

# Apostila de Resistência dos Materiais

prof. Flávio de Souza Barbosa (flavio.barbosa@ufjf.edu.br)

5 de agosto de 2008

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Aspectos gerais do curso . . . . .	3
1.1.1	Objetivos Gerais . . . . .	3
1.1.2	Ementa . . . . .	3
1.1.3	Programa e distribuição das aulas . . . . .	3
1.1.4	Bibliografia básica . . . . .	4
1.2	Sistema de Avaliação . . . . .	4
1.3	Visão geral do conteúdo do curso . . . . .	5
1.3.1	Um conceito de cálculo estrutural . . . . .	8
1.3.2	Pressupostos e hipóteses básicas da Resistência dos Materiais . . . . .	9
1.3.3	Exercícios . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Introdução à Análise de Tensões e Deformações</b>	<b>11</b>
2.1	Estudo das tensões . . . . .	11
2.1.1	Introdução . . . . .	11
2.1.2	Exercícios . . . . .	13
2.1.3	O Tensor de tensões . . . . .	16
2.1.4	Exercícios . . . . .	20
2.2	Estudo das deformações: . . . . .	22
2.2.1	Introdução . . . . .	22
2.2.2	Campo de deslocamento . . . . .	23
2.2.3	Componentes de Deformação . . . . .	25
2.2.4	Relação Deformação-Deslocamento . . . . .	27
2.2.5	Exercícios . . . . .	30
2.3	Relações entre tensões e deformações . . . . .	31
2.3.1	O Teste ou Ensaio de Tração: . . . . .	31
2.3.2	Ensaio de Compressão . . . . .	35
2.3.3	O ensaio de torção . . . . .	35
2.3.4	Lei de Hooke generalizada . . . . .	36
2.3.5	Exercícios . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Tensões e Deformações em Barras de Eixo Reto</b>	<b>40</b>
3.1	Solicitação por esforço normal . . . . .	44
3.1.1	Exercícios . . . . .	47
3.2	Solicitação por momento torsor . . . . .	55
3.2.1	Introdução . . . . .	55
3.2.2	Análise de Tensões e deformações na torção . . . . .	56
3.2.3	Cálculo do ângulo de torção . . . . .	58
3.2.4	Torque Aplicado ao eixo na Transmissão de Potência . . . . .	58

3.2.5	Exercícios . . . . .	59
3.2.6	Torção em tubos de paredes delgadas . . . . .	62
3.2.7	Exercícios . . . . .	64
3.3	Solicitação por momento fletor . . . . .	68
3.3.1	Introdução . . . . .	68
3.3.2	Cálculo das Tensões Normais . . . . .	69
3.3.3	Exercícios . . . . .	73
3.3.4	Várias formas da seção transversal . . . . .	76
3.3.5	Exercícios . . . . .	77
3.3.6	Vigas de dois materiais . . . . .	79
3.3.7	Exercícios . . . . .	83
3.3.8	Flexão Inelástica . . . . .	86
3.4	Solicitação por Esforço Cortante . . . . .	100
3.4.1	Introdução . . . . .	100
3.4.2	Tensões de Cisalhamento em Vigas de Seção Retangular Constante . . . . .	101
3.4.3	Tensões de Cisalhamento em Vigas de Seção de Diferentes Formas . . . . .	104
3.4.4	Exercícios . . . . .	105
3.4.5	Fluxo de cisalhamento . . . . .	109
3.4.6	Exercícios . . . . .	113
3.4.7	Centro de cisalhamento . . . . .	114
3.4.8	Exercícios . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Tópicos complementares</b>	<b>120</b>
4.1	Linha elástica de vigas sujeitas à flexão . . . . .	120
4.1.1	Definição . . . . .	120
4.1.2	Ângulo de curvatura . . . . .	120
4.1.3	Equação diferencial da LE . . . . .	121
4.1.4	Método da integração direta . . . . .	123
4.1.5	Exercícios . . . . .	124
4.2	Problemas estaticamente indeterminados . . . . .	129
4.2.1	Exemplos . . . . .	129
4.2.2	Exercícios . . . . .	131

# Capítulo 1

## Introdução

Esta apostila possui diversas partes extraídas da apostila de Resistência dos Materiais do Prof. João Chafi Hallack.

### 1.1 Aspectos gerais do curso

#### 1.1.1 Objetivos Gerais

Fornecer ao aluno conhecimentos básicos das propriedades mecânicas dos sólidos reais, com vistas à sua utilização no projeto e cálculo de estruturas. Capacitar o aluno ao cálculo de tensões e deformações causadas pelos esforços simples, no regime da elasticidade, bem como à resolução de problemas simples de dimensionamento, avaliação e verificação.

#### 1.1.2 Ementa

Princípios e Objetivos da Resistência dos Materiais. Métodos de Análise. Tensões e Deformações. Tração e Compressão Simples. Cisalhamento Simples. Torção. Flexão Pura em Vigas. Tensões de Cisalhamento em Vigas. Deformações em Vigas.

#### 1.1.3 Programa e distribuição das aulas

1. Introdução (2 aulas)
2. Tensões (4 aulas)
3. Deformações (2 aulas)
4. Relações entre tensões e deformações (2 aulas)
5. Tensões e deformações em barras
  - (a) Solicitação por esforço normal (6 aulas)
  - (b) Solicitação por momento torsor (6 aulas)
  - (c) Solicitação por momento fletor (10 aulas)
  - (d) Solicitação por esforço cortante (6 aulas)
6. Linha elástica em vigas sujeitas à flexão (6 aulas)

7. Problemas estaticamente indeterminados (4 aulas)
8. Provas, atividades extras (12 aulas)

#### **1.1.4 Bibliografia básica**

1. HIBBELER, R.C. Resistência dos Materiais. Ed. Pearson
2. BEER, Ferdinand, JOHNSTON, E. Russell. Resistência dos Materiais. Mc Graw Hill.
3. GERE, James M. Mecânica dos Materiais. Editora Thomson.
4. TIMOSHENKO, Stephen, GERE, James. Mecânica dos Sólidos; vol. 1. LTC editora.
5. POPOV, Egor Paul. Resistência dos Materiais. PHB editora.
6. SHAMES. Mecânica dos Sólidos.

## **1.2 Sistema de Avaliação**

- 1º TVC - até item 5 (a) - valor 100 pontos - data: 26/08/08 , 8h.
- 2º TVC - até item 5 (c) - valor 100 pontos - data: 30/09/2008, 8h.
- 3º TVC - até item 7 - valor 100 pontos - data: 04/11/2008, 8h.
- 2ª chamada - matéria toda - data 11/11/2008, 8h.

Nota Final = (Nota 1º TVC + Nota 2º TVC + Nota 3º TVC)/3  
O aluno será aprovado se obtiver Nota Final maior ou igual 60.

## 1.3 Visão geral do conteúdo do curso

Este capítulo visa dar uma visão geral sobre o estudo da resistência dos materiais e suas hipóteses básicas, da organização deste texto e da forma com que cada capítulo abrange o conteúdo da disciplina.

O estudo da Resistência dos Materiais tem por objetivo fornecer conhecimentos básicos das propriedades mecânicas de sólidos reais, visando utilizá-los no projeto, modelagem e cálculo de estruturas.

Por esta razão, em muitos cursos de Engenharia (Civil, Mecânica, Naval, Elétrica, etc) esta disciplina é intitulada *Introdução à Mecânica dos Sólidos* ou simplesmente *Mecânica dos Sólidos*.

A boa compreensão dos conceitos que envolvem a mecânica de sólidos está intimamente ligada ao estudo de duas grandezas físicas: A tensão e a deformação, que serão abordadas durante todo o tempo neste curso.

Estas duas grandezas físicas são fundamentais nos procedimentos que envolvem o cálculo de uma estrutura. Mas o que é uma estrutura? Estrutura é a parte resistente de uma construção e é constituída de diversos elementos estruturais que podem ser classificados como:

- blocos - os blocos são elementos estruturais nos quais tem-se as três dimensões (imaginando-se um retângulo envolvente) com valores significativos numa mesma ordem de grandeza. Alguns exemplos são mostrados nas figuras 1.1.



(a) Sapata de fundação



(b) Bloco de coroamento de estaca

Figura 1.1: Exemplos de elementos estruturais do tipo bloco

- placas - são elementos estruturais para os quais uma das dimensões (espessura) é bastante inferior às demais. Alguns exemplos são mostrados nas figuras 1.2. As “placas” curvas são denominadas de cascas. Exemplos nas figuras 1.3.
- barras - são elementos estruturais para os quais duas das dimensões (largura e altura) são bastante inferiores à terceira (comprimento). Podem ser retas (vigas, pilares, tirantes e escoras) ou curvas (arcos). Alguns exemplos são mostrados nas figuras 1.4
- elementos de forma geométrica de difícil definição - estes elementos estruturais apresentam dificuldades na descrição de seu comportamento físico mas não são menos



(a) Laje de uma edificação

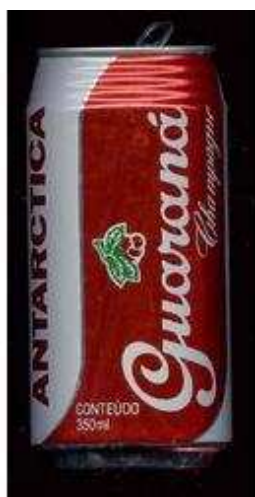


(b) Museu de Arte Moderna de São Paulo (MASP)

Figura 1.2: Exemplos de elementos estruturais do tipo placa



(a) Avião Embraer 190



(b) Lata de refrigerante



(c) Navio

Figura 1.3: Exemplos de elementos estruturais do tipo casca



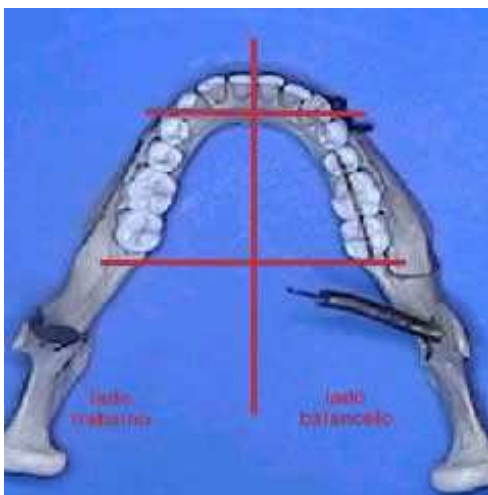
(a) Barras curvas - ponte JK sobre o lago Paranoá - Brasília



(b) Ponte com viga de seção variável - Rouen, França

Figura 1.4: Exemplos de elementos estruturais do tipo barra

numerosos que os demais. Num conceito amplo de estrutura estes elementos podem fazer parte da estrutura de um motor, um esqueleto humano ou uma peça mecânica ou mesmo uma estrutura civil mais rebuscada. Ver exemplos nas figuras 1.5.



(a) Mandíbula humana



(b) Motor de automóvel

Figura 1.5: Exemplos de elementos estruturais complexos

O curso de Resistência dos Materiais I procura dar ênfase ao estudo do elemento estrutural barra conforme se observa no capítulo 3.



### 1.3.1 Um conceito de cálculo estrutural

A idéia de cálculo estrutural pode ser dividida em três frentes de trabalho não independentes:

- **Fase 1 - Ante-projeto da estrutura:** Nesta fase uma concepção inicial do projeto é criada. A estrutura pode ser um edifício, um navio, um avião, uma prótese óssea, uma ponte, etc. As dimensões das peças estruturais são arbitradas segundo critérios técnicos e empíricos.
- **Fase 2 - Modelagem.** Modelar um fenômeno físico é descrever seu comportamento através de equações matemáticas. Neste processo parte-se normalmente de um modelo que reúne as principais propriedades do fenômeno que se deseja modelar. No caso de estruturas, os modelos estruturais são constituídos de elementos estruturais. A partir do conhecimento do comportamento dos elementos estruturais e do carregamento envolvido são determinadas as deformações e tensões a que a estrutura está submetida. No caso de barras, uma boa parte desta tarefa pode ser realizada com o auxílio dos conhecimentos a serem obtidos nesta disciplina (Resistência dos Materiais) e na disciplina Análise Estrutural. Para outros tipos de elementos estruturais, devido à complexidade dos cálculos, serão necessários estudos mais aprofundados em mecânica dos sólidos e métodos numéricos que viabilizem a solução do problema. O método numérico mais conhecido na modelagem estrutural é o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Em alguns casos, por se tratarem de elementos estruturais complexos mas que ocorrem com bastante frequência nas estruturas, vários estudos já foram realizados e apontam aproximações de boa qualidade. Estas aproximações normalmente são apresentados em forma de tabelas ou ábacos, mas são restritas a uma série de hipóteses simplificadoras e atendem somente alguns casos específicos, como por exemplo as tabelas para cálculo de esforços em lajes retangulares.

- **Fase 3 - Dimensionamento das peças.** Nesta fase é necessário o conhecimento de questões específicas de cada material que constitui a estrutura (aço, madeira, alumínio, compósito, concreto, etc). Este conhecimento será adquirido em cursos específicos como: Concreto I e II e Estruturas Metálicas. Nesta fase é possível que se tenha necessidade de retornar à Fase 1 pois os elementos estruturais podem ter sido sub ou super avaliados. Neste caso parte-se para um processo recursivo até que o grau de refinamento requerido para o projeto seja alcançado.

O cálculo de uma estrutura depende de três critérios:

- **Estabilidade:** Toda estrutura deverá atender às equações universais de equilíbrio estático.
- **Resistência:** Toda estrutura deverá resistir às tensões internas geradas pelas ações solicitantes.
- **Rigidez:** Além de resistir às tensões internas geradas pelas ações solicitantes, as estruturas não podem se deformar excessivamente.

### 1.3.2 Pressupostos e hipóteses básicas da Resistência dos Materiais

A Resistência dos Materiais é uma ciência desenvolvida a partir de *ensaios experimentais* e de *análises teóricas*.

Os ensaios ou testes experimentais, em laboratórios, visam determinar as características físicas dos materiais, tais como as propriedades de resistência e rigidez, usando corpos de prova de dimensões adequadas.

As análises teóricas determinam o comportamento mecânico das peças em modelos matemáticos idealizados, que devem ter razoável correlação com a realidade. Algumas hipóteses e pressupostos são admitidos nestas deduções e são eles:

#### 1. Continuidade Física:

A matéria apresenta uma estrutura contínua, ou seja, são desconsiderados todos os vazios e porosidades.

#### 2. Homogeneidade:

O material apresenta as mesmas características mecânicas, elasticidade e de resistência em todos os pontos.

#### 3. Isotropia:

O material apresenta as mesmas características mecânicas elásticas em todas as direções. Ex: As madeiras apresentam, nas direções das fibras, características mecânicas e resistentes distintas daquelas em direção perpendicular e portanto não é considerada um material isótropo.

#### 4. Equilíbrio:

Se uma estrutura está em equilíbrio, cada uma de suas partes também está em equilíbrio.

#### 5. Pequenas Deformações:

As deformações são muito pequenas quando comparadas com as dimensões da estrutura.

#### 6. Saint-Venant:

Sistemas de forças estaticamente equivalentes causam efeitos idênticos em pontos suficientemente afastados da região de aplicação das cargas.

#### 7. Seções planas:

A seção transversal, após a deformação, permanece plana e normal à linha média (eixo deformado).

#### 8. Conservação das áreas:

A seção transversal, após a deformação, conserva as suas dimensões primitivas.

#### 9. Lei de Hooke:

A força aplicada é proporcional ao deslocamento.

$$F = kd \tag{1.1}$$

onde:  $F$  é a força aplicada;  $k$  é a constante elástica de rigidez e  $d$  é o deslocamento;

#### 10. Princípio da Superposição de efeitos:

Os efeitos causados por um sistema de forças externas são a soma dos efeitos produzidos por cada força considerada agindo isoladamente e independente das outras.

A fim de compensar as incertezas na avaliação das cargas, na determinação das propriedades dos materiais, nos pressupostos ou nas simplificações, é previsto nas Normas Técnicas a adoção de coeficientes de segurança. Consiste em se majorar as cargas e se reduzir a resistência dos materiais. Os diversos critérios adotados para escolha dos coeficientes de segurança adequados são estudados ao longo do curso de Engenharia Civil. Adota-se neste texto um coeficiente de segurança único que reduz a capacidade de carga da estrutura.

### 1.3.3 Exercícios

1. Dê um conceito para estrutura.
2. Descreva os tipos de elementos estruturais.
3. Conceitue cálculo estrutural.
4. Quais são as hipóteses básicas e/ou pressupostos da Resistência dos Materiais?

# Capítulo 2

## Introdução à Análise de Tensões e Deformações

### 2.1 Estudo das tensões

#### 2.1.1 Introdução

Um conceito da grandeza tensão pode ser encarado como uma extensão do conceito da grandeza pressão.

Imaginemos o sistema de êmbolos apresentado abaixo:

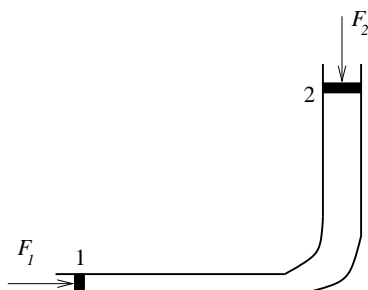


Figura 2.1: Sistema de êmbolos

Utilizando-se os conceitos de física do ensino médio, pode-se dizer que a pressão  $P$  no interior do duto é constante e tem valor:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (2.1)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são as forças aplicadas nas extremidades e  $A_1$  e  $A_2$  são as áreas da seção transversal do duto onde são aplicadas  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente.

Os macacos hidráulicos são aplicações diretas da equação 2.1, pois com uma pequena força aplicada na extremidade 2 do sistema de êmbolos pode-se produzir uma força de magnitude considerável na extremidade 1, dependendo da razão entre as áreas  $A_1$  e  $A_2$ .

Algumas conclusões já podem ser obtidas analisando a grandeza pressão:

- Sua unidade de medida será: unidade de força dividido por unidade de área. No Sistema Internacional de Unidades (SI): Pa (Pascal) = N/m<sup>2</sup>. Como 1 Pa representa uma pressão relativamente pequena<sup>1</sup> normalmente se utiliza prefixos do tipo kilo (10<sup>3</sup>) ou mega (10<sup>6</sup>). Exemplos: 10 MPa, 45 kPa, etc.

---

<sup>1</sup> imagine uma força de 1N atuando em 1 m<sup>2</sup>.

- O módulo da pressão é o mesmo no interior do duto, mas a direção e sentido não. Pode-se dizer então que a pressão é uma grandeza vetorial.
- A direção da força  $F_2$  gerada no sistema de êmbolo é sempre a mesma da pressão atuante na seção 2, e esta direção é sempre normal à superfície do êmbolo.

Porque surgiu pressão no interior do duto?

A resposta é simples: Sempre que se tenta movimentar uma massa de fluido e existem restrições ao deslocamento, surgem as pressões. Assim sendo, no caso do êmbolo da figura 2.1, se não existir resistência na seção 2, o fluido entraria em movimento acelerado e escoaria sem o surgimento de pressões internas. Em outras palavras, é preciso que haja confinamento (pressão positiva) ou aumento do volume dos dutos (pressão negativa).

Um raciocínio análogo pode ser aplicado aos sólidos. Supondo que se exerça uma força  $F$  sobre um sólido qualquer conforme figura 2.2.

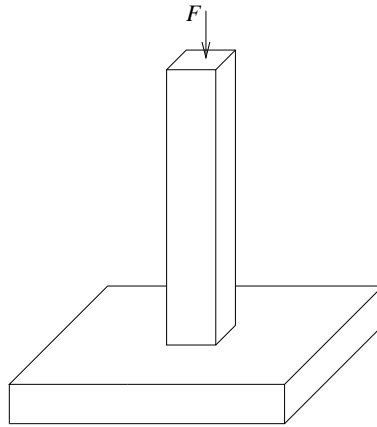


Figura 2.2: Sólido sujeito a carregamento

Da mesma maneira que nos fluidos, tem-se duas possibilidades: ou o sólido entra em movimento ou, no caso onde existam restrições ao deslocamento (como no exemplo da figura 2.2), surgem o que nos sólidos se denominam **tensões**.

A grande diferença entre sólidos e fluidos pode ser observada na figura 2.3:

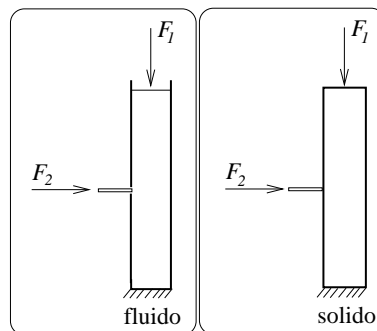


Figura 2.3: Fluido e sólido sujeitos a carregamentos

Em ambos os casos na figura surgirão pressões (para o fluido) e tensões (para o sólido) quando se aplica a carga  $F_1$  (direção axial do tubo). Entretanto, quando se aplica a carga  $F_2$  (transversal ao tubo) pode-se verificar que o fluido não oferece a menor resistência ao corte ou cisalhamento, porém no sólido isso não acontece. Esta diferença motivou os

pesquisadores a estudarem os sólidos e os fluidos em duas grandes áreas do conhecimento: Mecânica dos Sólidos e Mecânica dos Fluidos.

