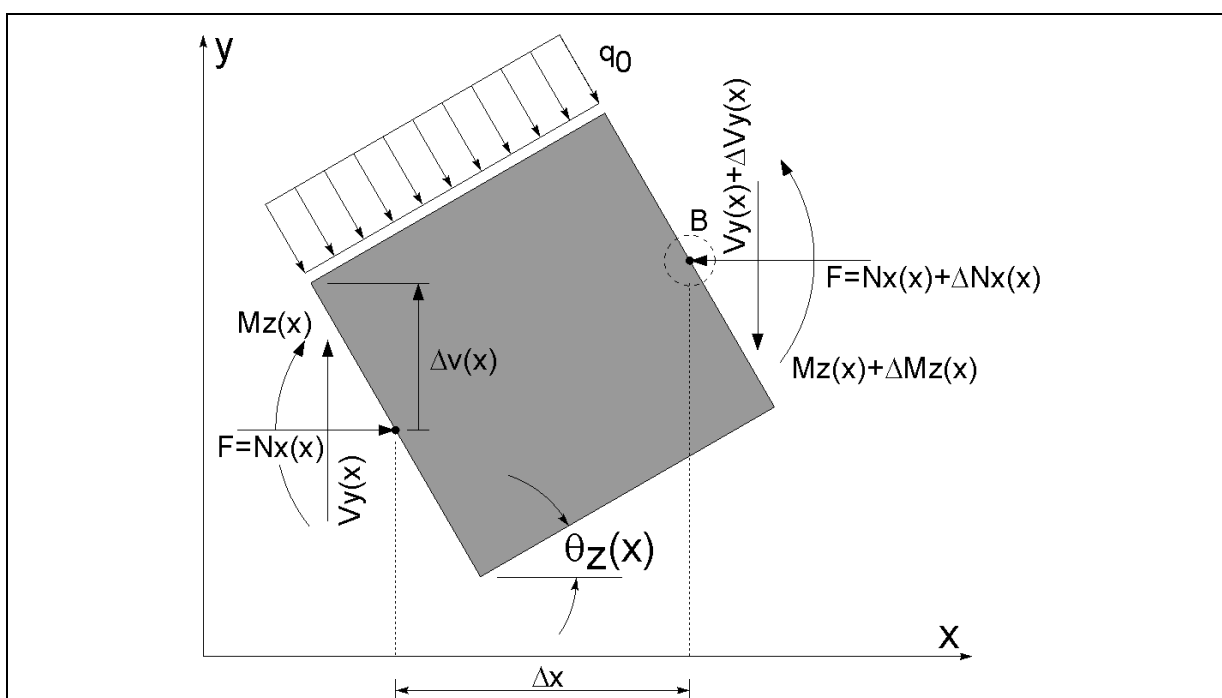


Figura 10.9: Modelo de estado deformado para obtenção das equações diferenciais.

Considere o modelo de estado deformado mostrado na Figura 10.9. Um trecho dessa viga é mostrado na Figura 10.10, com os esforços atuantes sobre ele. Observe que o esforço normal também está sendo considerado.


 Figura 10.10: Trecho  $\Delta x$  da viga para obtenção das novas equações diferenciais.

Do equilíbrio deste trecho de viga na direção  $y$ , tem-se a Equação 9. No limite em que a largura dessa seção  $\Delta x$  se torna diferencial, chega-se à Equação 10.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_y(x) - (V_y(x) + \Delta V_y(x)) - q_0 \Delta x = 0 \Rightarrow \frac{\Delta V_y(x)}{\Delta x} = q_0 \quad (9)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} V_y(x) = q_0 \quad (10)$$

Analogamente, do equilíbrio de momentos neste trecho em torno do ponto B, tem-se:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow +M_z(x) + V_y(x) \Delta x - F \Delta v(x) - (M_z(x) + \Delta M_z(x)) = 0$$

$$V_y(x) = \frac{d}{dx} M_z(x) + F \frac{d}{dx} v(x) \quad (11)$$

Substituindo-se (11) em (10), tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} M_z(x) + F \frac{d^2}{dx^2} v(x) = q(x) \quad (12)$$

No primeiro capítulo, já foi mostrado que:

$$E(x) I_{zz}(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) = M_z(x) \quad (13)$$