Então, diferentemente dos líquidos, as tensões em um sólido podem ocorrer de duas formas:

- **Tensões normais:** Estas tensões são resultado de um carregamento<sup>2</sup> que provoca a aproximação ou o afastamento de moléculas que constituem o sólido. É o caso do carregamento  $F_1$  da figura 2.3.
- **Tensões cisalhantes ou tangenciais:** Estas tensões são resultado de um carregamento que provoca um deslizamento relativo de moléculas que constituem o sólido. É o caso do carregamento  $F_2$  da figura 2.3.

### 2.1.2 Exercícios

1. Uma placa é fixada a uma base de madeira por meio de três parafusos de diâmetro 22mm. Calcular a tensão média de cisalhamento nos parafusos para uma carga  $P=120$  kN, conforme mostra a figura 2.4  
Resp.:105,2 MPa

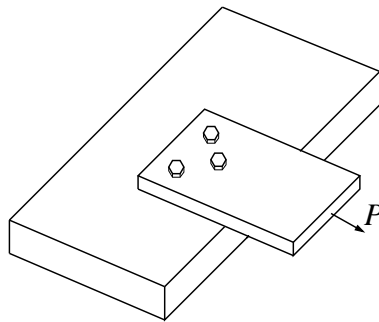


Figura 2.4: Figura do exercício 1

2. Duas peças de madeira de seção retangular 80mm x 140mm são coladas uma à outra em um entalhe inclinado, conforme mostra a figura 2.5. Calcular as tensões na cola para  $P = 16$  kN e para:  
a)  $\theta = 30^\circ$  ; b)  $\theta = 45^\circ$  ; c)  $\theta = 60^\circ$   
Resp.: a)  $\sigma_N=357,1$  kPa,  $\tau_N=618,6$  kPa ; b)  $\sigma_N = \tau_N=714,3$  kPa ; c)  $\sigma_N=1071,0$  kPa,  $\tau_N=618,6$  kPa

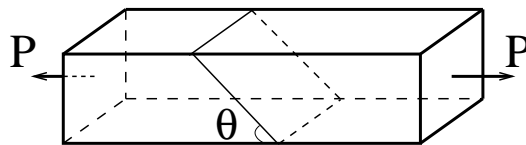


Figura 2.5: Figura do exercício 2

3. Determinar a tensão normal de compressão mútua (ou tensões de “contato” ou tensão de “esmagamento”) da figura 2.6 entre:

<sup>2</sup>carregamento neste caso pode ser entendido como: sistema de forças aplicado, variação de temperatura, modificação nas condições de apoio ou deslocamento imposto

a) o bloco de madeira de seção 100mm x 120mm e a base de concreto 500mm x 500mm x 60mm.

b) a base de concreto e o solo.

Resp.: a) 3333 kPa ; b) 160 kPa

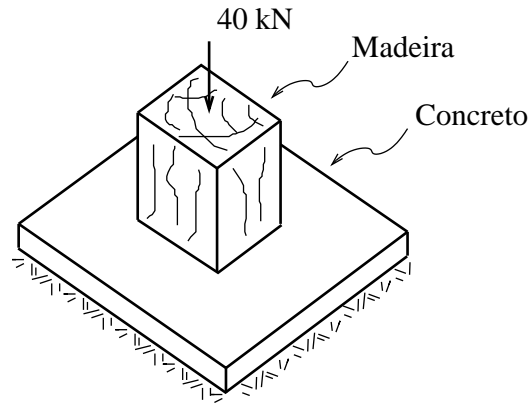


Figura 2.6: Figura do exercício 3

4. Calcular as tensões de “contato” em  $A$ ,  $B$  e  $C$ , na estrutura representada na figura 2.7. (dimensões em metros)

Resp.: 777,8 kPa, 888,9 kPa e 1111 kPa

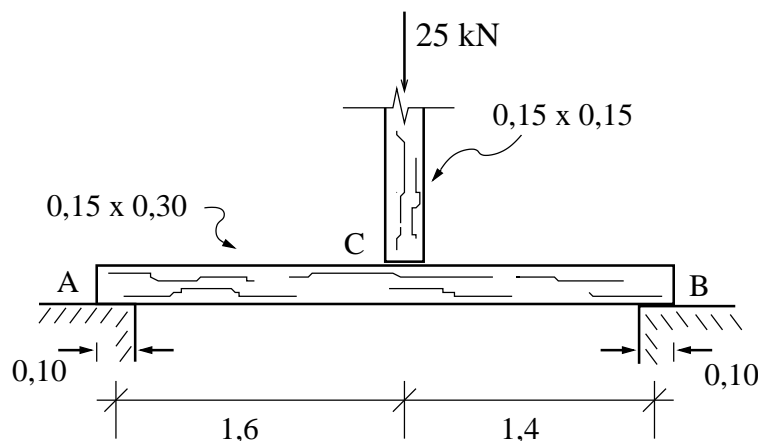


Figura 2.7: Figura do exercício 4

5. Calcular o comprimento total  $2L$  da ligação de duas peças de madeira, conforme a figura 2.8, e a altura  $h$  necessária, dados  $P = 50$  kN,  $b = 250$ mm e as tensões admissíveis na madeira são: 0,8MPa ao corte e 6,5 MPa à compressão.

Resp.:  $2L = 500$ mm ;  $h = 31$ mm.

6. Duas peças de madeira de seção 5cm x 5cm são coladas na seção inclinada  $AB$  (ver figura 2.9). Calcular o valor máximo admissível da carga  $P$ , axial de compressão, dadas as tensões admissíveis na cola: 9,0 MPa à compressão e 1,8 MPa ao cisalhamento.

Resp.:  $P = 18,0$  kN.

7. Um parafuso de 20mm de diâmetro é apertado contra uma peça de madeira exercendo-se uma tensão de tração de 120 MPa (ver figura 2.10). Calcular a espessura  $e$  da

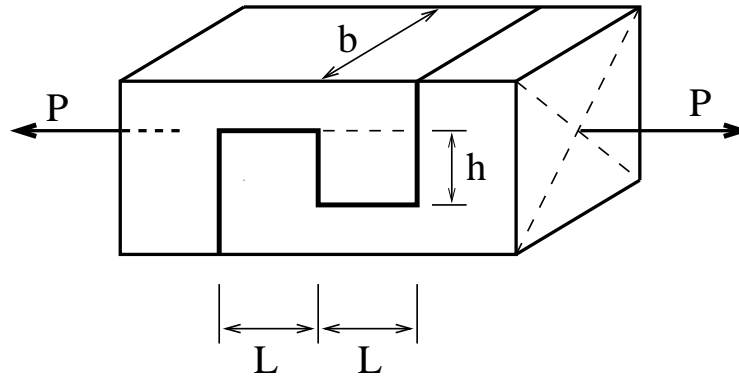


Figura 2.8: Figura do exercício 5

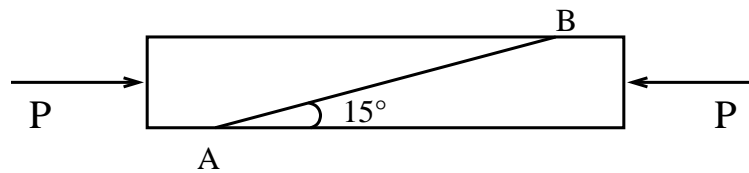


Figura 2.9: Figura do exercício 6

cabeça do parafuso e o diâmetro externo  $d$  da arruela, dadas as tensões admissíveis 50 MPa, ao corte no parafuso, e 10 MPa, à compressão na madeira  
 Resp.:  $e = 12 \text{ mm}$  ;  $d = 72,11 \text{ mm}$

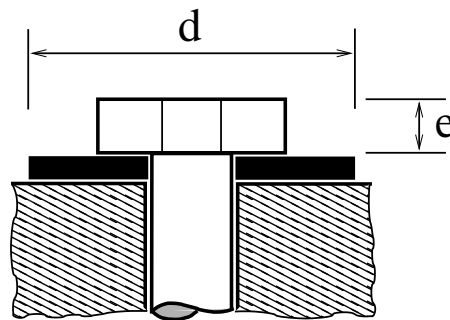


Figura 2.10: Figura do exercício 7

8. Um eixo vertical é suportado por um colar de escora sobre uma placa de apoio (ver figura 2.11). Determinar a carga axial máxima que pode ser aplicada ao eixo se a tensão média de corte no colar e a tensão média entre o colar e a placa são limitadas respectivamente por 40 MPa e 65 MPa.  
 Resp.: 314,16 kN
9. Uma articulação de pino deve resistir a uma força de tração  $P = 60 \text{ kN}$  (ver figura 2.12). Calcular o diâmetro do pino e a espessura mínima da chapa para as tensões admissíveis de 50 MPa ao corte e 120 MPa à tração.  
 Resp.:  $d = 19,55 \text{ mm}$  ;  $e = 6,25 \text{ mm}$
10. Uma chapa deve ser furada por punção, exercendo-se no perfurador uma tensão de compressão de 420 MPa. Na chapa, a tensão de rutura ao corte é de 315 MPa 2.13.  
 a) Calcular a espessura máxima da chapa para fazer um furo de 75 mm de diâmetro;



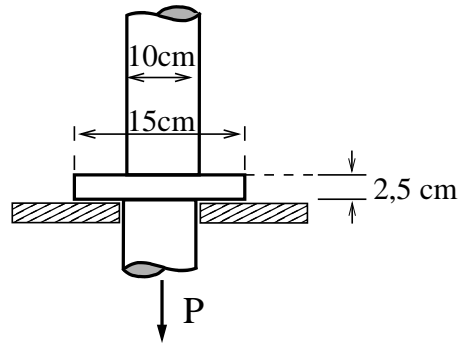


Figura 2.11: Figura do exercício 8

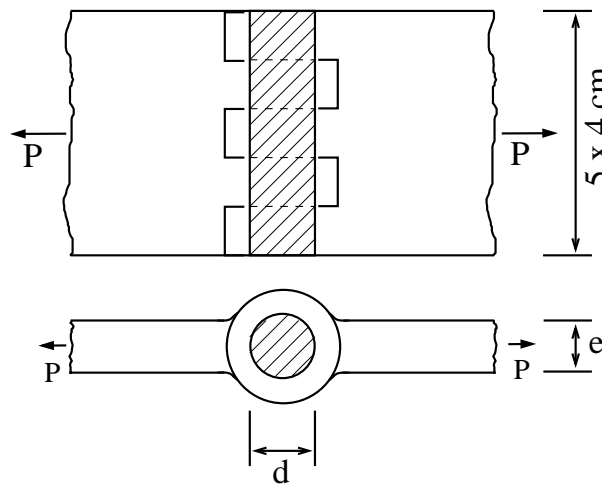


Figura 2.12: Figura do exercício 9

b) Calcular o menor diâmetro que pode ter o furo, se a espessura da chapa é de 6 mm.

Resp.: a) 25 mm ; b) 18 mm

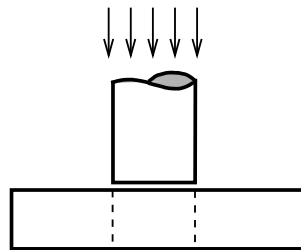


Figura 2.13: Figura do exercício 10

### 2.1.3 O Tensor de tensões

Uma vez compreendida as características fundamentais da grandeza tensão, e de sua ligação com a já conhecida grandeza pressão, passa-se agora ao seu estudo detalhado.

Partindo-se do exemplo apresentado na figura 2.14 duas observações podem ser feitas:

- Existem forças tentando aproximar ou afastar moléculas no entorno de M, nas três direções ortogonais, gerando tensões normais nestas três direções.

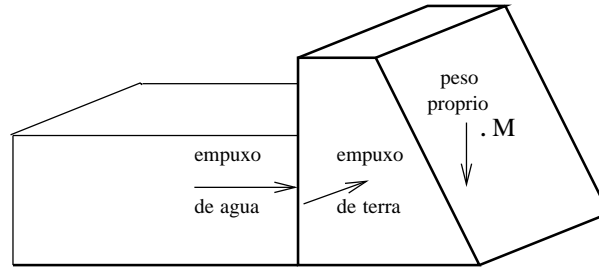


Figura 2.14: Barragem

- Existem forças tentando deslizar moléculas no entorno de M, nas três direções ortogonais, gerando tensões tangenciais ou cisalhantes nestas três direções.

Estas observações evidenciam que a tensão num dado ponto da estrutura depende do plano no qual se calcula a tensão. Admitindo-se um plano passando por M e que possui uma normal definida pelo vetor  $\vec{N}$ , pode-se dizer que a tensão  $\vec{\rho}_N$ , no ponto M no plano considerado, é a soma vetorial da tensão normal  $\vec{\sigma}_N$  com tensão tangencial  $\vec{\tau}_N$ , conforme figura 2.15. Sua definição matemática é escrita como:

$$\vec{\rho}_N = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{\Delta A} \quad (2.2)$$

onde  $d\vec{F}$  é a força de interação atuante na área  $\Delta A$ .

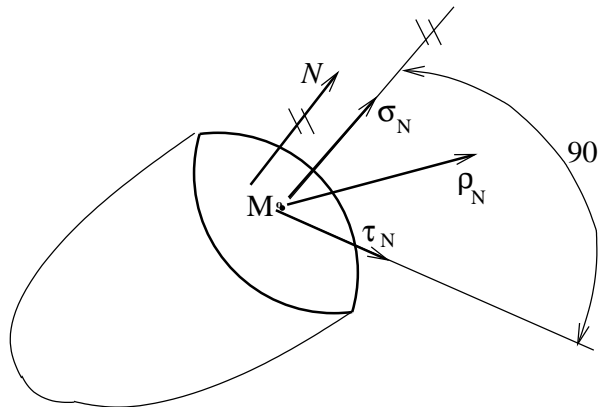


Figura 2.15: Tensões no ponto M num plano de normal  $\vec{N}$

Tomando-se então cada um dos três planos ortogonais  $yz$  (vetor normal paralelo ao eixo  $x$ ),  $xz$  (vetor normal paralelo ao eixo  $y$ ) e  $xy$  (vetor normal paralelo ao eixo  $z$ ) é possível definir três vetores tensões, respectivamente,  $\vec{\rho}_x$ ,  $\vec{\rho}_y$  e  $\vec{\rho}_z$  (ver figuras 2.16) que serão fundamentais no estudo da grandeza tensão. As equações 2.3 a 2.5 mostram estes vetores e suas componentes no referencial  $xyz$ . Observa-se que as tensão tangenciais totais foram decompostas em duas componentes.

$$\vec{\rho}_x = [\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}] \quad (2.3)$$

$$\vec{\rho}_y = [\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}] \quad (2.4)$$

$$\vec{\rho}_z = [\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}] \quad (2.5)$$

A nomenclatura usada é a seguinte:

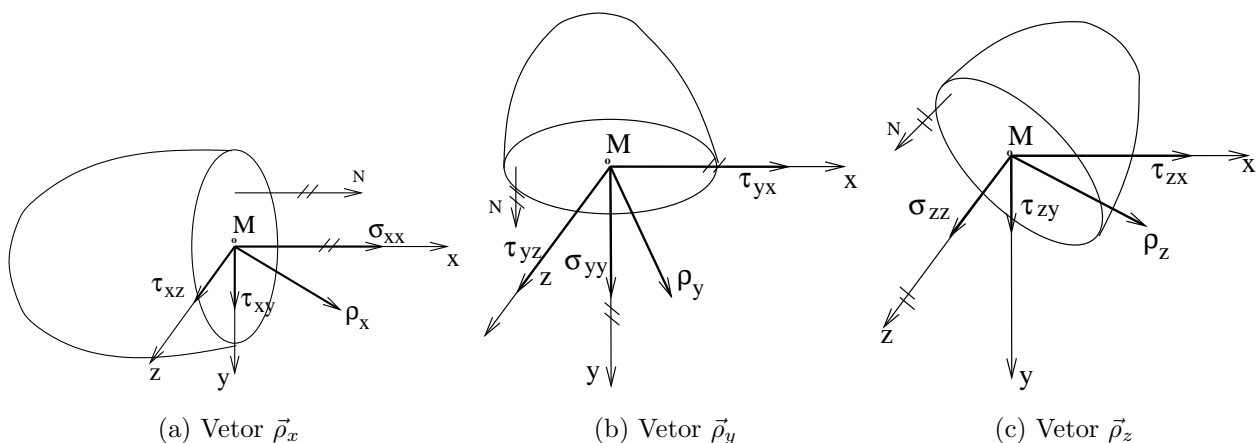


Figura 2.16: tensões nos três planos ortogonais

- As tensões normais são indicadas pela letra  $\sigma$  e as tangenciais pela letra  $\tau$ ;
- O primeiro índice identifica o plano considerado, pois indica a direção de sua normal. Exemplo:  $\tau_{xy}$  primeiro índice  $x \rightarrow$  plano:  $yz$ ;
- O segundo identifica a direção da componente do vetor tensão. Exemplo:  $\tau_{xy}$  segundo índice  $y \rightarrow$  direção da tensão:  $y$ ;

Normalmente, para índice idênticos, apresenta-se apenas um índice. Assim as equações 2.3 a 2.5 ficam:

$$\vec{\rho}_x = [\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}] \quad (2.6)$$

$$\vec{\rho}_y = [\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}] \quad (2.7)$$

$$\vec{\rho}_z = [\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z] \quad (2.8)$$

A maneira clássica de se apresentar os vetores  $\vec{\rho}_x$ ,  $\vec{\rho}_y$  e  $\vec{\rho}_z$  é o tensor de tensões<sup>3</sup> que usualmente é representado pela letra grega  $\sigma$  conforme mostrado na equação 2.9:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \vec{\rho}_x \\ \vec{\rho}_y \\ \vec{\rho}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Alguns dos nove elementos da matriz que compoem o tensor de tensões são relacionados entre si. Tomando-se um cubo formando um sólido infinitesimal em torno do ponto M, conforme figura 2.17, tem-se o chamado *sólido de tensões*.

Em cada uma das faces foram representadas as tensões de contato entre o sólido e o restante da estrutura. Numa estrutura em equilíbrio, todas as partes da mesma também deverão estar em equilíbrio. Assim sendo, aplicando-se as três equações de equilíbrio de forças ao sólido da figura 2.17, tomando-se o limite quando  $dx \rightarrow 0$ ,  $dy \rightarrow 0$  e  $dz \rightarrow 0$ , alternadamente, pode-se facilmente concluir que:

<sup>3</sup>Uma grandeza tensorial necessita de vários vetores e/ou escalares para sua definição

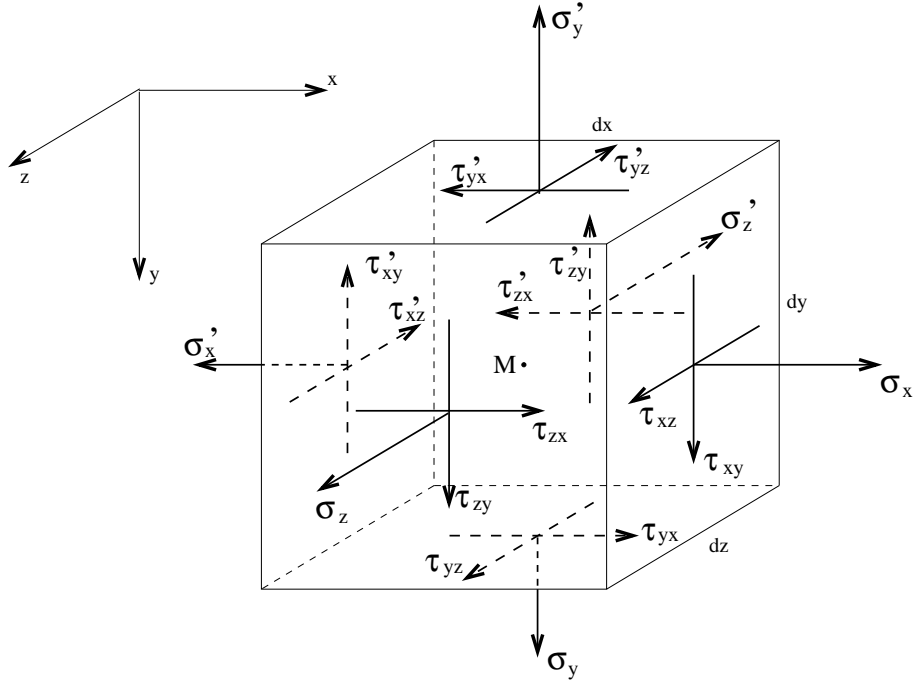


Figura 2.17: Sólido de tensões

$$\sigma_x = \sigma'_x = \sigma_x \quad (2.10)$$

$$\sigma_y = \sigma'_y = \sigma_y \quad (2.11)$$

$$\sigma_z = \sigma'_z = \sigma_z \quad (2.12)$$

$$\tau_{xy} = \tau'_{xy} = \tau_{xy} \quad (2.13)$$

$$\tau_{yx} = \tau'_{yx} = \tau_{yx} \quad (2.14)$$

$$\tau_{xz} = \tau'_{xz} = \tau_{xz} \quad (2.15)$$

$$\tau_{zx} = \tau'_{zx} = \tau_{zx} \quad (2.16)$$

$$\tau_{yz} = \tau'_{yz} = \tau_{yz} \quad (2.17)$$

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} = \tau_{zy} \quad (2.18)$$

Aplicando agora as equações de equilíbrio de momento com relação ao eixo  $y$ , admitindo que as tensões são constantes em cada face, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum M_y^M = 0 \Rightarrow & +\tau_{xz} \frac{dx}{2} dy dz + \tau_{xz} \frac{dx}{2} dy dz \\ & -\tau_{zx} dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zx} dx dy \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Logo:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.20)$$

Aplicando-se as equações de equilíbrio de momento com relação aos eixo  $y$  e  $x$ , chega-se de forma análoga a:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.21)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.22)$$

Conclui-se então que o tensor de tensões é simétrico:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

A convenção de sinais para as tensões deve ser de tal maneira que não permita que uma mesma tensão tenha valores algébricos de sinais opostos quando se analisa uma face ou outra do sólido de tensões. Por esta razão, adota-se referenciais opostos para cada uma das faces opostas do sólido em torno do M, conforme mostra figura 2.17. Nesta figura todas as tensões representadas são positivas. As regras para a convenção de sinais são:

- **Para as tensões normais:** São positivas quando estão associadas à tração e negativas quando estão associadas à compressão.
- **Para as tensões tangenciais:** Quando a normal externa do sólido de tensões apontar na mesma direção do eixo coordenado, as tensões tangenciais são positivas quando apontarem para o mesmo sentido do seu respectivo eixo coordenado. Quando a normal externa do sólido de tensões apontar na direção contrária do eixo coordenado, as tensões tangenciais são positivas quando apontarem para o sentido contrário do seu respectivo eixo coordenado.