De (13) em (12), considerando E e  $I_{zz}$  constantes, tem-se:

$$EI_{zz} \frac{d^4}{dx^4} v(x) + F \frac{d^2}{dx^2} v(x) = q(x) \quad (14)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} v(x) + \lambda^2 \frac{d^2}{dx^2} v(x) = q(x), \text{ com } \lambda^2 = \frac{F}{EI_{zz}} \quad (15)$$

No caso da compressão pura,  $q(x) = 0$  e tem-se a equação homogênea:

$$\frac{d^4}{dx^4} v(x) + \lambda^2 \frac{d^2}{dx^2} v(x) = 0 \quad (16)$$

A Equação 16 é uma equação diferencial homogênea de quarta ordem, cuja solução geral pode ser escrita com ajuda de quatro constantes. As constantes  $C_i$  variam para cada problema, de acordo com as condições de contorno.

$$v(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 x + C_4 \quad (17)$$

$$\theta_z(x) \approx \frac{d}{dx} v(x) = \lambda C_1 \cos(\lambda x) - \lambda C_2 \sin(\lambda x) + C_3 \quad (18)$$

$$M_z(x) \approx \frac{d^2}{dx^2} v(x) = -\lambda^2 C_1 \sin(\lambda x) - \lambda^2 C_2 \cos(\lambda x) \quad (19)$$

$$V_y(x) \approx \frac{d^3}{dx^3} v(x) = -\lambda^3 C_1 \cos(\lambda x) + \lambda^3 C_2 \sin(\lambda x) \quad (20)$$

## 5. Coluna de Euler

Considere o exemplo de coluna mostrado na Figura 10.11, conhecida como Coluna de Euler. Este problema tem as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} v(y=0) &= 0 \\ v(y=L) &= 0 \\ M_z(y=0) &= 0 \\ M_z(y=L) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Aplicando estas condições nas equações de (17) a (20), chega-se ao sistema linear da Equação 22. Trata-se de uma equação homogênea do tipo  $[A]\{C_i\} = \{b\}$ , cuja solução não-trivial é dada pelos valores de  $\lambda$  que anulam o determinante da matriz  $[A]$ , como mostrado na Equação 23.



$$\begin{cases} v(y=0) = 0 \\ v(y=L) = 0 \\ M_z(y=0) = 0 \\ M_z(y=L) = 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{sen}(\lambda L) & \text{sen}(\lambda L) & L & 1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 \text{sen}(\lambda L) & -\lambda^2 \text{cos}(\lambda L) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\det([A]) = \lambda^5 \text{sen}(\lambda L) = 0 \quad (23)$$

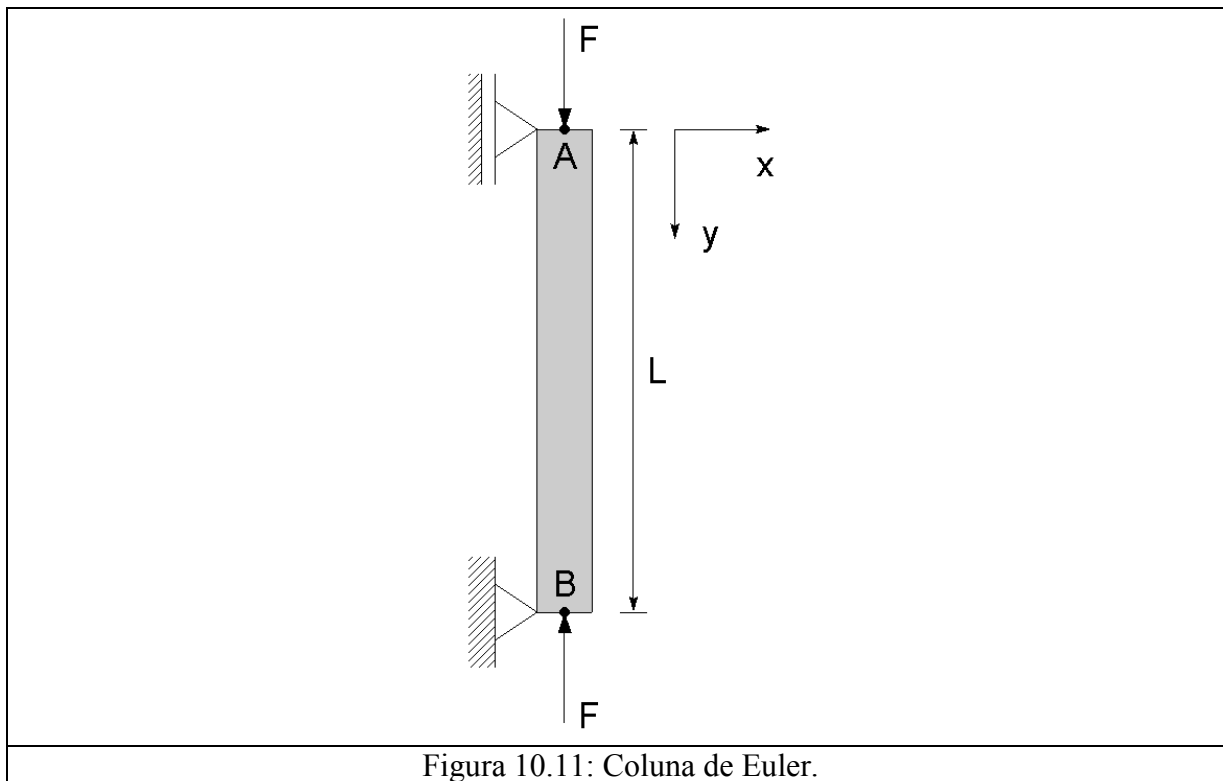


Figura 10.11: Coluna de Euler.

O parâmetro  $\lambda$  é dado por propriedades físicas que não são nulas (Equação 15). Assim, para que a Equação 23 seja válida, é necessário que  $\text{sen}(\lambda L) = 0$ . Isto ocorre sempre que  $\lambda L = \pi n$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Isto é, os valores de  $\lambda$  dados pela Equação 24 são os auto-valores que satisfazem  $\det(A) = 0$  e são soluções do problema.

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad (24)$$

Para esses autovalores, tem-se que  $C_2 = C_3 = C_4 = 0$  e então:

$$v_n(x) = C_1 \text{sen}(\lambda_n x) = C_1 \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (25)$$

$$\text{Como } \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{F_n}{EI_{zz}} \Rightarrow F_n = \frac{EI_{zz} n^2 \pi^2}{L^2} \quad (26)$$

A força crítica é a menor entre essas  $F_n$ , ou seja, quando  $n = 1$ . Assim, a força que causa flambagem é:

$$F_{\text{ncritica}} = \frac{\pi^2}{L^2} EI_{ZZ\text{mínimo}} \quad (27)$$

Na Equação 27, o momento de inércia  $I_{ZZ\text{mínimo}}$  refere-se ao momento de inércia da direção onde é mais fácil ocorrer flambagem. Se o momento de inércia  $I_{ZZY}$  na direção  $y$  for menor que  $I_{ZZ}$ , a flambagem ocorrerá na direção do eixo  $y$ .

## 6. Outros tipos de condições de contorno

Problemas com condições de contorno diferentes das da coluna de Euler resultarão em autovalores diferentes e conseqüentemente expressões diferentes para a carga crítica de flambagem. Contudo, pode-se estabelecer um “comprimento equivalente” com o qual a mesma expressão de carga crítica (Equação 28) pode ser aplicada. O comprimento equivalente a ser utilizado na expressão varia de acordo com as condições de contorno do problema considerado. Alguns exemplos são mostrados na Figura 10.12.

$$F_{\text{ncritica}} = \frac{\pi^2}{L_{\text{equivalente}}^2} EI_{ZZ\text{mínimo}} \quad (28)$$