### 2.1.4 Exercícios

1. Para o elemento de tensão representado na figura 2.18 (tensões expressas em MPa) complete o sólido de tensões com as tensões que faltam, considerando o sólido em equilíbrio.

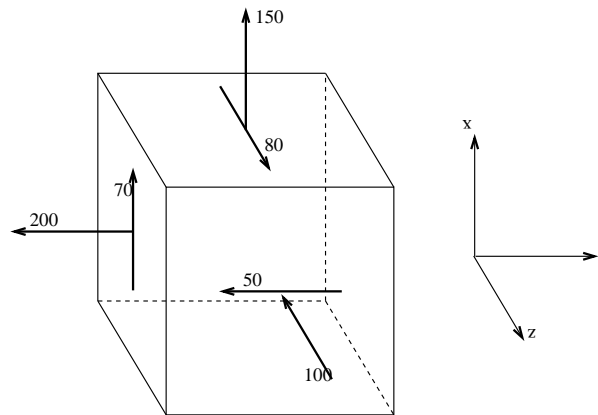


Figura 2.18: Figura do exercício 1

2. Uma pressão uniforme de 3,5 MPa é exercida sobre as faces EGHF e ABCD do bloco sólido representado na figura 2.19. Simultaneamente, uma distribuição uniforme de tração é mantida sobre as faces GHCB e EFDA, tendo valor de 0,7 MPa. Quais são as tensões normal e tangencial sobre cada uma das faces do bloco representado? Monte o tensor de tensões para os pontos no interior do bloco.
3. Um cilindro de parede delgada está submetido a uma força de 4,5 kN. O diâmetro do cilindro é 7,5 cm e a espessura da parede é de 0,3 cm. Calcular as tensões normal e de cisalhamento num plano que corta o cilindro formando um ângulo de  $\alpha = 40^\circ$ , conforme figura 2.20. Resposta:  $\sigma_N = 3,89$  MPa e  $\tau_N = 3,26$  MPa.

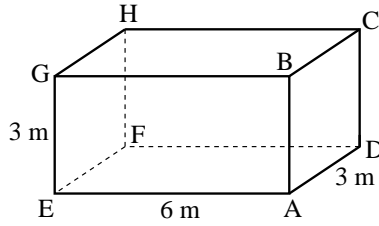


Figura 2.19: Figura do exercício 2

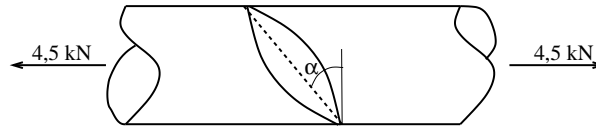


Figura 2.20: Figura do exercício 3

4. Admitindo que o cilindro do exercício anterior esteja submetido a uma força de tração  $P$  e que sua seção transversal tenha área  $A$ , demonstre que:

$$\sigma_\alpha = \frac{P}{A} \cos^2 \alpha \quad e \quad \tau_\alpha = \frac{P}{2A} \sin 2\alpha$$

Em seguida trace os gráficos de  $\sigma_\alpha$  em função de  $\alpha$  e de  $\tau_\alpha$  em função de  $\alpha$ , para  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

5. Demonstre, para o problema, anterior que a tensão normal máxima ocorre para  $\alpha = 0^\circ$  e que a tensão cisalhante máxima ocorre para  $\alpha = 45^\circ$
6. Uma placa de espessura 2,5 cm é uniformemente carregada por forças  $F_1 = 2,25$  kN e  $F_2 = 9,00$  kN conforme figura 2.21. Monte o tensor de tensões para um ponto contido na placa.

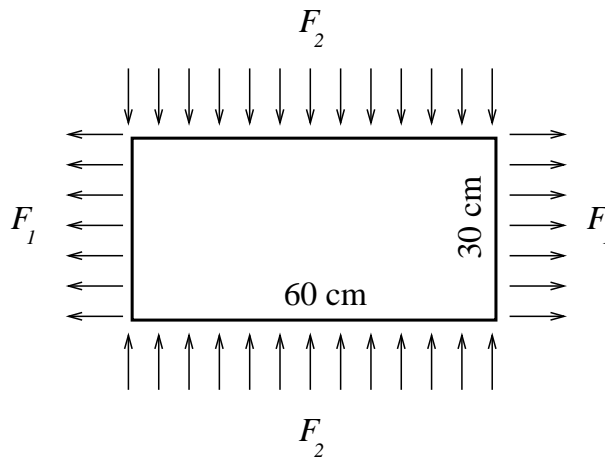


Figura 2.21: Figura do exercício 6

7. O tensor de tensões apresentado para este exercício foi obtido aplicando a teoria da resistência dos materiais a ser detalhada no capítulo 3 a uma viga com o carregamento mostrado na figura 2.22. Esboce os gráficos projetados no plano  $xy$  que relacionam as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  com a posição no ponto e comente-os. Resposta no

final. Dado  $x$  e  $y$  em (m)  $\rightarrow \sigma$  em (MPa).

$$\sigma = \begin{bmatrix} -120x(x-1)y & 0,15(2x-1)(400y^2-1) & 0 \\ 0,15(2x-1)(400y^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

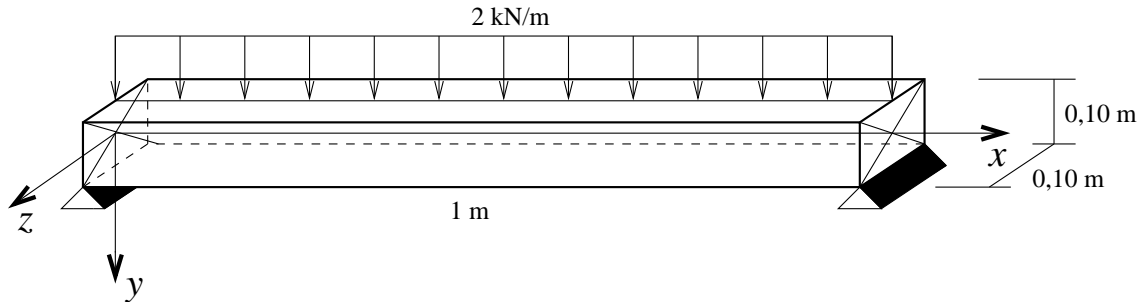


Figura 2.22: Figura do exercício 7

8. Uma barra tracionada é composta de dois pedaços de material que são colados ao longo da linha  $mn$  conforme figura 8. Por razões práticas, o ângulo  $\theta$  é limitado à faixa entre  $0$  e  $60^\circ$ . A máxima tensão de cisalhamento que suporta a junta colada é  $3/4$  da máxima tensão normal. Assim sendo, qual deve ser o valor de  $\theta$  para que a barra suporte o máximo de carga  $P$ ? (Admitir que a junta colada seja o único ponto a ser verificado no projeto). Resposta:  $\theta = 36.87^\circ$

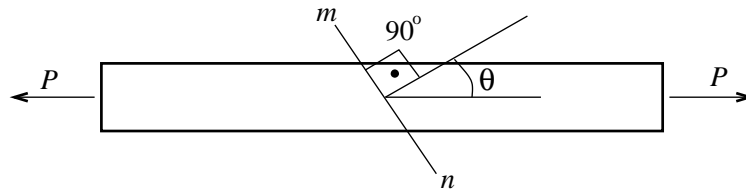


Figura 2.23: Figura do exercício 8

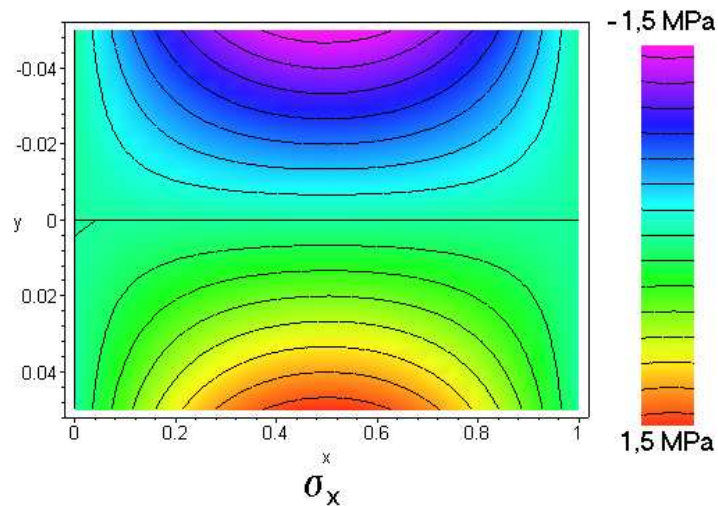
9. Resolver o problema anterior no caso das tensões tangencial e normal máximas permitidas sejam, respectivamente,  $70$  MPa e  $140$  MPa. Determinar também a carga  $P$  máxima permitível se a área da seção transversal da barra for de  $1000$  mm<sup>2</sup>. Resposta:  $\theta = 26.56^\circ$  e  $P = 175$  kN.

## 2.2 Estudo das deformações:

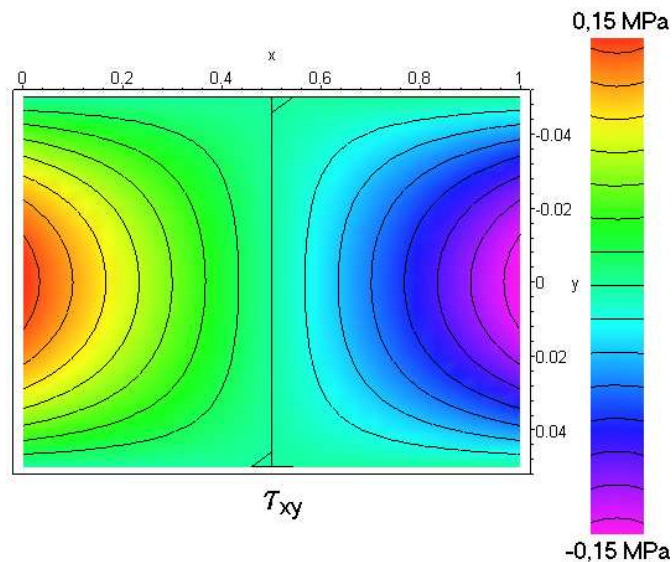
### 2.2.1 Introdução

Paralelamente ao estudo estabelecido no item anterior relativo à análise de tensões, pode-se desenvolver também, o estudo das deformações sofridas por um corpo sob solicitações externas. Destaca-se que a análise de deformações em um corpo sólido iguala-se em importância à análise de tensões.

Sabe-se, da álgebra vetorial, que o campo vetorial de deslocamentos permite quantificar a mudança de geometria de um corpo, sujeito à ação de cargas aplicadas. Esta mudança de geometria implica na consideração de duas parcelas:



(a) Resposta para  $\sigma_x$



(b) Resposta para  $\tau_{xy}$

Figura 2.24: Resposta do exercício 7

- Movimento de corpo rígido
- Mudança de forma e dimensões do corpo

Como a Resistência dos Materiais desenvolve o estudo dos corpos deformáveis, será de interesse maior o estudo da segunda parcela. Além disso, num contexto de estruturas civis, o movimento de corpo rígido pode ser eliminado mediante a introdução adequada de vínculos. Neste texto, somente serão consideradas as pequenas deformações, como aquelas que geralmente ocorrem na engenharia estrutural.

### 2.2.2 Campo de deslocamento

Quando solicitações externas atuam sobre um corpo deformável, este sofre mudança de forma e dimensões, passando de uma configuração inicial indeformada a uma configuração



final deformada, conforme figura 2.25.

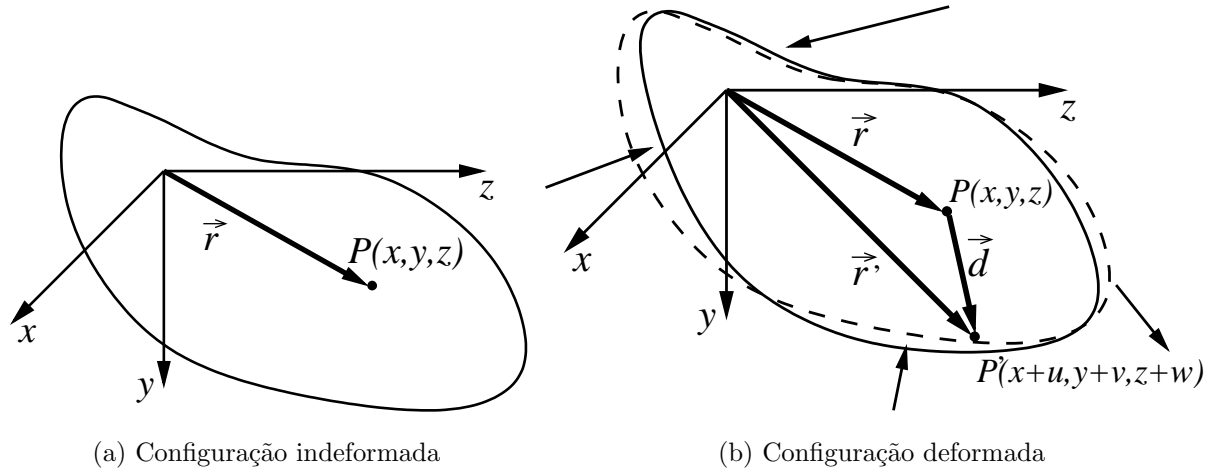


Figura 2.25: Campo de Deslocamentos

Em sua configuração inicial qualquer ponto  $P$ , de coordenadas  $(x, y, z)$ , pode ser localizado utilizando-se um vetor posição  $r$  correspondente a esse ponto  $P$  (ver figura 2.25(a)). Após a aplicação das cargas o corpo se deforma para uma nova configuração, indicada em linha cheia na figura 2.25(b) e o ponto  $P$  desloca-se para o ponto  $P'$ . A linha tracejada indica a configuração indeformada.

Designando-se por  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  e  $w(x, y, z)$  as componentes, segundo direções de eixos ortogonais, do deslocamento  $\vec{d}$  sofrido por  $P$ , as coordenadas de  $P'$  serão dadas por:

$$P' = [x + u(x, y, z), y + v(x, y, z), z + w(x, y, z)] \quad (2.24)$$

O campo de deslocamentos  $\vec{d}$  para um ponto  $P$  genérico no interior do sólido fornece então toda e qualquer informação relacionada à mudança de geometria do sólido, resultado de um carregamento. Ou seja, tendo-se as funções das componentes de deslocamento, que é válida para todo corpo:

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

basta que se saiba as coordenadas  $(x, y, z)$  de um ponto qualquer deste corpo para se obter a nova posição desse ponto após o carregamento. Logo a posição final do ponto  $P'$ , definida pelo vetor  $\vec{r}'$  é a soma do vetor  $\vec{r}$  com o vetor  $\vec{d}$  (vide figura 2.25(b)). Considera-se ainda que as componente  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  são funções contínuas, tendo em vista a preservação da continuidade do sólido no processo de deformação.

**Exemplo:** O seguinte campo de deslocamento representa as deformações de um corpo em um dado domínio:

$$\vec{d} = [x^2\vec{i} + (x + 3z)\vec{j} + 10z\vec{k}] \times 3 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (2.26)$$

Qual é o deslocamento do ponto originalmente situado na posição definida pelo vetor  $\vec{r} = \vec{j} + \vec{k}$  na conformação geométrica indeformada?

Para determinar-se o deslocamento deste ponto, substitui-se  $x = 0$ ,  $y = 1$  e  $z = 1$  no campo de deslocamento  $\vec{d}$  do ponto em questão. Em seguida, pode-se obter a nova posição definida pelo vetor  $\vec{r}'$  somando-se o vetor  $\vec{d}$  ao vetor  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} + \vec{d} \\ &= (\vec{j} + \vec{k}) + (3\vec{j} + 10\vec{k}) \times 3 \times 10^{-3} \\ &= (1,009\vec{j} + 1,030\vec{k}) \text{ m}\end{aligned}\tag{2.27}$$

É o que mostra a figura 2.25(b).

### 2.2.3 Componentes de Deformação

Embora o campo de deslocamentos seja suficiente para descrever todas as características de mudança de geometria de um corpo, é necessário que se estabeleça uma relação direta entre estas mudanças geométricas e as cargas aplicadas, ou de forma mais conveniente, com a distribuição de tensões. Essa afirmação será melhor compreendida no item 2.3, onde buscar-se-á relacionar diretamente as tensões com as deformações. Entretanto pode-se adiantar que não é a posição de um ponto que o relaciona com seu estado de tensão, mas o movimento relativo entre pontos adjacentes. Tendo em vista esta última afirmação considerem-se os segmentos infinitesimais,  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , ligando pontos adjacentes em seus vértices formando um paralelepípedo retangular infinitesimal conforme figura 2.26.

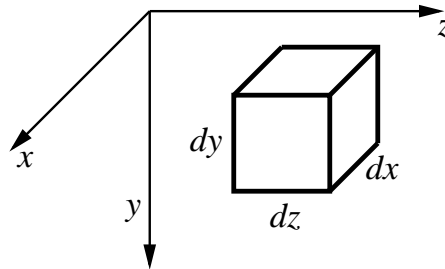


Figura 2.26: Paralelepípedo Retangular Infinitesimal

Pode-se, “medir” o movimento relativo dos pontos adjacentes (vértices) considerando as deformações desse paralelepípedo retangular. Agora é necessário introduzir um conceito de intensidade de deformação característica, a saber, **deformação linear específica** (ou alongamento/encurtamento relativo) e **deformação angular** (ou distorção angular), que são formas de se quantificar o movimento relativo entre pontos adjacentes de um corpo.

#### Deformação Linear Específica

Seja o paralelepípedo retangular infinitesimal da figura 2.27 na configuração geométrica indeformada em cujas faces agem apenas **tensões normais** como resultado do carregamento.

Designa-se por  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  os comprimentos iniciais das arestas do paralelepípedo retangular. Na configuração deformada, os comprimentos dessas arestas tornam-se  $dx + \Delta dx$ ,  $dy + \Delta dy$  e  $dz + \Delta dz$  respectivamente. Há, então, a possibilidade de uma variação de volume do elemento. Define-se, como medida de deformação característica do material, tal variação segundo três deformações unitárias, como segue:

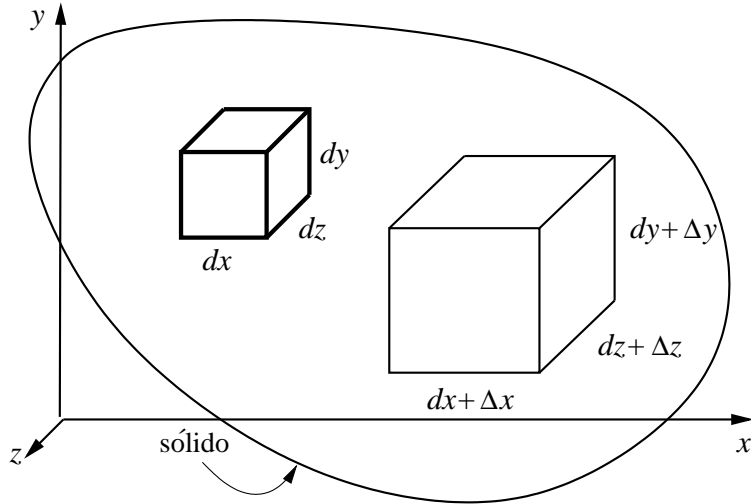


Figura 2.27: Paralelepípedo Retangular sob Deformação Linear

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} \\
 \epsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} \\
 \epsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

É interessante observar que a utilização da deformação linear permite a comparação entre deformações deste mesmo tipo obtidas em diferentes estruturas e/ou amostras ensaiadas já que esta quantidade é adimensional. Usualmente refere-se a ela em cm / cm ou mm / mm. A quantidade  $\epsilon$  é bastante pequena e algumas vezes pode ser dada em porcentagem.