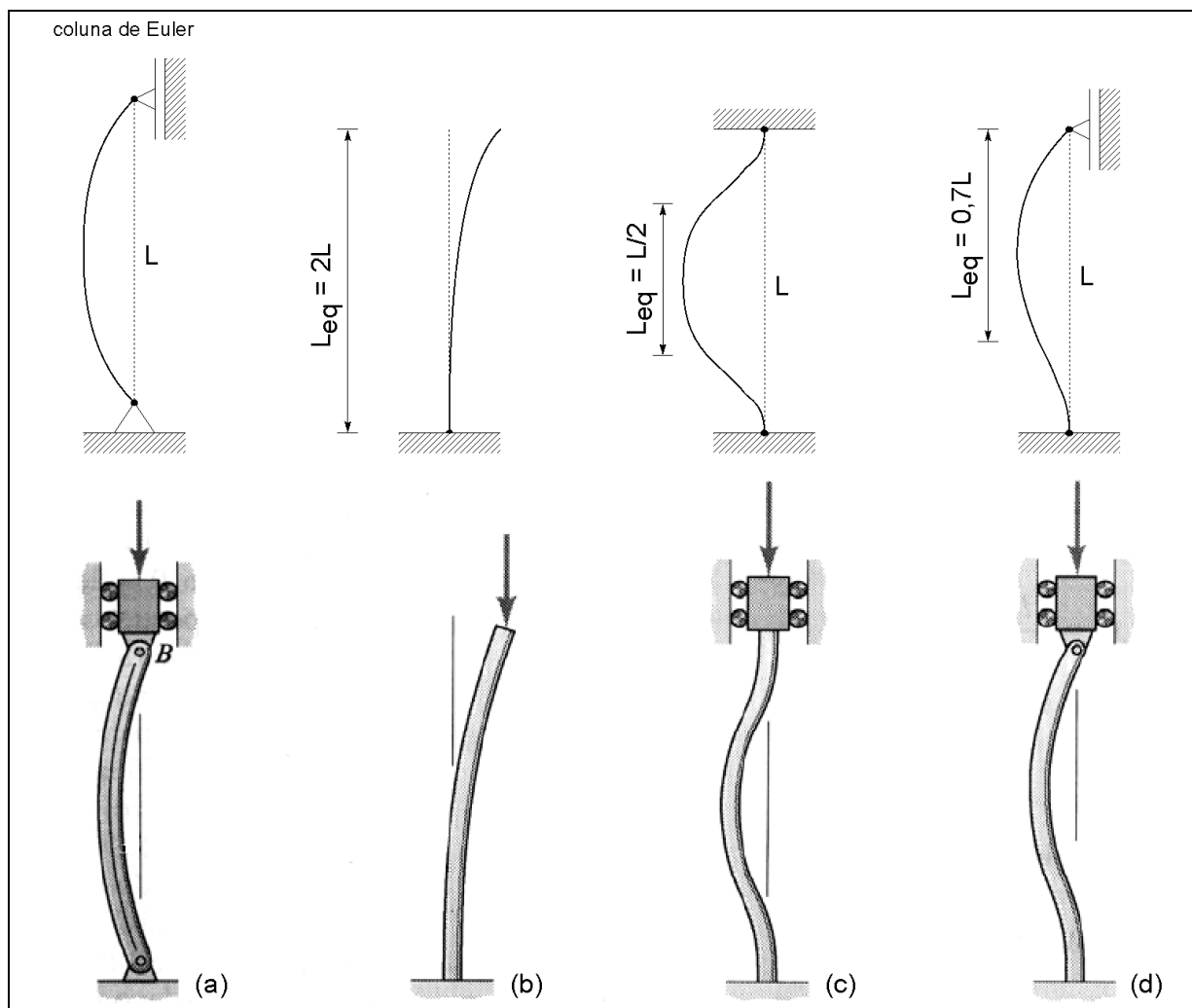


Figura 10.12: Outros tipos de condições de contorno e comprimentos equivalentes. Fonte das figuras inferiores: Luciano Lima, “Flambagem de colunas”.

## 7. Flambagem em treliças

Em uma composição de barras como uma treliça, fatalmente algumas das barras estarão sujeitas a compressão. Dessa forma, treliças são bons exemplos de estruturas onde o projeto contra flambagem é essencial.