### Deformação Cisalhante ou Distorção

Um sólido deformável pode ainda, estar sujeito a um outro tipo de deformação: aquela causada pelas **tensões cisalhantes**. Como conseqüência de tal solicitação surgem mudanças na orientação relativa entre as faces do elemento envolvendo variações desprezíveis de volume. A figura 2.28 representa o sólido infinitesimal sujeito somente à ação de tensões cisalhantes  $\tau_{xy}$

Em outras palavras, pressupõe-se que as tensões cisalhantes causem variação de forma, isto é, uma distorção, mas não uma dilatação apreciável. Essa medida de variação relativa entre as faces do elemento pode ser dada pela variação do ângulo inicialmente reto e é definida como deformação de cisalhamento ou distorção, representado por  $\gamma_{xy}$ :

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta
 \tag{2.29}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  estão representados na figura 2.28.

Será conveniente considerar uma rotação de corpo rígido do elemento em torno do eixo  $x$ , de forma a se ter sempre  $\alpha$  igual a  $\beta$ . Assim, designa-se por  $\epsilon_{yz}$ ,  $\epsilon_{zy}$ , as deformações transversais.

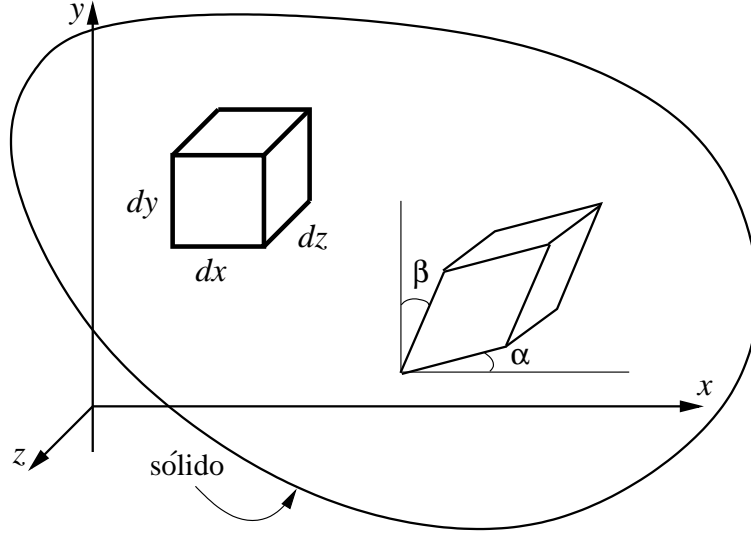


Figura 2.28: Paralelepípedo Retangular sob Deformação Cisalhante

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (2.30)$$

De forma análoga ao estado de tensão, o estado de deformação fica completamente determinado se forem conhecidas as componentes de deformação (deformações lineares e distorções angulares) segundo eixos tri-ortogonais. O efeito de dilatação ou retração do paralelepípedo retangular infinitesimal deve-se às três deformações lineares, enquanto, independentemente, seis deformações transversais fornecem uma variação da configuração de ângulo reto entre as faces do paralelepípedo. Usa-se apresentar estas nove quantidades em um tensor de deformações, como feito para tensões.

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

#### 2.2.4 Relação Deformação-Deslocamento

É possível, a partir das equações 2.28, definir-se as deformação longitudinais em função do campo de deslocamentos  $\vec{d}$ .

Observando a figura 2.29 e aplicando a primeira equação 2.28 tem-se:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\overline{A'B'} - \Delta x}{\Delta x} \right] \quad (2.32)$$

Se as deformações transversais que ocorrem são pequenas, o ângulo entre  $\overline{A'B'}$  e  $AB$  também será pequeno e pode-se então utilizar a projeção de  $\overline{A'B'}$  na direção  $x$  ( $\overrightarrow{A'B'_x}$ ) em lugar do próprio segmento  $\overline{A'B'}$ , isto é:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\overrightarrow{A'B'_x} - \Delta x}{\Delta x} \right] \quad (2.33)$$

Pode-se expressar  $\overrightarrow{A'B'_x}$  como sendo:

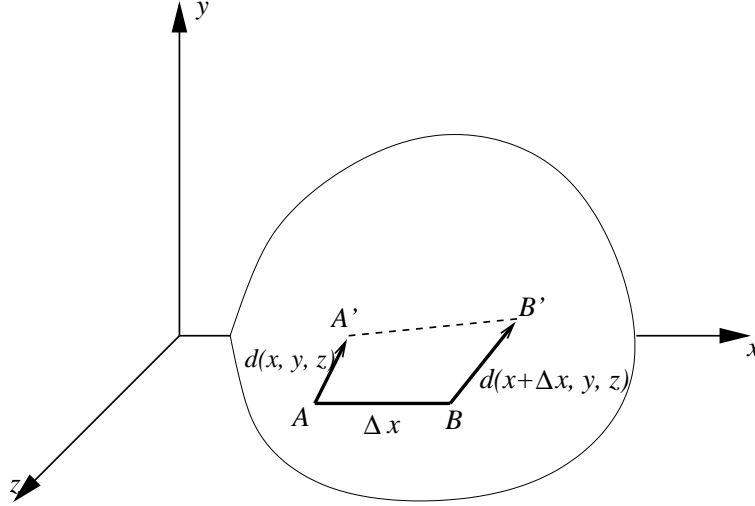


Figura 2.29: Deformações longitudinais em função do campo de deslocamentos

$$\overrightarrow{A'B'}_x = \Delta x + [u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)] \quad (2.34)$$

Substituindo a equação 2.34 na equação 2.33 tem-se:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} \right] \quad (2.35)$$

O segundo membro da equação 2.35 é identificado como a derivada parcial de  $u(x, y, z)$  com relação a  $x$ , ou seja:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.36)$$

De forma análoga pode-se obter:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.37)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.38)$$

De maneira semelhante, é possível, a partir da equação 2.29, definir-se as deformações transversais em função do campo de deslocamentos  $\vec{d}$ .

Partindo-se da figura 2.30 pode-se escrever:

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{DB'}{A'D} \quad (2.39)$$

Mas  $DB'$  pode ser escrito como:

$$DB' = v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z) \quad (2.40)$$

e para pequenas deformações lineares, pode-se dizer que:

$$A'D = \Delta x \quad (2.41)$$

resultando para a equação 2.39:

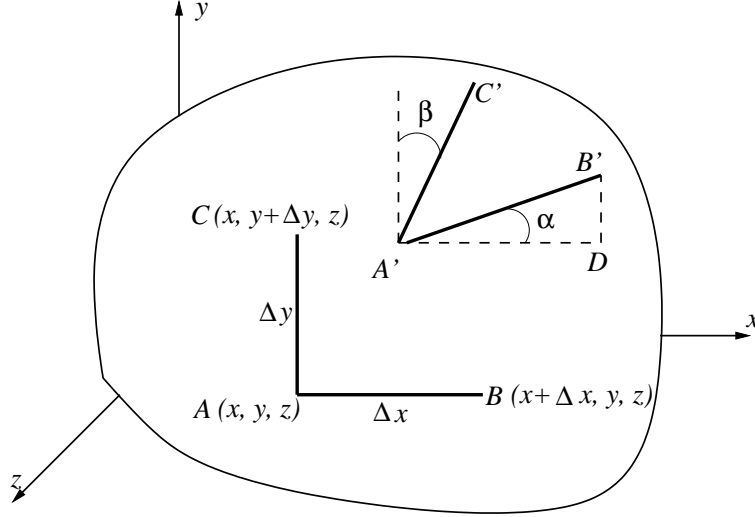


Figura 2.30: Deformações transversais em função do campo de deslocamentos

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} \quad (2.42)$$

O segundo membro da equação 2.42 é identificado como a derivada parcial de  $v(x, y, z)$  com relação a  $x$ , ou seja

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.43)$$

De maneira similar pode-se obter:

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.44)$$

Voltando à equação 2.29, chega-se a:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.45)$$

ou, utilizando equação 2.30:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.46)$$

Analogamente:

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.47)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.48)$$

Assim conhecendo-se o campo de deslocamentos  $\vec{d}(u, v, w)$  pode-se obter o campo de deformações  $\epsilon$  como segue:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

### 2.2.5 Exercícios

1. Dado o seguinte campo de deslocamentos:

$$\vec{d} = (x^2 + y) \vec{i} + (3 + z) \vec{j} + (x^2 + 2y) \vec{k} \quad (2.50)$$

Qual a posição, após deformação, de um ponto originalmente em (3, 1, -2)?

Resposta: P=(13;2;9)

2. Um campo de deslocamento é dado por:

$$\vec{d} = \left( 0, 16x^2 + \sin y \right) \vec{i} + \left( 0, 1x + \frac{x}{y^3} \right) \vec{j} + 0,004 \vec{k} \quad (2.51)$$

Como resultado da deformação, qual é o acréscimo de distância entre dois ponto, os quais, na configuração geométrica indeformada, são dados pelos vetores de posição?

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= 10\vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{r}_2 &= 4\vec{i} + 3\vec{j} \end{aligned}$$

Resposta: d = 13,46

3. Dado o seguinte campo de deslocamentos:

$$\vec{d} = [xy\vec{i} + (3 + y) \vec{j} + (x + z) \vec{k}] 3 \times 10^{-1} \text{m} \quad (2.52)$$

Qual a perda em perpendicularidade entre dois segmentos de comprimento unitário, inicialmente situados sobre os eixos  $x$  (1,0,0) e  $y$  (0,1,0) a partir da origem, como resultado do citado campo de deslocamento?

Resposta:  $\beta = 40,69^\circ$

4. Dado o seguinte campo de deslocamentos:

$$\vec{d} = (x^2\vec{i} + 3y\vec{j} + 10\vec{k}) 3 \times 10^{-3} \text{m} \quad (2.53)$$

Quais são as componentes de deformação no ponto (1, 2, 0)?

Resposta:  $\epsilon = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 3 \times 10^{-3}$

## 2.3 Relações entre tensões e deformações

As relações entre tensões e deformações são estabelecidas a partir de ensaios experimentais simples que envolvem apenas uma componente do tensor de tensões. Ensaios complexos com tensões significativas nas 3 direções ortogonais tornam difíceis as correlações entre as tensões e suas correspondentes deformações.

Assim sendo, destacam-se aqui os ensaios de tração, de compressão e de torção.

### 2.3.1 O Teste ou Ensaio de Tração:

Objetivos:

- Relacionar tensões normais e deformações lineares;
- Determinar as propriedades dos materiais;
- Verificar a qualidade dos mesmos.

O corpo de prova (CP) é uma amostra de material a ser testado, constituída de uma barra reta de seção constante (comprimento  $L$ , diâmetro  $D$  e área  $A$ , na configuração inicial), semelhante á barra ilustrada na figura 2.31

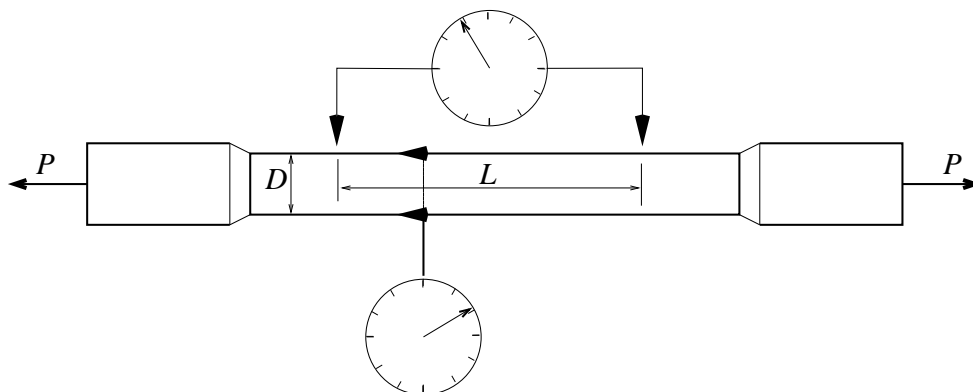


Figura 2.31: Corpo de prova de um ensaio de tração

O ensaio consiste em aplicar ao CP uma carga  $P$  axial de tração que aumenta lenta e gradualmente (carga “estática”), medindo-se a carga  $P$ , a variação do comprimento  $L$  e do diâmetro  $D$  do CP até a ruptura do CP.

O tensor de tensões associado a este problema, com o referencial mostrado na figura 2.32 é apresentado na equação 2.54.

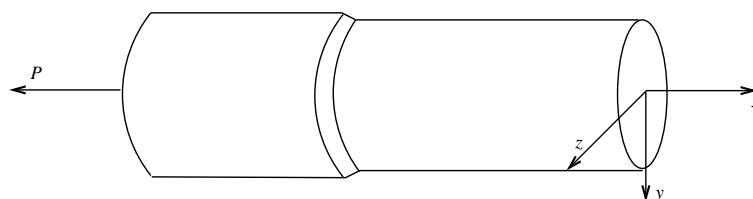


Figura 2.32: Referencial adotado



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Quais são as deformações causadas pela tração aplicada ao CP?

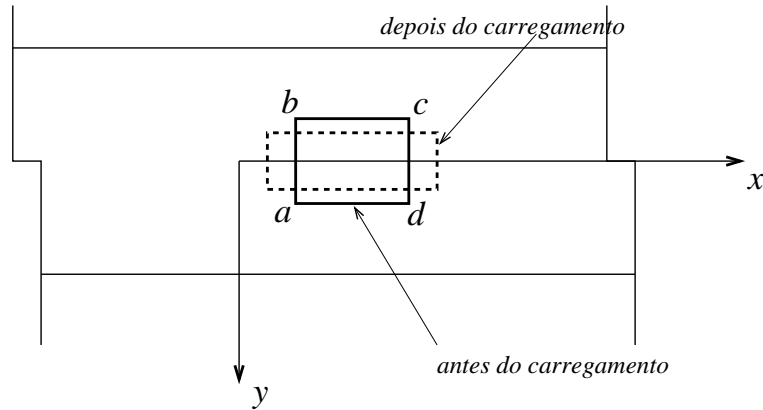


Figura 2.33: Deformações no ensaio de tração

Observando o retângulo abcd contido no plano  $xy$  antes e depois da aplicação da carga, conforme mostrado na figura 2.33, é possível identificar que sua configuração após o tracionamento não sofre distorções angulares. O que ocorre é um alongamento dos lados bc e ad e um encurtamento dos lados ab e cd, caracterizando o surgimento das deformações  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ . Obviamente, caso tivesse sido escolhido o plano  $xz$  para análise, seria verificado o surgimento das deformações  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_z$ . Generalizando, caso o referencial adotado tivesse como eixo longitudinal do CP a direção  $y$  ou  $z$  pode-se concluir que:

- $\sigma_x$  causa  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ ;
- $\sigma_y$  causa  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ ;
- $\sigma_z$  causa  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ ;

O próximo passo é relacionar matematicamente estas tensões e suas correspondentes deformações.

Numa máquina capaz de tracionar continuamente o CP medindo a carga  $P$  de tração, o alongamento  $\Delta L$  da parte do CP contida entre as extremidades de um extensômetro<sup>4</sup> ( $L$ ) e a variação do diâmetro do CP  $\Delta D$  conforme mostrado na figura 2.31.

Com os dados do ensaio, é possível inicialmente se traçar um gráfico contendo no eixo vertical a carga  $P$  e no eixo horizontal o alongamento  $\Delta L$ , conforme mostrado na figura 2.34(a). Através de uma mudança de variáveis pode-se facilmente chegar a uma relação entre a tensão  $\sigma_x = P/A$  e a deformação  $\epsilon_x = \Delta L/L$ , conforme mostrado no gráfico da figura 2.34(b). Este gráfico que relaciona  $\epsilon_x$  e  $\sigma_x$  é chamado **diagrama tensão-deformação**.

A forma do diagrama tensão deformação depende do tipo de material. Existem materiais de comportamento linear, ou pelo menos com uma região linear (aço, alumínio), e de comportamento não-linear (maioria das borrachas). Conforme já destacado na seção 1.3.2, os materiais a serem tratados neste curso têm comportamento linear. O nível de

<sup>4</sup>Aparelho usado para medir a variação do comprimento

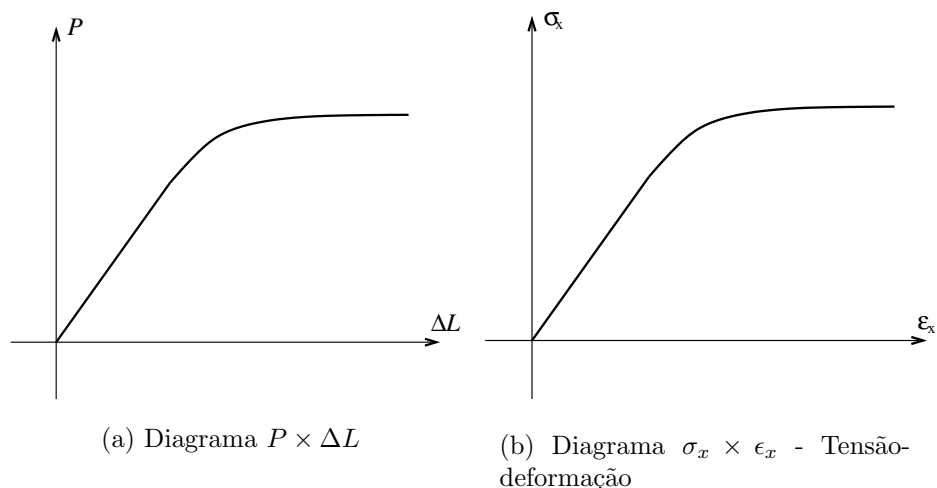


Figura 2.34: Exemplos de diagramas do ensaio de tração

tensão a partir do qual o material deixa de ter comportamento linear é chamado de **limite de proporcionalidade** (ponto 1 - figuras 2.35).

Dentre os materiais de comportamento linear, identifica-se 3 tipos mais comuns de diagramas tensão-deformação conforme os mostrados na figura 2.35.

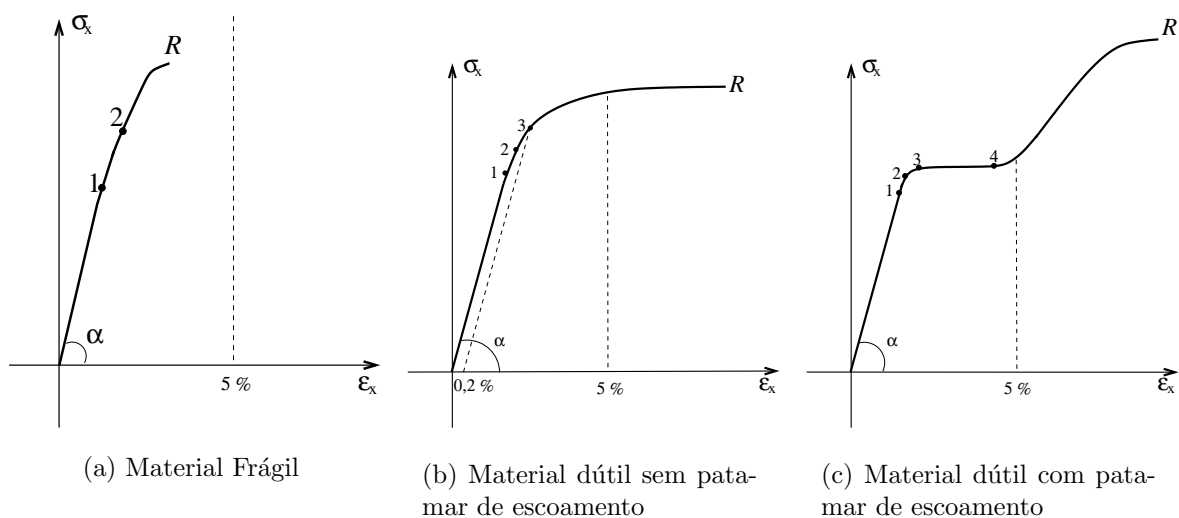


Figura 2.35: Exemplos de diagramas do ensaio de tração em materiais de comportamento linear

As características principais observadas nos diagramas da figura 2.35 são as seguintes:

- **(a) Material frágil** (concreto, vidro): A ruptura (ponto  $R$ ) se dá para valores  $\epsilon_x < 5\%$ ;
- **(b) Material dútil sem patamar de escoamento definido** (aços especiais com alto teor de carbono). A ruptura (ponto  $R$ ) se dá para valores  $\epsilon_x \gg 5\%$  e o material não apresenta patamar de escoamento, onde há aumento de deformação com a tensão aproximadamente constante.

- **(c) Material dútil com escoamento definido** (aços comuns, com baixo teor de carbono). A ruptura (ponto  $R$ ) se dá para valores  $\epsilon_x \gg 5\%$  e o material apresenta patamar de escoamento (trecho entre os pontos 3 e 4), onde há aumento de deformação com a tensão aproximadamente constante.

Para um CP em aço pode-se verificar experimentalmente no diagrama tensão-deformação obtido num ensaio de tração, que existe um nível de tensão próximo ao limite de proporcionalidade, tal que, quando o CP é carregado acima deste nível, o mesmo não retorna a sua configuração original. Este ponto é chamado de **limite de elasticidade** (ponto 2 - figuras 2.35). Após este ponto passam a existir deformações permanentes ou plásticas.

No aço os limites de elasticidade e proporcionalidade são muito próximos, tanto que normalmente não se faz muita diferença entre esses dois níveis de tensão. Materiais que possuem estes dois limites muito próximos são chamados de **materiais elásticos lineares**. Estes materiais, como é o caso do aço, serão os objetos de estudo deste curso.

O limite de elasticidade e o limite de proporcionalidade são difíceis de se determinar com precisão. Em razão disso, os engenheiros utilizam para uma definição mais utilizável do início do comportamento não-elástico a tensão de escoamento ou ponto de escoamento. Em aços com baixo teor de carbono, este ponto é obtido diretamente da curva tensão-deformação (ver ponto 3 da figura 2.35(c)). Já para aços especiais com alto teor de carbono, este ponto é arbitrado como sendo a tensão que provoca uma pequena deformação residual de 0,2% após o descarregamento.

Durante a fase elástica, ou seja, para níveis de tensões até o limite de elasticidade (ou tensão de escoamento para efeitos práticos) a relação entre a tensão  $\sigma_x$  e a deformação  $\epsilon_x$  pode ser escrita na forma:

$$\sigma_x = \tan \alpha \epsilon_x = E \epsilon_x \quad (2.55)$$

onde  $E = \tan \alpha$  é o coeficiente angular da reta conhecido como **Módulo de Elasticidade Longitudinal** ou **Módulo de Young**.

A equação 2.55 mostra que para materiais trabalhando em regime elástico linear tem-se que a tensão é diretamente proporcional à deformação. Esta relação é conhecida como lei de Hooke, em homenagem a Robert Hooke que obteve esta proporcionalidade há mais de 300 anos.

Além de gerar deformações  $\epsilon_x$ , a tensão  $\sigma_x$  aplicada ao CP, conforme já destacado neste texto, gera deformações lineares nas direções transversais ( $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ ). Tomando-se então a razão entre a medida obtida para a variação do diâmetro ( $\Delta D$ ) e o diâmetro inicial ( $D$ ) do CP pode-se escrever:

$$\epsilon_y = \frac{\Delta D}{D} \quad (2.56)$$

$$\epsilon_z = \frac{\Delta D}{D} \quad (2.57)$$

Conhecidos os valores de  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$  (obtidos experimentalmente com as medidas dos extensômetros) é possível estabelecer as relações:

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \text{constante} = -\nu$$

$$\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = \text{constante} = -\nu \quad (2.58)$$

onde  $\nu$  é denominado de **Coefficiente de Poisson** e é uma característica física do material. Alternativamente as equações 2.58 podem ser escritas na forma:

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x \quad (2.59)$$

$$\epsilon_z = -\nu \epsilon_x \quad (2.60)$$

Substituindo a equação 2.55 na equação 2.60 chega-se às relações entre tensões normais e deformações transversais:

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.61)$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.62)$$

Resumindo, caso estivessem atuando simultaneamente  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , ter-se-ia:

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.63)$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.64)$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.65)$$

Fica claro que característica de isotropia do material reduz sensivelmente o número de constantes elásticas que relacionam tensão com deformação.

O estudo detalhado de cada fase do ensaio de tração é feito no curso de Laboratório de Resistência dos Materiais, cadeira do próximo período.

### 2.3.2 Ensaio de Compressão

É semelhante ao ensaio de tração, mas o CP deve ter dimensões adequadas para se evitar a flambagem. Para materiais metálicos os CPs devem ser de tal forma que a razão  $L/D$  deve se situar entre 2 e 4 (ou entre 3 e 8 segundo alguns autores).

O ensaio de compressão do aço apresenta um diagrama semelhante ao ensaio de tração na fase elástica. Admite-se que as constantes elásticas  $E$  e  $\nu$  obtidas experimentalmente são os mesmos para tração ou compressão.

O estudo detalhado de cada fase do ensaio de compressão é feito no curso de Laboratório de Resistência dos Materiais, cadeira do próximo período.

### 2.3.3 O ensaio de torção

O ensaio de torção é uma alternativa ao ensaio de cisalhamento face as dificuldades que apresentam este último na aplicação de cisalhamento puro num CP.

O ensaio de torção consiste em se aplicar um torque num CP analisando as distorções angulares, conforme figura 2.36

Verifica-se experimentalmente que para pequenas deformações, a variação da dimensão do segmento  $ab$  da figura 2.36 pode ser desprezado. Conseqüentemente, as deformações medidas no ensaio de torção são distorções angulares.

De forma análoga ao ensaio de tração, é possível se obter um diagrama tensão-deformação, porém neste caso relacionando tensões cisalhantes com distorções angulares.

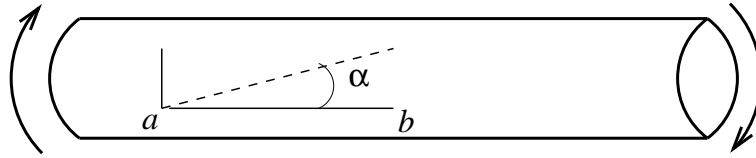


Figura 2.36: Ensaio de torção

Este diagrama, para materiais elásticos lineares, também segue a lei Hooke conforme equação que segue:

$$\tau_{xy} = \tan \alpha \gamma_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.66)$$

onde  $G$  é o **Módulo de Elasticidade Transversal** e é uma outra característica do material.

Finalmente, uma vez observado experimentalmente que tensões tangenciais  $\tau_{xy}$  causam apenas distorções angulares  $\gamma_{xy}$ , completa-se as relações entre tensões cisalhantes e distorções angulares:

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (2.67)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (2.68)$$

Mais uma vez, a característica de isotropia reduziu o número de constantes elásticas do problema.

### 2.3.4 Lei de Hooke generalizada

Após se analisar os ensaios de tração e torção, verifica-se que foram introduzidas três constantes elásticas, que são características do material:  $E$ ,  $G$  e  $\nu$ . Pode-se demonstrar (Mecânica dos Sólidos I) que apenas duas destas constantes elásticas são independentes, conforme indica equação 2.69:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.69)$$

A tabela que segue mostra alguns valores práticos destas constantes elásticas, bem como alguns limites elásticos (considerados como tensões de escoamento) e massas específicas.

Assim sendo, resume-se as relações tensões deformações na equação 2.70, conhecida como **Lei de Hooke Generalizada**.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Pode-se escrever a equação matricial 2.70 na forma compacta:

$$\epsilon = D^{-1}\sigma \quad (2.71)$$

Tabela 2.1: Constantes elásticas de alguns materiais

Material	$E$ (GPa)	$G$ (GPa)	$\nu$	Tensão de escoamento (MPa)	Massa específica (kg/m <sup>3</sup> )
Aço CA-25	210	79	0,33	250	7860
Aço CA-50	210	79	0,33	500	7860
Aço CA-60	210	79	0,33	600	7860
Aço CP-150	210	79	0,33	1500	7860
Aço ASTM A-36				253	7860
Concreto	22 a 30		$\cong 0,1$	15 a 40 na compressão	2400
Alumínio	69	26	0,33	290	2710
Titânio	114			825	4460

ou

$$\sigma = D\epsilon \quad (2.72)$$

onde  $D$  é chamada de matriz constitutiva do material.

### 2.3.5 Exercícios

1. Deduza a Matriz  $D$  da equação 2.72. Resposta:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E(\nu-1)}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & \frac{E(\nu-1)}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2+\nu-1} & \frac{E(\nu-1)}{2\nu^2+\nu-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

2. Para o estado de tensões num certo ponto de uma estrutura de aço definido pelo tensor de tensões que segue, pede-se calcular as componentes de deformação neste ponto. Considere  $E = 210$  GPa e  $\nu = 0,3$ .

$$\text{Dado: } \sigma = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -3,5 \\ 0 & -3,5 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Resposta: } \epsilon = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 36,7 & -21,6 \\ 0 & -21,6 & -50 \end{bmatrix} \times 10^{-6}.$$

3. Para um coeficiente de Poisson de 0,30 módulo de  $E$  e um módulo de Young de 210000 MPa, determinar o tensor de deformações para o seguinte estado de tensões:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -14 \\ 7 & 3,5 & -21 \\ -14 & -21 & 7 \end{bmatrix}. \text{ Resposta: } \epsilon = \begin{bmatrix} -15.0 & 43.34 & -86.65 \\ 43.34 & 6.667 & -130.0 \\ -86.65 & -130.0 & 28.33 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

4. idem exercício 3 para  $\sigma = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -10 \\ -3 & -10 & 0 \end{bmatrix}$ .

Resposta  $\epsilon = \begin{bmatrix} -54.76 & 0 & -18.57 \\ 0 & 38.10 & -61.90 \\ -18.57 & -61.90 & 7.143 \end{bmatrix}$

5. Para o estado de deformações num ponto de uma estrutura dado pelo tensor de deformações que segue, calcular o estado de tensões atuante neste ponto, sendo  $E = 175 \text{ GPa}$  e  $G = 70 \text{ GPa}$ .

Dado:  $\epsilon = \begin{bmatrix} 0,55 & -2,5 & 0 \\ -2,5 & 0,30 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & -0,95 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$

Resposta  $\sigma = \begin{bmatrix} 7 & -35 & 0 \\ -35 & 3,5 & 3,5 \\ 0 & 3,5 & -14 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

6. idem exercício 5 sendo:  $\epsilon = \begin{bmatrix} 2.856 & 7.143 & 7.143 \\ 7.143 & 2.856 & 7.143 \\ 7.143 & 7.143 & 2.856 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$ .

Resposta:  $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

7. Numa análise experimental foram determinados os deslocamentos dos pontos 1, 2, 3 e 4 de uma estrutura de aço. Tais pontos são mostrados na figura 2.37 e seus respectivos deslocamentos são:

ponto 1:  $u_1 = 0,10 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $v_1 = 0,20 \times 10^{-3} \text{ m}$  e  $w_1 = 0$

ponto 2:  $u_2 = 0,15 \times 10^{-3} \text{ m}$  e  $v_2 = 0,15 \times 10^{-3} \text{ m}$  e  $w_2 = 0$

ponto 3:  $u_3 = 0,20 \times 10^{-3} \text{ m}$  e  $v_3 = -0,20 \times 10^{-3} \text{ m}$  e  $w_3 = 0$

ponto 4:  $u_4 = -0,10 \times 10^{-3} \text{ m}$  e  $v_4 = 0,10 \times 10^{-3} \text{ m}$  e  $w_4 = 0$

Calcule o valor aproximado das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  no ponto  $P$  em função dos dados experimentais obtidos. Considere as constantes elásticas apresentadas nesta apostila e  $\epsilon_z = 0$ .

Resposta admitindo uma função de interpolação de deslocamentos do tipo

$$u = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy + \alpha_4$$

$$v = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy + \beta_4; \sigma_x = -19,97 \text{ MPa}$$

Resposta:  $\sigma_x = -19,97 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_y = 43,19 \text{ MPa}$ ;  $\tau_{xy} = 19,75 \text{ MPa}$ ;

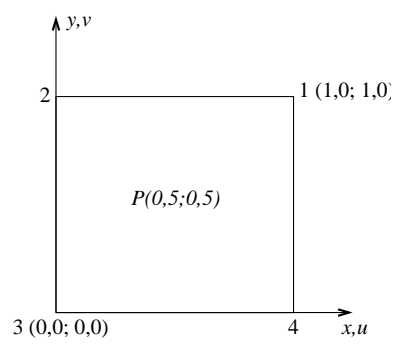


Figura 2.37: Figura do exercício 7



## Capítulo 3

# Tensões e Deformações em Barras de Eixo Reto

Até aqui foram estudadas as tensões, as deformações e suas relações em casos gerais (Lei de Hooke generalizada). Neste capítulo estas grandezas serão abordadas em estruturas do tipo barra de eixo reto.

O cálculo das tensões em barras fica simplificado quando comparado com casos gerais de estruturas pois, tomando como eixo  $x$  o de direção longitudinal da barra, considera-se nestas estruturas as tensões  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  iguais a zero. Assim sendo, fica claro que as componentes de tensão no plano  $yz$  ( $\vec{\rho}_x$ ) serão fundamentais no estudo das barras conforme se destaca na figura 3.1.

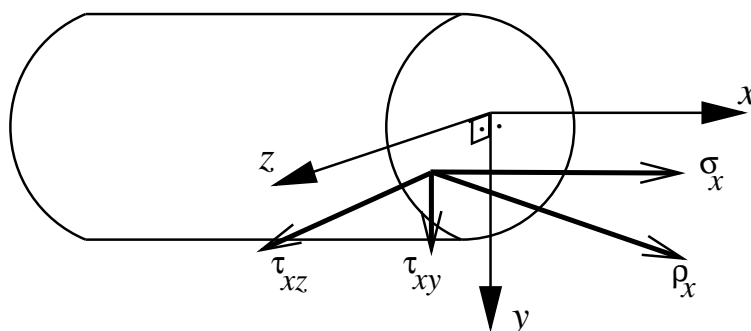


Figura 3.1: Tensão  $\vec{\rho}_x$

Normalmente, o cálculo de tensões em barras é feito a partir de seus esforços internos solicitantes, que podem ser obtidos através de princípios básicos da Análise Estrutural. Faz-se a seguir uma rápida abordagem destes princípios, definindo-se os esforços simples numa barra através do método das seções (ver notas de aula de Análise Estrutural).

A relação entre esforços e tensões em uma barra é o principal ponto de ligação entre as disciplinas Resistência dos Materiais e Análise Estrutural.

Seja um ponto  $P(y, z)$  genérico de uma seção transversal conforme figura 3.2.

Sendo  $d\vec{F}$  a força elementar na área elementar  $dA$ , em torno de  $P$ , reescrevendo equação 2.2 tem-se:

$$\vec{\rho}_x = \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (3.1)$$

Analisando-se as componentes de força e tensão e equação, observando figuras 3.1 e 3.2 tem-se:

$$d\vec{F} = dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k} \quad (3.2)$$

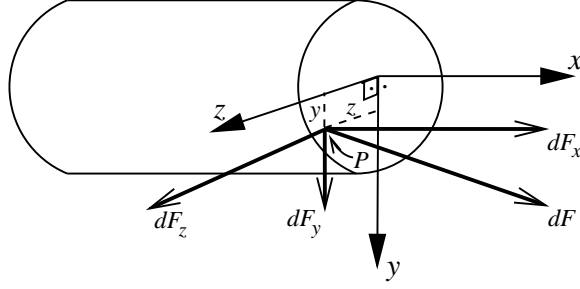


Figura 3.2: Relação entre esforços e tensões

$$\vec{\rho}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \quad (3.3)$$

logo, utilizando equação 3.1, tem-se:

$$dF_x = \sigma_x dA \quad (3.4)$$

$$dF_y = \tau_{xy} dA \quad (3.5)$$

$$dF_z = \tau_{xz} dA \quad (3.6)$$

Da Mecânica Geral e Análise Estrutural, obtém-se:

$$N = F_x = \int_A dF_x = \int_A \sigma_x dA \quad (3.7)$$

$$Q_y = F_y = \int_A dF_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (3.8)$$

$$Q_z = F_z = \int_A dF_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad (3.9)$$

$$T = M_x = \int_A (dF_y z - dF_z y) = \int_A (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dA \quad (3.10)$$

$$M_y = \int_A (-dF_x z) = - \int_A \sigma_x z dA \quad (3.11)$$

$$M_z = \int_A (dF_x y) = \int_A \sigma_x y dA \quad (3.12)$$

Portanto:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (3.13)$$

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (3.14)$$

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad (3.15)$$

$$T = \int_A (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dA \quad (3.16)$$

$$M_y = - \int_A z \sigma_x dA \quad (3.17)$$

$$M_z = \int_A y \sigma_x dA \quad (3.18)$$

Estas relações deixam claro que:

- Esforço normal e momentos fletores causam tensões normais.
- Esforços cortantes e momento de torção causam tensões tangenciais.

**Exemplo 1:** Calcular as tensões em uma barra submetida a esforço normal constante. Verifica-se, experimentalmente, que as tensões normais ( $\sigma_x$ ) neste caso se distribuem de maneira uniforme na seção, isto é, todos os pontos da seção estão sujeitos a uma mesma tensão normal (constante), e que as tensões cisalhantes ( $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$ ) são nulas.

As figuras 3.3 e 3.4 representam a tensão normal constante em uma seção retangular ABCD, em perspectiva isométrica e em vista lateral, respectivamente. O diagrama espacial é chamado “sólido de tensões” e o plano A'B'C'D', que contém as extremidades dos vetores, é a “superfície de tensões”.

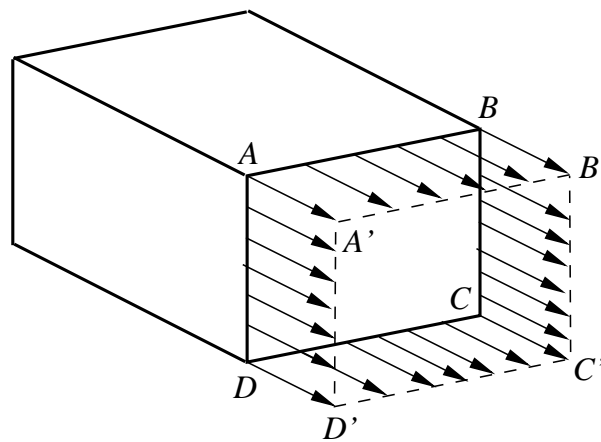


Figura 3.3: Sólidos de Tensões

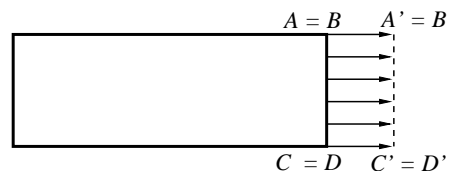


Figura 3.4: Vista lateral do Sólido de Tensões

Desta maneira, pode-se afirmar, observando equações 3.16 a 3.18, que  $Q_y = 0$ ,  $Q_z = 0$  e  $T = 0$ . Então, utilizando-se equação 3.13 tem-se:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA \\ N &= \sigma_x A \\ \sigma_x &= \frac{N}{A} \end{aligned}$$

sendo  $A$  a área da seção transversal da barra.

Outra maneira de se obter a relação entre a tensão normal e esforço normal é identificando que  $\int_A \sigma_x dA$  é o volume do sólido de tensões. Assim sendo tem-se:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \text{volume do sólido de tensões} = \sigma_x A$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

De forma análoga, pode-se calcular os momentos fletores  $M_y$  e  $M_z$  multiplicando-se a resultante de forças (volume do sólido de tensões) pela respectiva distância até o centro da seção. Isso equivale a se resolver as equações 3.17 e 3.18. Como em ambos os casos a distância é nula, tem-se que os esforços  $M_y$  e  $M_z$  também os são.

**Exemplo 2:** Na seção quadrada de uma barra de lado  $a$  não existem tensões tangenciais e as tensões normais variam de acordo com o diagrama espacial dado na figura 3.5. Calcular os esforços simples na seção.

Resposta:  $N = \sigma_o a^2/2$  e  $M_z = \sigma_o a^3/12$ . Demais esforços nulos.

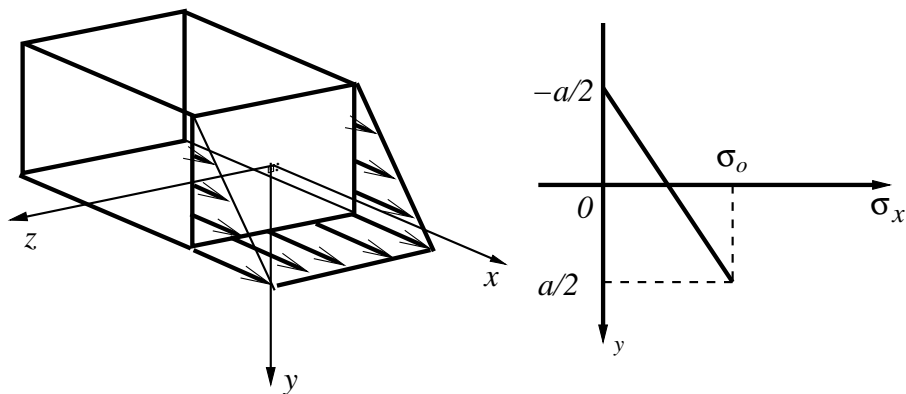


Figura 3.5: Figura do exemplo 2

**Exemplo 3:** Em uma seção retângular  $b \times h$  não existem tensões tangenciais e as tensões normais variam de acordo com o sólido de tensões dado nas figuras 3.6. Calcule os esforços simples nestas seções.

Respostas: primeiro caso:  $M_z = \sigma_o b h^2/6$  e demais esforços nulos; segundo caso:  $N = \sigma_o b h/3$ ,  $M_z = \sigma_o b h^2/9$  e demais esforços nulos.