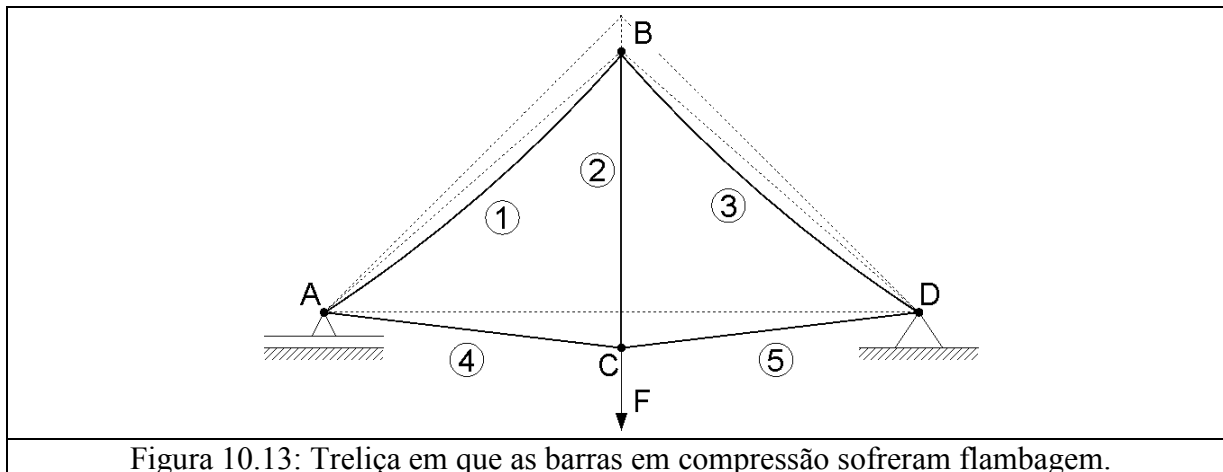


Figura 10.13: Treliça em que as barras em compressão sofreram flambagem.

A Figura 10.13 mostra um exemplo de treliça em que as barras em compressão (AB e DB) sofreram flambagem. Este problema pode ser diminuído com a introdução de barras intermediárias que coíbem a flambagem das barras, conforme mostra a Figura 10.14. As barras BF e FD, neste exemplo, têm pouca função estrutural.

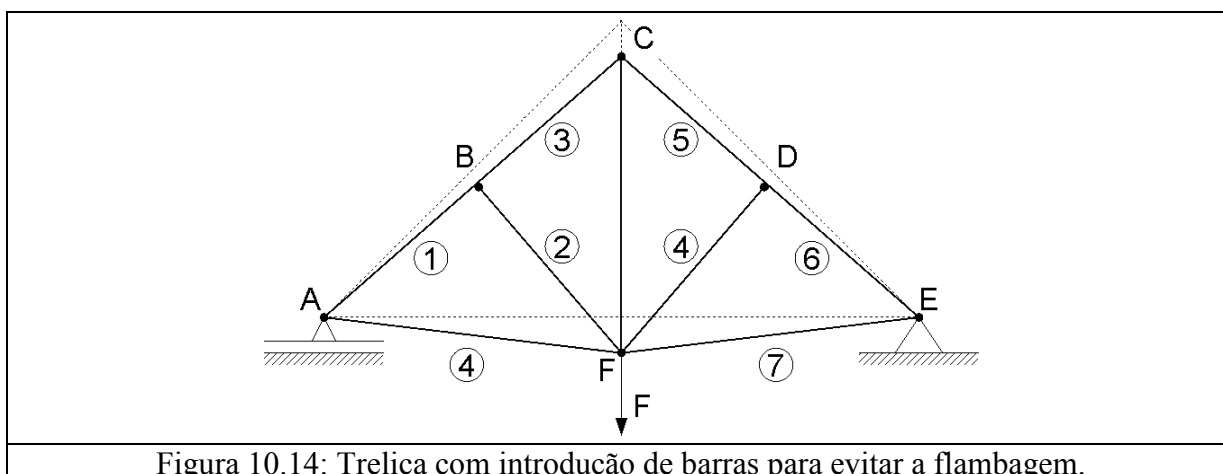


Figura 10.14: Treliça com introdução de barras para evitar a flambagem.

## 8. Exercício proposto (Do Exame de 2007; 10,0 pontos)

Considere a ponte mostrada na Figura 8.27. Determine o máximo carregamento  $q_0$  que pode ser aplicado à viga sem que a coluna BD sofra flambagem?

## 9. Exercício proposto

Na Seção 7, foi dito que as barras BF e FD da treliça da Figura 10.14 têm “pouca função estrutural”. Determine qual a redução da flecha no ponto F com a adição dessas barras, em relação à flecha original. Resolva por Associação de Sistemas, por um dos métodos de energia, e finalmente por Análise Matricial de Estruturas. Compare as respostas de cada método.