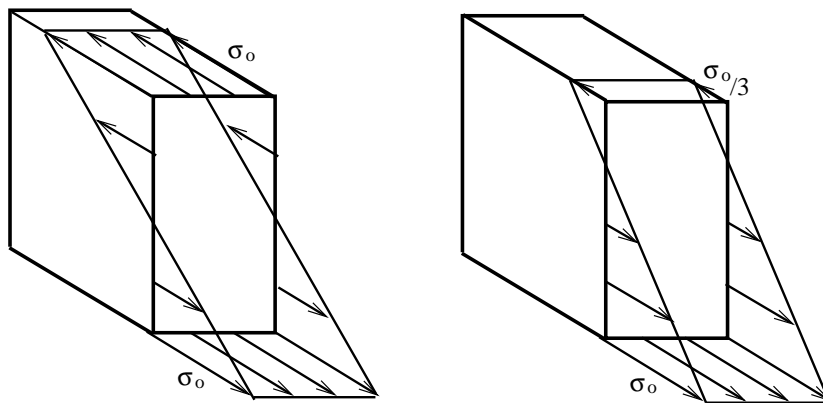


Figura 3.6: Figura do exemplo 3

### 3.1 Solicitação por esforço normal

Barras submetidas a esforços normais sofrem deformações lineares longitudinais e transversais ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ ) e, conforme observado no exemplo 1 deste capítulo, a distribuição de tensões  $\sigma_x$  numa determinada seção transversal é constante e não há tensões cisalhantes nas seções transversais ( $\tau_{xy} = 0$  e  $\tau_{xz} = 0$ ).

Pode-se dizer que o cálculo das tensões normais e dos alongamentos (ou encurtamentos) totais são fundamentais para o dimensionamento de barras sujeitas a esforço normal. Partindo da equação 3.13 e admitindo-se que  $\sigma_x(x)$ ,  $A(x)$ , e  $N(x)$  podem variar ao longo do comprimento da barra (eixo  $x$ ), tem-se:

$$N(x) = \int_A \sigma_x(x) dA \quad (3.19)$$

Como  $A(x)$ ,  $\sigma(x)$  são características da seção transversal da barra com esforço normal  $N(x)$ , a equação 3.19 pode ser reescrita como:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \quad (3.20)$$

Assim sendo, a equação 3.20 permite que se calcule a tensão normal uma vez conhecido o diagrama de esforços normais e a área da seção transversal onde se deseja calcular a tensão  $\sigma_x$ .

Para o cálculo dos alongamentos (ou encurtamentos) é dada ênfase maior para direção longitudinal. Mudanças na geometria nas direções transversais podem ser obtidas pelas equações 2.62.

O alongamento/encurtamento total de uma barra sujeita a esforços normais ( $\Delta L$ ) pode ser calculado pela equação:

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon_x dx \quad (3.21)$$

Da lei de Hooke para o estado uniaxial de tensões (somente  $\sigma_x$  atuando)  $\sigma_x = E\epsilon_x$ , ou seja:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\sigma_x}{E} dx \quad (3.22)$$

mas, considerando equação 3.20 tem-se finalmente:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (3.23)$$

**Exemplo 4:** Calcular o alongamento total e a tensão normal para a barra da figura 3.7. **Desconsidere** o peso próprio. Dados: área da seção transversal  $A$ , comprimento  $L$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E$ .

**Cálculo da tensão normal  $\sigma_x$ .** Neste caso a tensão normal  $\sigma_x$  é constante na seção e não varia ao longo do eixo da barra pois a área  $A$  é constante e o esforço normal  $N$  também:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} \quad (3.24)$$

**Cálculo do alongamento total  $\Delta L$ .** Neste caso a integral da equação 3.23 resulta em:

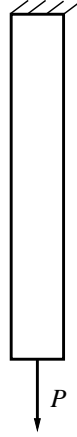


Figura 3.7: Figura dos exemplos 4, 5 e 6

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} dx = \frac{NL}{EA} = \frac{PL}{EA} \quad (3.25)$$

**Exemplo 5:** Calcular o alongamento total e a tensão normal para a barra da figura 3.7 para  $P = 0$ . **Considere** o peso próprio. Dados: área da seção transversal  $A$ , comprimento  $L$ , módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e peso específico  $\gamma$ .

**Cálculo da tensão normal  $\sigma_x$ .** Neste caso a tensão normal  $\sigma_x$  é constante na seção e varia ao longo do eixo da barra pois apesar área  $A$  ser constante, o esforço normal  $N$  varia ao longo do comprimento. Definindo um referencial com origem no centro de gravidade da seção transversal na extremidade da barra tem-se:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{\gamma Ax}{A} = \gamma x \quad (3.26)$$

**Cálculo do alongamento total  $\Delta L$ .** Neste caso a integral da equação 3.23 resulta em:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA} dx = \int_0^L \frac{\sigma_x(x)}{E} dx = \int_0^L \frac{\gamma x}{E} dx = \frac{\gamma L^2}{2E} \quad (3.27)$$

**Exemplo 6:** Calcular o alongamento total e a tensão normal para a barra da figura 3.7. **Considere** o peso próprio. Dados: área da seção transversal  $A$ , comprimento  $L$ , módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e peso específico  $\gamma$ .

Utilizando-se o princípio da superposição de efeitos:

$$\sigma_x(x) = \frac{P}{A} + \gamma x \quad (3.28)$$

$$\Delta L = \frac{PL}{EA} + \frac{\gamma L^2}{2E} \quad (3.29)$$

**Exemplo 7:** Calcular o alongamento total e a tensão normal para a barra da figura 3.8. **Desconsidere** o peso próprio. Dados: área da seção transversal  $A$ , comprimento  $L$ , módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e  $q$  a carga axial distribuída.

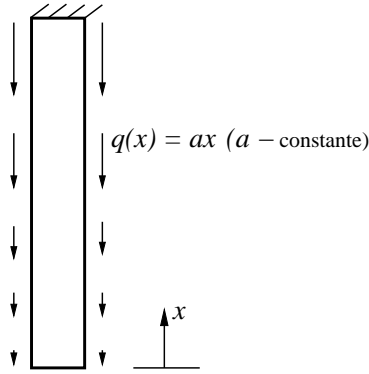


Figura 3.8: Figura do exemplo 7

**Cálculo da tensão normal  $\sigma_x$ .** Neste caso a tensão normal  $\sigma_x$  é constante na seção e varia ao longo do eixo da barra:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{\int_0^x q(x) dx}{A} = \frac{\int_0^x ax dx}{A} = \frac{ax^2}{2A} \quad (3.30)$$

**Cálculo do alongamento total  $\Delta L$ .** Neste caso a integral da equação 3.23 resulta em:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA} dx = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} dx = \int_0^L \frac{ax^2}{2AE} dx = \frac{aL^3}{6AE} \quad (3.31)$$

**Exemplo 8:** Calcular o encurtamento total e a tensão normal para o obelisco da figura 3.9. Considere somente o peso próprio. Dados: obelisco de base quadrada de lado  $a$  e altura  $L$ , módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e  $\gamma$  o peso específico.

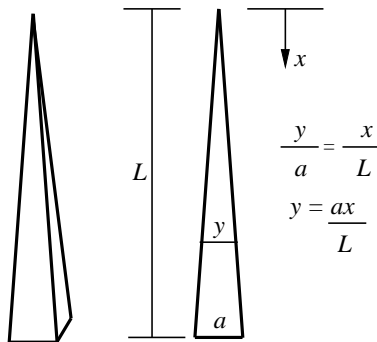


Figura 3.9: Figura do exemplo 8

**Cálculo da tensão normal  $\sigma_x$ .** Neste caso a tensão normal  $\sigma_x$  é constante na seção e varia ao longo do eixo da barra:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{1}{3}y^2x\gamma \frac{1}{y^2} = \frac{1}{3}\gamma x \quad (3.32)$$

**Cálculo do alongamento total  $\Delta L$ .** Neste caso a integral da equação 3.23 resulta em:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} dx = \int_0^L \frac{1}{3} \frac{\gamma x}{E} = \frac{\gamma L^2}{6E} \quad (3.33)$$

### 3.1.1 Exercícios

Atenção: Considere a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e lembre-se que  $F = ma$  (a força igual ao produto da massa pela aceleração).

1. Calcular o diâmetro de uma barra sujeita a ação de uma carga axial de tração  $P = 50 \text{ kN}$  e calcular o valor correspondente alongamento total, para uma tensão admissível de  $\bar{\sigma}_x = 150 \text{ MPa}$  e uma variação de comprimento máxima de  $\overline{\Delta L} = 4 \text{ mm}$ . São dados o comprimento da barra  $L = 4,5 \text{ m}$  e o módulo de elasticidade do aço  $E = 210 \text{ GPa}$ .

Resposta. ( $\phi = 21 \text{ mm}$ ;  $\Delta L = 3,093 \text{ mm}$ )

2. Calcular o valor máximo admissível da carga  $P$  na treliça deste problema (ver figura 3.10) e o correspondente deslocamento vertical da articulação onde está aplicada a carga  $P$ . As barra de aço ( $E = 210 \text{ GPa}$ ), tem diâmetro  $d = 15 \text{ mm}$  e a tensão admissível é  $\bar{\sigma}_x = 150 \text{ MPa}$ .

Resposta:  $P_{adm} = 20,38 \text{ kN}$ ;  $\Delta L = 6,02 \text{ mm}$

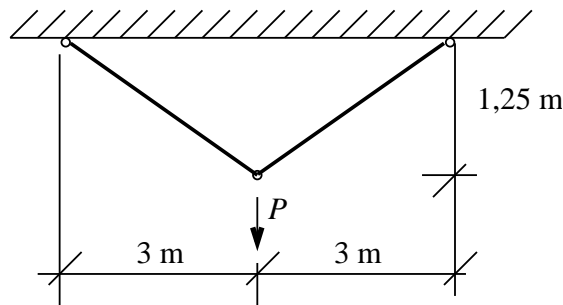


Figura 3.10: Figura do exercício 2

3. Verificar a estabilidade da treliça da figura 3.11. Dados: Barra  $AC$  em aço, seção circular, diâmetro  $28 \text{ mm}$ . Barra  $BC$  em madeira, seção quadrada, lado  $65 \text{ mm}$ ;  $P = 60 \text{ kN}$ ,  $\bar{\sigma}_x$  (aço) =  $140 \text{ MPa}$ ,  $\bar{\sigma}_x$  (madeira, compressão) =  $12 \text{ MPa}$ ,  $E_a = 210 \text{ GPa}$  e  $E_m = 12 \text{ GPa}$ .

Resposta: Estável

4. Um corpo de prova padronizado, de aço, com  $13 \text{ mm}$  de diâmetro, sujeito a uma força de tração de  $29,5 \text{ kN}$  teve um alongamento de  $0,216 \text{ mm}$  para um comprimento de  $200 \text{ mm}$ . Admitindo-se que não foi superado o limite de proporcionalidade, estimar o valor do módulo de elasticidade longitudinal do aço.

Resposta:  $E = 206 \text{ GPa}$

5. Uma barra de aço ( $E = 210 \text{ GPa}$ ) de comprimento  $4,0 \text{ m}$  e seção circular está sujeita a uma tração de  $80 \text{ kN}$ . Calcular o diâmetro (número inteiro de  $\text{mm}$ ) para uma tensão normal admissível de  $120 \text{ MPa}$ . Calcular o valor correspondentes da



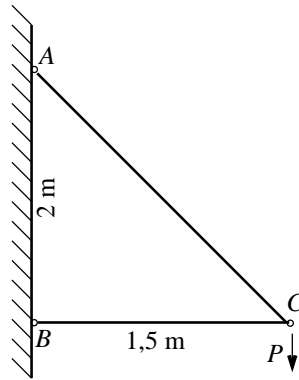


Figura 3.11: Figura do exercício 3

deformação específica e o alongamento total.

Resposta: 30 mm; 0,0005389 e 2,156 mm.

6. Calcular o raio interno de uma seção circular vazada (coroa circular) de ferro fundido sujeita a uma compressão de 1.500 kN. O raio externo é de 120 mm e a tensão admissível 75 MPa.

Resposta: 89 mm.

7. Calcular o valor máximo admissível do esforço normal em uma barra cuja a seção transversal está representada na figura 3.12 (dimensões em cm). Dados:  $E = 10$  GPa e  $\bar{\sigma}_x = 12$  MPa e a deformação específica admissível  $\bar{\epsilon}_x = 0,001$ .

Resposta. 208 kN.

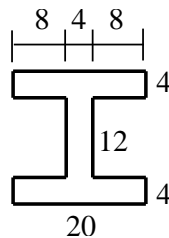


Figura 3.12: Figura do exercício 7

8. Calcular o alongamento total da barra de aço representada na figura 3.13, cuja área de seção transversal é  $500 \text{ mm}^2$ . Dados:  $F = 4,5$  kN,  $P = 2,0$  kN e  $E = 210$  GPa.

Resposta:  $\Delta L = 0,0286$  mm.

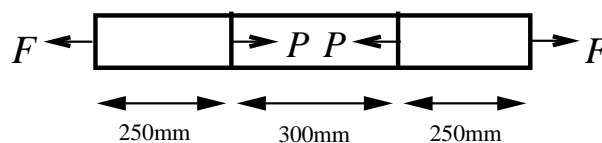


Figura 3.13: Figura do exercício 8

9. Calcular o alongamento total da barra representada na figura 3.14, sujeita a uma carga axial da tração  $F = 5,5$  kN, sendo o segmento AB em aço ( $E_a = 210$  GPa) com seção circular de diâmetro 6,3 mm e o segmento BC em latão ( $E_l = 95$  GPa) com seção quadrada de lado 25 mm.

Resposta.  $\Delta L = 0,3639$  mm.

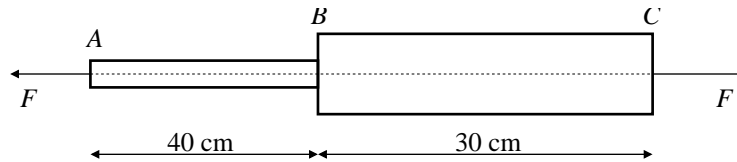


Figura 3.14: Figura do exercício 9

10. Uma coluna curta é constituída por dois tubos de aço , colocados um sobre o outro (veja figura 3.15). Desprezando o peso próprio dos tubos, calcular a carga axial  $P_1$  admissível, se a carga axial  $P_2 = 200$  kN, dada a tensão normal admissível a compressão de 100 MPa.  
Resposta ( $P_1 = 60$  kN).

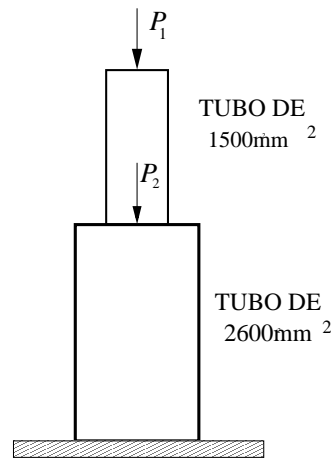


Figura 3.15: Figura do exercício 10

11. Uma barra  $AB$  de comprimento  $L$  está suspensa horizontalmente por dois fios verticais presos às suas extremidades (veja figura). Os fios têm o mesmo comprimento e mesma área de seção transversal mas diferentes módulos de elasticidade ( $E_1$  e  $E_2$ ). Desprezando o peso próprio da barra , calcular a distância  $d$  , do ponto de aplicação da carga  $P$  até a extremidade  $A$  , para que a barra permaneça horizontal.  
Resposta ( $d = (LE_2)/(E_1 + E_2)$ )

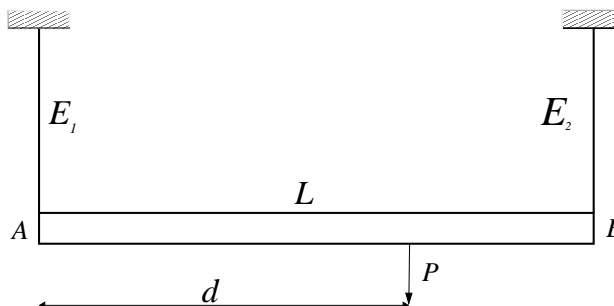


Figura 3.16: Figura do exercício 11

12. Um dispositivo de três barras é utilizado para suspender uma massa  $W$  de 5000 Kg (veja figura 3.17). Os diâmetros das barras são de 20 mm ( $AB$  e  $BD$ ) e 13 mm ( $BC$ ). Calcular as tensões normais nas barras.  
Resposta (150,8 MPa em  $AB$ , 119 MPa em  $BC$  e 159 MPa em  $BD$ ).

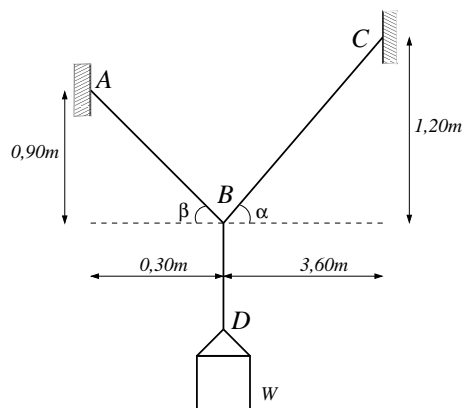


Figura 3.17: Figura do exercício 12

13. As barras  $AB$  e  $AC$  da treliça representada na figura 3.18 são peças de madeira  $6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$  e  $6\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ , respectivamente. Sendo as tensões normais admissíveis de  $12\text{ MPa}$  a tração e  $8\text{ MPa}$  a compressão, calcular o valor admissível da carga  $P$ . Resposta ( $P = 60,8\text{ KN}$ ).

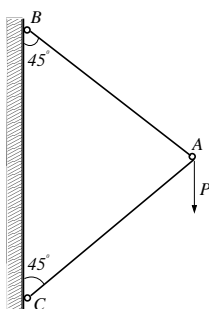


Figura 3.18: Figura do exercício 13

14. As barras da treliça representada na figura 3.19 são de madeira com seções retangulares  $60\text{ mm} \times L$  ( $BC$ ) e  $60\text{ mm} \times 1,4L$  ( $AC$ ). Calcular  $L$  para tensões normais admissíveis de  $12\text{ MPa}$  a tração e  $8,5\text{ MPa}$  a compressão. Resposta ( $L = 73\text{ mm}$ ).

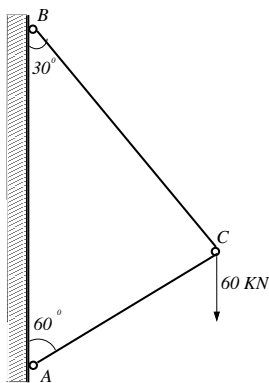


Figura 3.19: Figura do exercício 14.

15. As barras  $AB$  e  $BC$  da treliça da figura 3.20 comprimento de  $3,0\text{ m}$  e área de seção  $A$ . Especificados  $\bar{\sigma}_x = 220\text{ MPa}$  e  $E = 210\text{ GPa}$ , calcular o valor de  $A$  e o

correspondente valor do deslocamento vertical da articulação  $C$ .  
Resposta ( $A = 170,45 \text{ mm}^2$  e  $\Delta L = 5,23 \text{ mm}$ ).

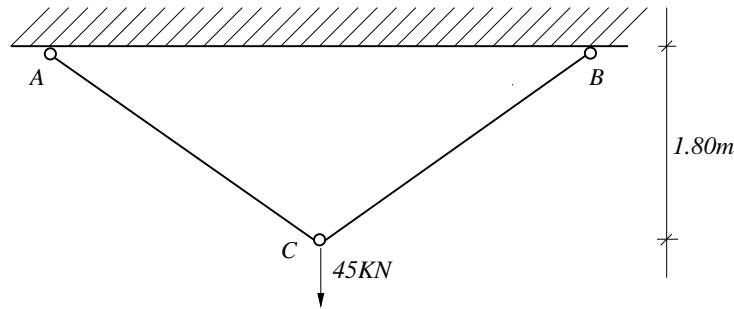


Figura 3.20: Figura do exercício 15

16. Na treliça da figura 3.21, as barras são de aço ( $E = 210 \text{ GPa}$ ) com tensões admissíveis de  $210 \text{ MPa}$  (tração) e  $166 \text{ MPa}$  (compressão). As áreas das seções transversais são  $400 \text{ mm}^2$  ( $BC$ ) e  $525 \text{ mm}^2$  ( $AC$ ). Calcular o valor admissível de  $P$  e os valores correspondentes das tensões normais e deformações nas barras.

Respostas:

- $P = 52,19 \text{ kN}$ .
- Barra  $AC$ :  $\sigma_x = 166 \text{ MPa}$  e  $\Delta L = 3,95 \text{ mm}$ .
- Barra  $BC$ :  $\sigma_x = 174,8 \text{ MPa}$  e  $\Delta L = 3,33 \text{ mm}$ .

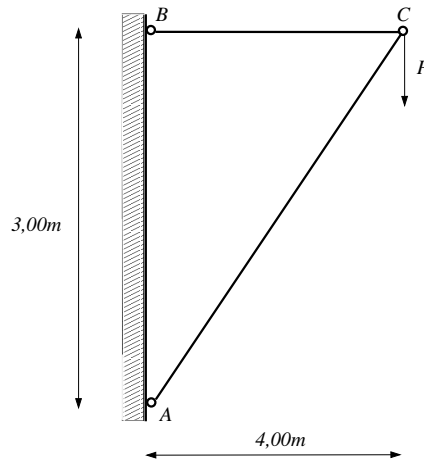


Figura 3.21: Figura do exercício 16

17. Uma haste de aço ( $E = 210 \text{ GPa}$ ) de  $100 \text{ m}$  de comprimento, suspensa verticalmente, suporta uma carga de  $55 \text{ kN}$  concentrada na sua extremidade livre, além de seu peso próprio (a massa específica do aço é  $7.850 \text{ Kg/m}$ ). Para uma tensão normal admissível de  $120 \text{ MPa}$ , dimensionar a haste (seção circular, diâmetro em número inteiro de  $\text{mm}$ ) e calcular o alongamento previsto.

Resposta ( $D = 25 \text{ mm}$  ;  $\Delta L = 55,22 \text{ mm}$ )

18. Calcular a área da seção transversal em cada trecho da barra da figura 3.22, sujeita à carga  $P = 45 \text{ kN}$ , além do seu peso próprio. São dados os valores da tensão admissível e da massa específica em cada trecho.

- $AB$  (aço) 120 MPa; 7.800 kg/m;
- $BC$  (latão) 80 MPa; 8.300 kg/m;

Resposta ( $AB = 382$  mm e  $BC = 570$  mm) ;

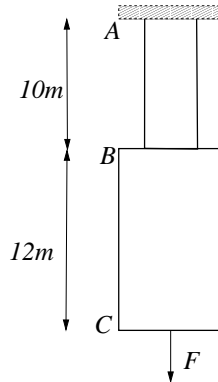


Figura 3.22: Figura do exercício 18

19. A haste de aço da figura 3.23 suporta uma carga axial  $F$ , além de seu próprio peso. Os diâmetros são  $d_1 = 18$  mm em  $AB$  e  $d_2 = 22$  mm em  $BC$ . Dados a massa específica  $7.850$  Kg/m<sup>3</sup>, o módulo de elasticidade longitudinal  $210$  GPa e a tensão normal admissível  $150$  MPa, calcular o valor máximo admissível da carga  $F$  e o correspondente alongamento total. Representar os correspondentes diagramas de esforços normais e de tensões normais.

Resposta ( $F = 30,18$  kN,  $\Delta L = 477$  mm)

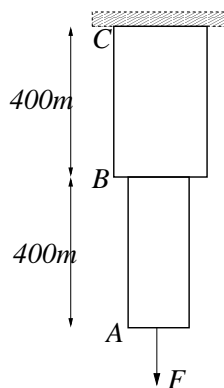


Figura 3.23: Figura do exercício 19

20. A haste de aço suspensa verticalmente suporta uma carga axial  $F = 15$  kN na sua extremidade, além de seu próprio peso. Há uma redução do diâmetro no trecho  $AB$ , conforme indicado na figura 3.24. Dados  $\bar{\sigma}_x = 120$  MPa,  $E = 210$  GPa e massa específica  $= 8$  t/m, pede-se dimensionar a haste (calcular os diâmetros em número inteiro de mm) e calcular o alongamento total. Representar a variação da tensão normal ao longo do comprimento ( $\sigma_x(x)$ ).

Resposta ( $D_{AB} = 15$  mm,  $D_{BC} = 18$  mm,  $\Delta L = 366$  mm);

21. Uma haste de aço suspensa verticalmente tem  $1.200$  m de comprimento e suporta uma carga  $P$  em sua extremidade. Calcular o valor admissível de  $P$  e o correspondente alongamento total da haste, se :

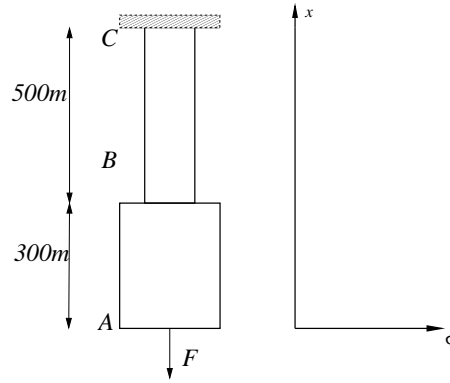


Figura 3.24: Figura do exercício 20

- O diâmetro é constante e igual a 25mm.
- São quatro segmentos de 300 m, com diâmetros 16mm, 19 mm, 22 mm e 25 mm.
- Considere  $\bar{\sigma}_x = 100$  MPa,  $E = 210$  GPa e  $\gamma = 7850$  kg/m

Resposta:

- $P = 2,847$  kN e  $\Delta L = 302,3$  mm;
  - $P = 15,371$  kN e  $\Delta L = 482,5$  mm;
22. Calcular o deslocamento vertical do vértice de um cone apoiado na base e sujeito somente a ação de seu próprio peso, sendo a altura igual a  $L$ , o peso específico  $\gamma$  e o módulo de elasticidade  $E$ .
- Resposta ( $\Delta L = \gamma L^2 / 6E$ );
23. Uma estaca uniforme de madeira, cravada a uma profundidade  $L$  na argila, suporta uma carga  $F$  em seu topo. Esta carga é internamente resistida pelo atrito  $f$  ao longo da estaca, o qual varia de forma parabólica, conforme a figura 3.25. Calcular o encurtamento total da estaca, em função de  $L$ ,  $F$ ,  $A$  (área da seção transversal) e  $E$  (módulo de elasticidade).

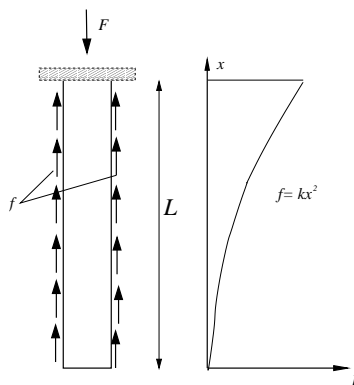


Figura 3.25: Figura do exercício 23

Resposta ( $\Delta L = -FL/4AE$ );

24. Uma estaca de madeira é cravada no solo, como mostra a figura, ficando solicitada por uma carga  $F = 450$  kN, axial, no seu topo. Uma força de atrito  $f$  (kN/m) equilibra a carga  $F$ . A intensidade da força de atrito varia com o quadrado da distância  $z$ , sendo zero no topo. Dados  $E = 1,4 \times 10^4$  MPa ,  $L = 9$  m e  $D = 30$  cm, determinar o encurtamento da estaca e representar os diagramas ( $f \times z$  ,  $N \times z$  e  $\sigma_z \times z$ ).

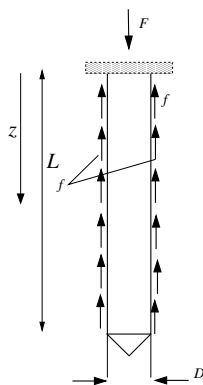


Figura 3.26: Figura do exercício 24

Resposta:  $\Delta L = -3,069$  mm

## 3.2 Solicitação por momento torsor

### 3.2.1 Introdução

Neste item serão estudadas das tensões e deformações em barras sujeitas à torção. O estudo a realizado envolve:

- **Barras sujeitas à Torção Pura:** Somente o efeito do momento torsor (torque), sendo os demais esforços simples nulos.
- Barras de eixo reto e seção transversal **circular** (cheia) ou **anular** (coroa circular) conforme figura 3.27. Barras com estas características são comumente denominadas de **eixos**

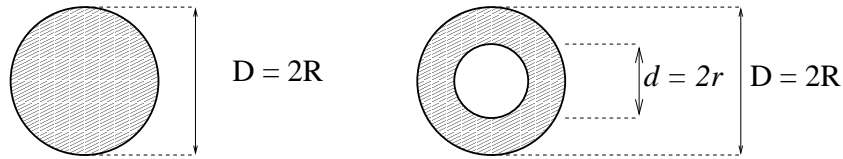


Figura 3.27: Seção circular e anular

- Eixos sujeitos à momento **torsor constante** conforme figura 3.28.

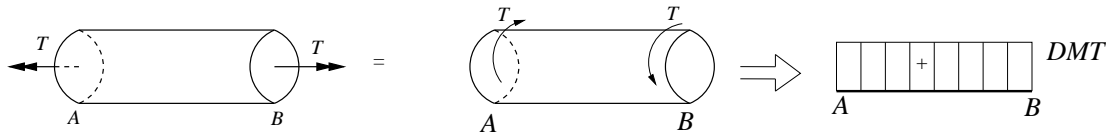


Figura 3.28: Eixo sujeito à torsor constante

- Pequenas deformações: as seções permanecem planas e perpendiculares ao eixo, com forma e dimensões conservadas. As deformações são deslocamentos angulares (ângulos de torção), em torno do eixo- $x$  (eixo da barra), de uma seção em relação a outra.

O momento torsor, conforme estudado no item 3, está associado às tensões cisalhantes  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$ . A equação 3.16, que confirma esta afirmação, é reescrita abaixo para facilitar o trabalho do leitor.

$$T = \int_A (z\tau_{xy} - y\tau_{xz}) dA \quad (3.34)$$

Analisando um ponto  $P(z, y)$  genérico e contido numa seção transversal de um eixo conforme figura 3.29, é possível transformar a equação 3.34 numa forma mais compacta. Chamando de  $\vec{\tau}$  a soma vetorial entre  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  e observando figura 3.29 tem-se:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{xy} + \vec{\tau}_{xz} \quad (3.35)$$

$$z = \rho \cos \phi \quad (3.36)$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (3.37)$$

$$\tau_{xy} = \tau \cos \phi \quad (3.38)$$

$$\tau_{xz} = -\tau \sin \phi \quad (3.39)$$



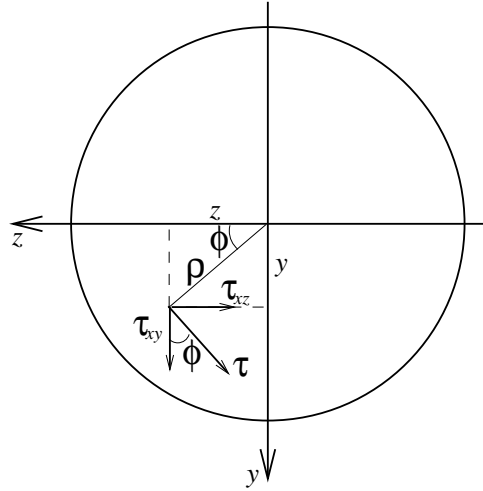


Figura 3.29: Tensões cisalhantes na torção

Substituindo as equações 3.35 a 3.39 na equação 3.34 tem-se:

$$\begin{aligned}
 T &= \int_A (\rho \cos \phi \tau \cos \phi + \rho \sin \phi \tau \sin \phi) dA \\
 T &= \int_A \rho \tau (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) dA \\
 T &= \int_A \rho \tau dA \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

A equação 3.40 pode ser compreendida como a equação 3.34 em coordenadas polares. Assim, as coordenadas que definem a posição do ponto genérico  $P$  podem ser escritas como  $\rho$  e  $\phi$ . O próximo passo desta análise é definir uma relação entre  $\tau$  e a coordenada  $(\rho, \phi)$  do ponto genérico  $P$ , ou simplesmente:  $\tau = \tau(\rho, \phi)$ .

### 3.2.2 Análise de Tensões e deformações na torção

Sejam:

- $\gamma$  a distorção angular do “retângulo”  $abcd$ , contido em uma superfície cilíndrica de raio  $\rho$  e comprimento  $dx$  conforme figura 3.30.
- $d\theta$  o deslocamento angular (ângulo de torção) elementar da seção  $Sd$  em relação à seção  $Se$  conforme figura 3.30.

Da figura 3.30 pode-se escrever:

$$bb' = \rho d\theta \tag{3.41}$$

$$bb' = \gamma dx \tag{3.42}$$

Igualando as equações 3.41 e 3.42 tem-se:

$$\gamma = \rho \frac{d\theta}{dx} \tag{3.43}$$

Da Lei de Hooke tem-se:

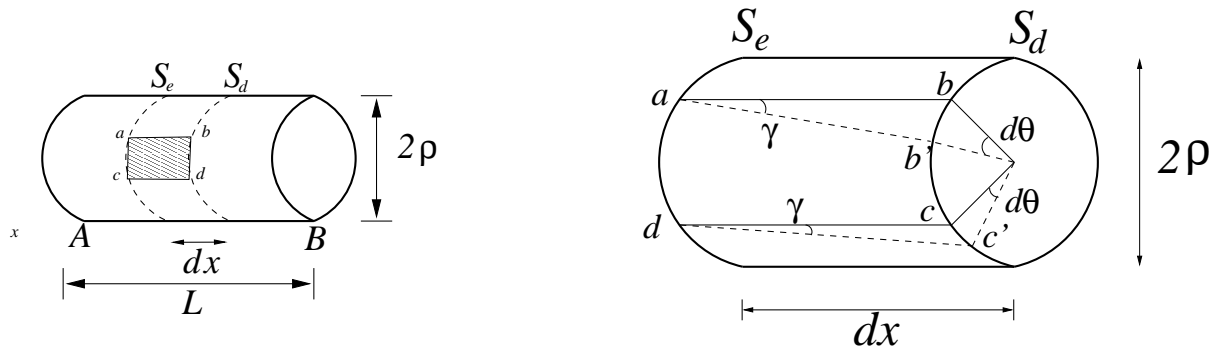


Figura 3.30: Análise das deformações na torção

$$\tau = G\gamma \quad (3.44)$$

lembrando que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal.

Substituindo o valor de  $\gamma$  da equação 3.43 na equação 3.44 tem-se:

$$\tau = \rho G \frac{d\theta}{dx} \quad (3.45)$$

Como  $\theta$  varia linearmente com  $x$  (ver figura 3.30), sua derivada com relação a  $x$  é constante e pode-se dizer que:

$$G \frac{d\theta}{dx} = \text{constante} = K \quad (3.46)$$

Pode-se concluir então que  $\tau$  é função somente de  $\rho$ , não é função de  $\phi$  ( $\tau = K\rho$ ), portanto constante em pontos de mesmo  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq R$ ), para qualquer  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ). A variação de  $\tau$  com  $\rho$  é linear, conforme mostra a figura 3.31.

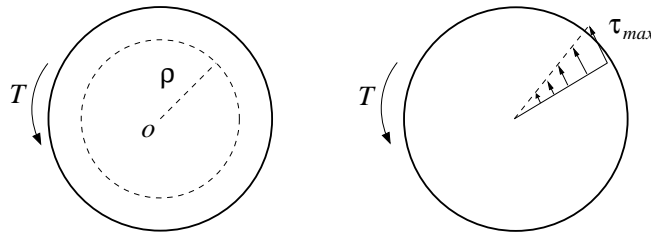


Figura 3.31: Variação da tensão cisalhante em função de  $\rho$

Para calcular a constante  $K$  basta substituir  $\tau = K\rho$  na equação 3.40:

$$T = \int_A \rho\tau \, dA = \int_A \rho K\rho \, dA = (K \underbrace{\int_A \rho^2 \, dA}_{\text{Momento de inércia polar: } I_o}) = K \cdot I_o \quad (3.47)$$

Logo:

$$K = \frac{T}{I_o} \quad (3.48)$$

e:

$$\tau = \frac{T}{I_o} \rho \quad (3.49)$$

A tensão cisalhante  $\tau_{max}$  máxima se dá  $\rho = R$ :

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_o} R \quad (3.50)$$

A razão entre  $I_o$  e  $R$  ( $W_o$ ) é chamada de módulo de resistência à torção. Então:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_o} \quad (3.51)$$

Da Mecânica Geral, o valor de  $I_o$  para uma seção circular é:

$$I_o = \frac{\pi}{32} D^4 (\text{seção circular}) \quad (3.52)$$

e para seção anular, sendo  $D$  o diâmetro de eixo temos:

$$I_o = \frac{\pi}{32} (D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{32} D_e^4 (1 - n^4) (\text{seção anular}) \quad (3.53)$$

para anular sendo  $D_e$  o diâmetro externo,  $D_i$  o diâmetro interno do eixo e  $n = D_i/D_e$

Substituindo os valores de  $R = D/2$  (seção circular),  $R = D_e/2$  (seção anular) e de  $I_o$  das equações 3.52 e 3.53, pode-se chegar facilmente a:

$$\tau_{max} = \frac{16T}{\pi D^3} (\text{seção circular}) \quad (3.54)$$

$$\tau_{max} = \frac{16T}{\pi D^3} \left( \frac{1}{1 - n^4} \right) (\text{seção anular}) \quad (3.55)$$

### 3.2.3 Cálculo do ângulo de torção

O ângulo de torção (rotação relativa) entre duas seções distantes de  $L$  unidades de comprimento é:

$$\theta = \int_0^L d\theta = \int_0^L \underbrace{\frac{\gamma}{\rho} dx}_{\text{ver eq. 3.43}} = \int_0^L \overbrace{\frac{\tau}{G}}^{\text{Lei de Hooke}} \frac{1}{\rho} dx \quad (3.56)$$

Substituindo o valor de  $\tau$  (equação 3.49) a equação 3.56 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^L \frac{T}{\underbrace{I_o \rho}_{\text{eq.3.49}}} \frac{1}{G \rho} dx \\ \theta &= \frac{T L}{G I_o} \end{aligned} \quad (3.57)$$

### 3.2.4 Torque Aplicado ao eixo na Transmissão de Potência

Se um eixo transmite uma potência  $P$  a uma velocidade angular  $\omega$ , então ele está sujeito a um torque (momento de torção):  $T = P/\omega$ .

Justificativa: O trabalho executado pelo momento tursor  $T$ , constante, é:

$$W = T\phi \quad (3.58)$$

$$dW = Td\phi \quad (3.59)$$

$$(3.60)$$

onde  $\phi$  é o deslocamento angular, em radianos. Como potência é trabalho por unidade de tempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = T \frac{d\phi}{dt} = T\omega \quad (3.61)$$

Unidades no SI:

- Potência ( $P$ ): watt ( $1W = 1 \text{ Nm/s}$ ).
- Velocidade angular  $\omega = 2\pi f$ : rad/s.
- Frequência  $f$ : hertz = Hz
- Torque (T): Nm.

Se a potência for expressa em cavalos-vapor (CV) ou horse-power (hp), então os fatores de conversão para W são, respectivamente:

$$1 \text{ CV} = 736 \text{ W} \quad \text{e} \quad 1 \text{ hp} = 746 \text{ W} \quad (3.62)$$

### 3.2.5 Exercícios

1. Dimensionar o eixo de uma máquina, de 9 m de comprimento, que transmite 200 CV de potência, dados  $\bar{\tau} = 21 \text{ MPa}$  e  $G = 85 \text{ GPa}$  a uma frequência de 120 rpm, e calcular o correspondente deslocamento angular, adotando:
  - Seção circular cheia. Resposta: ( $D = 142 \text{ mm}$ ,  $\theta = 0,03107 \text{ rad}$ );
  - Seção anular com  $d/D = 0,5$ .  
Resposta: ( $D = 145 \text{ mm}$ ,  $\theta = 0,03048 \text{ rad}$ );
2. Calcular o momento de torque máximo admissível e o correspondente ângulo de torção em um eixo de comprimento de 2 m dados  $\tau_{adm} = 80 \text{ MPa}$  e  $G = 85 \text{ GPa}$  e seção:
  - Circular,  $D = 250 \text{ mm}$ ; Resposta: ( $T = 245,4 \text{ KNm}$  e  $\theta = 0,01506 \text{ rad}$ );
  - Anular, com  $d = 150 \text{ mm}$  e  $D = 250 \text{ mm}$ ; Resposta: ( $T = 213,4 \text{ KNm}$  e  $\theta = 0,01504 \text{ rad}$ );
3. Um eixo de aço, seção circular com  $D = 60 \text{ mm}$ , gira a uma frequência de 250 rpm. Determine a potência (em CV) que ele pode transmitir, dado  $\bar{\tau} = 80 \text{ MPa}$ . Resposta: ( $P = 120,7 \text{ CV}$ )
4. Dimensionar um eixo de seção circular que transmite a potência de 1800 CV a uma rotação de 250 rpm, para uma tensão admissível ao cisalhamento de 85 MPa e para um ângulo de rotação de 1 grau para um comprimento igual a 20 vezes o diâmetro. Dado o módulo de elasticidade transversal de 80 GPa. Resposta: ( $D = 195 \text{ mm}$ )

5. Determine a razão entre os pesos  $P_1$  e  $P_2$  (por unidade de comprimento) de dois eixos de mesmo material e sujeitos a um mesmo torque, sendo o eixo-1 de seção circular cheia e o eixo-2 de seção anular com  $d/D = 0,75$ . Resposta: ( $P_1/P_2 = 1,7737$ )
6. Calcular os diâmetros externo e interno de um eixo de aço sujeito a um torque de 25 KNm, de modo que a tensão máxima de cisalhamento seja 84 MPa e o ângulo de torção seja de 2,5 graus para um comprimento de 3 m. Dado  $G = 84$  GPa. Resposta: ( $D = 137,5$  mm e  $d = 110,5$  mm);
7. No eixo representado na figura 3.32, calcular a tensão máxima em cada trecho e o ângulo de torção  $C \times A$ , dados:  $T_1 = 6$  KNm,  $T_2 = 8$  KNm.
- $AB$  alumínio,  $D_1 = 100$  mm,  $G_1 = 28$  GPa;
  - $BC$  latão,  $D_2 = 60$  mm,  $G_2 = 35$  GPa;

Resposta: ( $\tau_{AB} = 71,3$  MPa,  $\tau_{BC} = 141,5$  MPa e  $\theta = 0,1318$  rad)

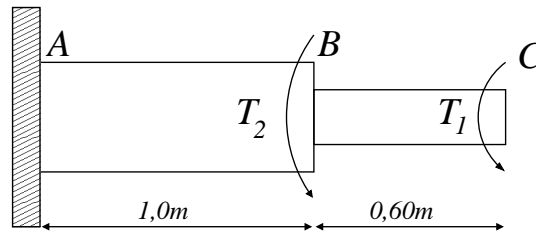


Figura 3.32: Figura do exercício 7

8. No eixo representado na figura 3.33, calcular a tensão máxima em cada trecho e o ângulo de torção  $C \times A$ .  $T_1 = 6$  KNm,  $T_2 = 9$  KNm,  $G = 84$  GPa,  $D = 100$  mm em  $AB$  e  $D = 76$  mm em  $BC$ .

Resposta: ( $\tau_{AB} = 15,3$  MPa,  $\tau_{BC} = 69,6$  MPa e  $\theta = 0,01163$  rad)

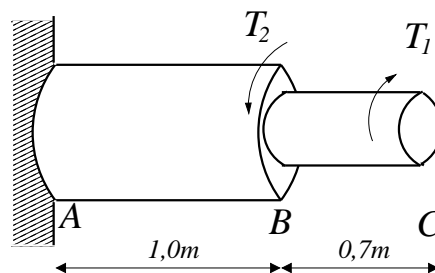


Figura 3.33: Figura do exercício 8

9. O eixo da figura 3.34 tem seção circular com 50 mm de diâmetro, é movimentado pela polia em  $C$  a uma rotação de 200 rpm e movimenta duas máquinas em  $A$  (40 CV) e  $B$  (25 CV). Calcular a tensão máxima em cada trecho e o ângulo de torção  $B \times A$ , dado  $G = 80$  GPa.
- Resposta: ( $\tau_{AC} = 57,3$  MPa,  $\tau_{CB} = 35,8$  MPa e  $\theta = 0,01611$  rad)
10. No exercício 9, qual deveria ser a razão entre os diâmetros  $D_1$  em  $AC$  e  $D_2$  em  $CB$  de modo que a tensão máxima nos dois trechos seja a mesma. Resposta: ( $R = 1,17$ )

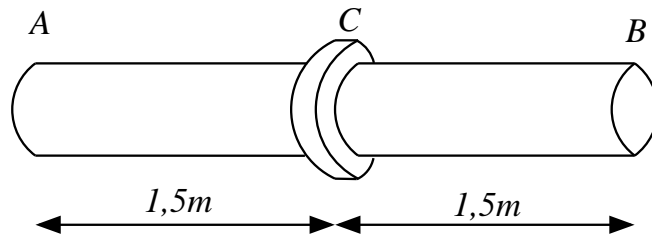


Figura 3.34: Figura do exercício 9

11. Um eixo de aço (veja figura 3.35), diâmetros  $D_1 = 80$  mm em  $AB$  e  $D_2 = 60$  mm em  $BC$ , está sujeito a dois torques iguais a  $T$  nas seções  $B$  e  $C$ . Dado o módulo de elasticidade transversal de 82 GPa, a tensão tangencial admissível de 102 MPa e o ângulo de torção  $C \times A$  admissível 0,08 rad, calcular o valor máximo admissível de  $T$ .

Resposta. ( $T = 3,913$  kNm)

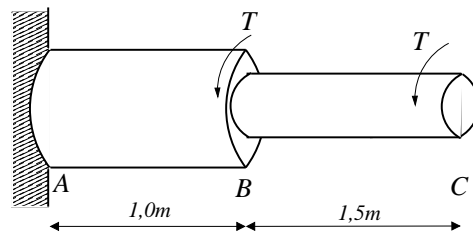


Figura 3.35: Figura do exercício 11

12. Calcular o valor máximo admissível do torque  $T$  e os valores correspondentes das tensões máximas e do ângulo de torção  $C \times A$ , dados  $D = 50$  mm em  $AB$  e  $D = 50$  mm e  $d = 30$  mm em  $BC$ , a tensão admissível  $\bar{\tau} = 80$  MPa e o valor de  $G = 80$  GPa.

Resposta: ( $T = 1,709$  kNm,  $\tau_{AB} = 55,7$  MPa,  $\tau_{BC} = 80$  MPa e  $\theta = 0,001065$  rad)

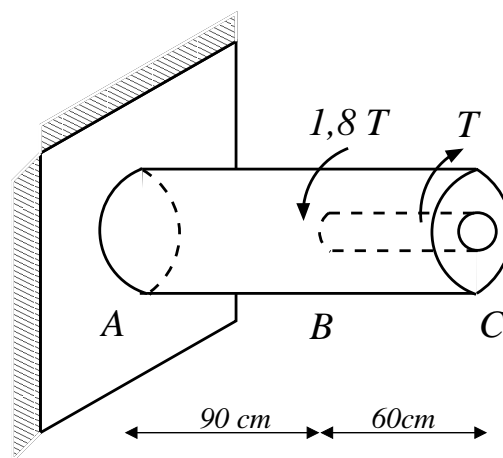


Figura 3.36: Figura do exercício 12

### 3.2.6 Torção em tubos de paredes delgadas

Supondo-se uma barra sujeita à torção tenha seção vazada de forma qualquer, com espessura  $e$  (constante ou variável. De forma semelhante ao abordado na seção 3.28, pode-se mostrar que as tensões cisalhantes são diretamente proporcionais à distância ao centro da seção. Sendo a espessura pequena com relação às dimensões da seção, considera-se nestes casos a tensão  $\tau$  constante na espessura (podendo variar ao redor da seção) conforme mostra figura 3.37

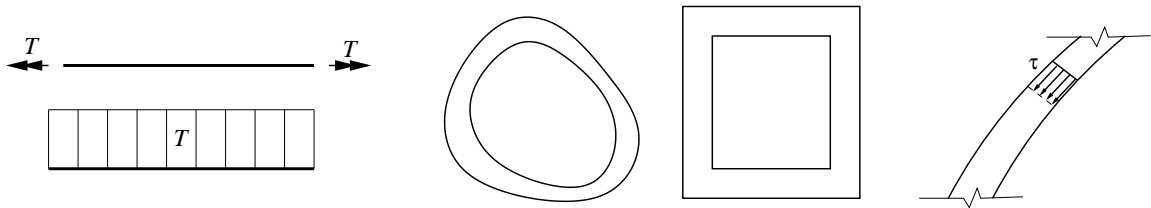


Figura 3.37: Torção em tubo de paredes delgadas

Seja um elemento de volume de espessura  $e_1$  e  $e_2$  e dimensões elementares  $dx$  (longitudinal) e  $ds$  transversal conforme figura 3.38

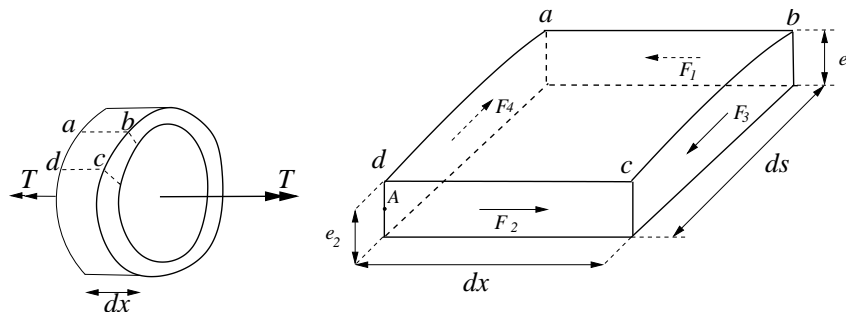


Figura 3.38: Elemento infinitesimal

Sejam  $\tau_1$  e  $\tau_2$  as tensões nas faces longitudinais do elemento infinitesimal. Considerando-se constante estas tensões, as correspondentes forças são dadas por:

$$F_1 = \tau_1 e_1 dx \quad (3.63)$$

$$F_2 = \tau_2 e_2 dx \quad (3.64)$$

Obviamente, da condição equilíbrio escreve-se

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \tau_1 e_1 = \tau_2 e_2 \quad (3.65)$$

Como o elemento de volume é genérico, conclui-se que:

$$f = \tau e \text{ (constante ao redor da seção)} \quad (3.66)$$

onde  $f$  é chamado de fluxo de cisalhamento.

Pode-se concluir também que:

- $e$  constante  $\rightarrow \tau$  constante
- $e$  máximo  $\rightarrow \tau$  mínimo

- $e$  mínimo  $\rightarrow \tau$  máximo

Fazendo-se o equilíbrio de momento com relação ao ponto  $A$  indicado na figura 3.38 tem-se, admitindo uma variação linear da espessura:

$$\begin{aligned} \tau_3 \frac{(e_1 + e_2)}{2} ds dx &= \tau_1 e_1 dx ds \\ \tau_3 \frac{(e_1 + e_2)}{2} &= f \end{aligned} \quad (3.67)$$

Tomando-se a resultante de forças na face 3 do volume infinitesimal obtém-se

$$F_3 = \tau_3 \frac{(e_1 + e_2)}{2} ds = f ds \quad (3.68)$$

A equação de equilíbrio entre forças externas e internas numa seção de tubo de paredes finas, equivalente à equação 3.34 em tubos de seção cheia, pode ser obtida fazendo-se o somatório ao longo da linha média da espessura ( $L_m$ ) dos torques elementar resultantes ( $dT = F_3$ ) num comprimento  $ds$  do sólido infinitesimal (ver figura 3.39):

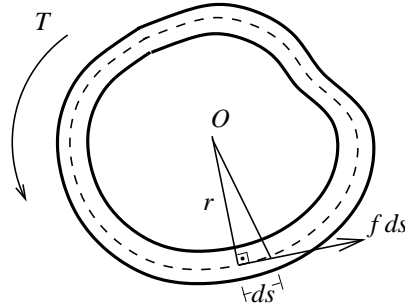


Figura 3.39: Equilíbrio entre forças internas e externas

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{L_m} dT \\ T &= \int_0^{L_m} F_3 \\ T &= \int_0^{L_m} r f ds \end{aligned} \quad (3.69)$$

A equação pode ser reescrita de forma mais simplificada observando a área média  $A_m$  (ver figura 3.39), limitada pela linha média  $L_m$  e que o fluxo de cisalhamento ( $f$ ) é uma constante na seção:

$$T = f \int_0^{L_m} r ds = 2 A_m f \quad (3.70)$$

e observando equação 3.66:

$$\tau = \frac{T}{2 e A_m} \quad (3.71)$$



A equação 3.71 é conhecida como primeira fórmula de Bredt.

Demonstra-se igualando a energia de deformação com o trabalho efetuado pelo torque  $T$  que o ângulo de torção  $\theta$  para um comprimento  $L$  de tubo é:

$$\theta = \frac{T L}{G I} \quad (3.72)$$

sendo:

$$I = \frac{4 A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{e}} \quad (3.73)$$

Para tubos de espessura constante tem-se:

$$I = \frac{4 A_m^2 e}{L_m} \quad (3.74)$$

e a equação 3.72 fica:

$$\theta = \frac{\overbrace{T}^{\tau}}{2 e A_m} \frac{L L_m}{2 A_m G} = \frac{\tau L L_m}{2 G A_m} \quad (3.75)$$

A equação 3.75 é conhecida como segunda fórmula de Bredt.

### 3.2.7 Exercícios

- Um tubo de alumínio ( $G = 28$  GPa) de 1,0 m de comprimento e seção retangular 60 mm  $\times$  100 mm (dimensões externas) está sujeito a um torque  $T = 3$  kNm. Determinar a tensão de cisalhamento em cada uma das paredes do tubo e o ângulo de torção, se:

- a) a espessura é constante, igual a 4 mm
- b) devido a um defeito de fabricação duas paredes adjacentes têm espessura 3 mm, e as outras duas têm espessura de 5 mm.

Resposta: a) 69,75 MPa e 0,07044 rad b) 93,0 MPa e 0,07513 rad

- Um tubo circular vazado de espessura 25 mm e diâmetro interno 225 mm está sujeito a um torque  $T = 170,25$  kNm. Calcular as tensões máxima de cisalhamento no tubo usando a teoria aproximada da tubos de paredes finas e a teoria exata de torção

Resposta 69,4 MPa e 76,08 MPa

- Um tubo fino de seção elíptica Está sujeito a um torque  $T = 5,67$  kNm. Dados espessura 5 mm, eixo maior = 150 mm, eixo menor = 100 mm e  $G = 80,5$  GPa, calcular a tensão de cisalhamento e o ângulo de torção para um comprimento de 1,0 m. Admitindo que o perímetro da elipse pode ser aproximado por:

$$P = 1,5 \pi (a + b) - \pi \sqrt{a b} \quad (3.76)$$

Resposta 52,41 MPa e 0,01147 rad

4. Calcular o torque máximo admissível em um tubo de paredes finas de espessura constante de 1,5 mm e seção representada na figura 3.40 (dimensões externas dadas em mm) para uma tensão admissível ao cisalhamento de 2,5 MPa.

Resposta 10,89 Nm

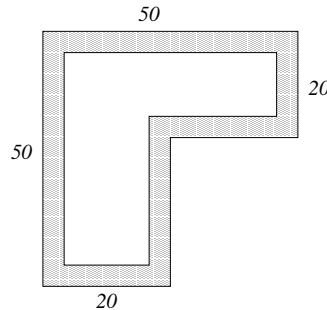


Figura 3.40: Figura do exercício 4

5. Um eixo de comprimento 1,6 m e seção vazada representada na figura 3.41 (dimensões em mm) está sujeito a um torque de 90 Nm. Dado o módulo de elasticidade transversal 80 GPa, calcular as tensões nos pontos **a** e **b** e o ângulo de torção.

Resposta 4,732 MPa e 0,005543 rad

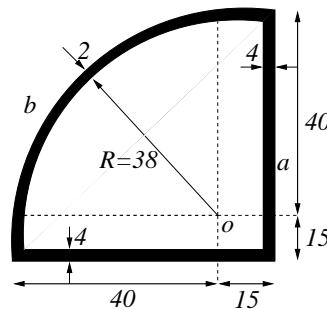


Figura 3.41: Figura do exercício 5

6. A figura 3.42 representa a seção transversal de um tubo de paredes finas, de alumínio com  $\bar{\tau} = 85$  MPa e  $G = 27000$  MPa. o trecho CD tem forma semi-circular. As dimensões externas estão indicadas em mm. As espessuras são  $e_1 = 4$  mm em  $AB$  e  $e_2 = 3$  mm em  $ACDB$ . calcular o momento de torção máximo admissível e os valores correspondentes do fluxo de cisalhamento, das tensões nos pontos **P** e **M**, e do ângulo de torção por metro de comprimento.

Resposta 192,56 kN; 255 N/mm; 85 MPa e 63,75 MPa; 0,009095 rad

7. Um eixo tubular de parede fina, com diâmetro interno de 100mm está sujeito a um torque de 5675Nm. Calcular a espessura da parede para uma tensão admissível ao cisalhamento de 91Mpa, usando a teoria aproximada de tubos de paredes finas e usando a teoria exata de torção.

Resposta 3,7mm e 3,8mm.

8. Deduzir as propriedades para cálculo de  $\tau$  e  $\theta$  em um tubo circular de parede fina (raio "médio"  $r$  e espessura  $e$ ), sujeito a um torque T. comparar com as propriedades deduzidas para seção anular.

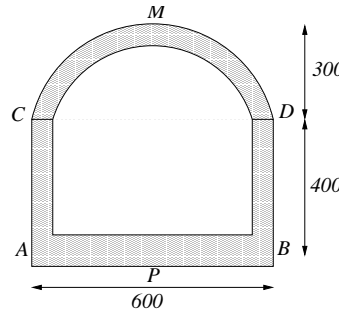


Figura 3.42: Figura do exercício 6

9. Comparar as tensões de cisalhamento e os ângulos de torção em dois tubos de paredes delgadas, um de parede delgadas, um de seção circular e outro de seção quadrada, mas de mesmo comprimento, mesma área de seção e mesma espessura, sujeitos ao mesmo torque.

Resposta  $\frac{\tau_{circular}}{\tau_{quadrada}} = 0,7854$  e  $\frac{\theta_{circular}}{\theta_{quadrada}} = 0,617$

10. Uma chapa de aço de 500mm de largura e 3mm de espessura é usada para fazer um tubo, curvando-se a chapa em  $360^\circ$  e soltando-se as bordas juntas longitudinalmente (topo a topo). As formas a considerar são

- (a) circular,
- (b) quadrada
- (c) retângular  $150 \times 100\text{mm}$

.Admita um comprimento médio de 500mm (nenhum esforço na placa devido ao encurvamento e cantos retos para seções, não circulares). calcular o momento torque máximo admissível e o correspondente ângulo de torção para 2m de comprimento, em cada caso, dados  $G = 80\text{Gpa}$  e  $\bar{\tau} = 70\text{Mpa}$ .

Resposta  $8,04\text{kNm}$  e  $0,0224\text{rd}$ ;  $6,25\text{kNm}$  e  $0,0287\text{rd}$ ;  $5,99\text{kNm}$  e  $0,0299\text{rd}$

11. A figura 3.43 representa a seção transversal da fuselagem de um avião feito de liga de alumínio ( $G = 27\text{GPa}$ ). As espessuras das placas são 1,5 mm em  $AB$  e  $CD$ ; 1,2 mm em  $BC$  e 1,0 mm em  $DA$ . Dados  $\bar{\tau} = 85\text{MPa}$ , calcular o momento torsor admissível e o correspondente ângulo de torção.

Resposta  $124,59\text{ kN}$  e  $0,00575\text{ rad}$ .

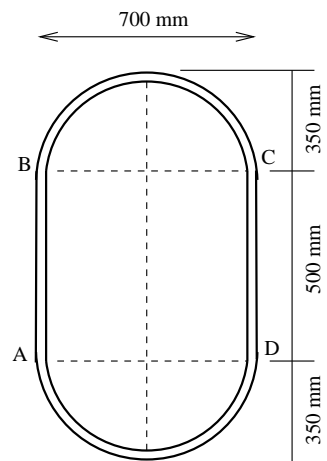


Figura 3.43: Figura do exercício 11

### 3.3 Solicitação por momento fletor

#### 3.3.1 Introdução

Uma barra de eixo reto e cargas transversais está sujeita a momentos fletores e esforços cortantes, geralmente. A barra é designada por **viga** e o efeito do **momento fletor** é a **flexão**.

#### 1. Tipos de Flexão ( de acordo com os esforços simples atuantes)

PURA : somente momento fletor, constante (esforço cortante nulo);

SIMPLES : momento fletor e esforço cortante;

COMPOSTA : momento fletor e esforço normal.

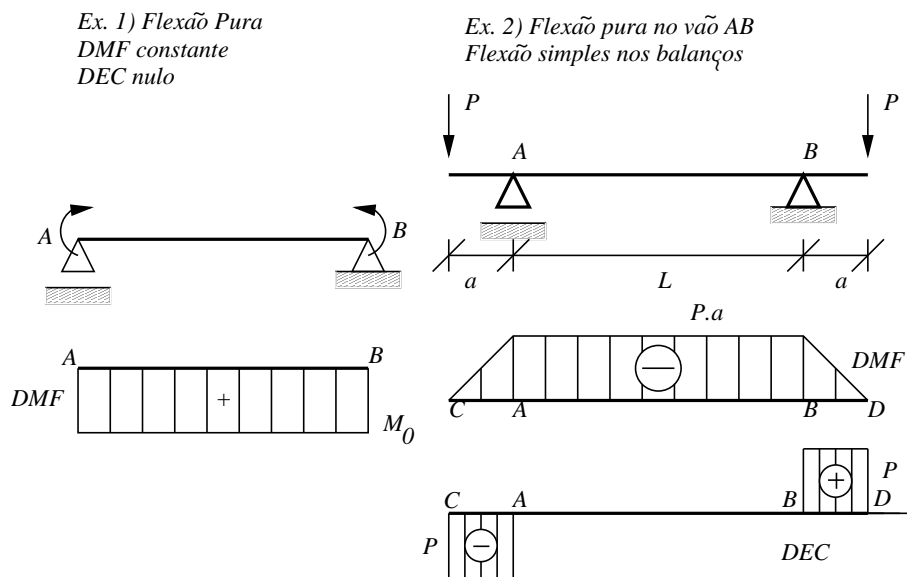


Figura 3.44: Tipos de Flexão

#### 2. Tipos de Flexão (de acordo com os mom. fletores atuantes)

Os eixos locais  $y$  e  $z$  são os eixos principais de inércia da seção.

O eixo de solicitação (ES) é a interseção do plano de solicitação (que contém as cargas e reações) com a seção transversal.

##### 1. Flexão Normal ou Reta:

- ES  $\equiv$  eixo  $-y \rightarrow M_y = 0$  e  $M_f = M_z$  (ex.3 e 4)
- ES  $\equiv$  eixo  $-z \rightarrow M_z = 0$  e  $M_f = M_y$

##### 2. Flexão oblíqua:

ES não coincide com nenhum dos eixos principais de inércia:

$$\vec{M}_f = \vec{M}_y + \vec{M}_z \text{ (ex. 5 e 6)}$$

**Observações:**

1.  $M_f = M$  é normal ao plano de solicitação, portanto  $M \perp ES$
2. Res Mat.I  $\rightarrow$  Flexão Reta, Pura e Simples  
Res Mat.II  $\rightarrow$  Flexão oblíqua e flexão composta

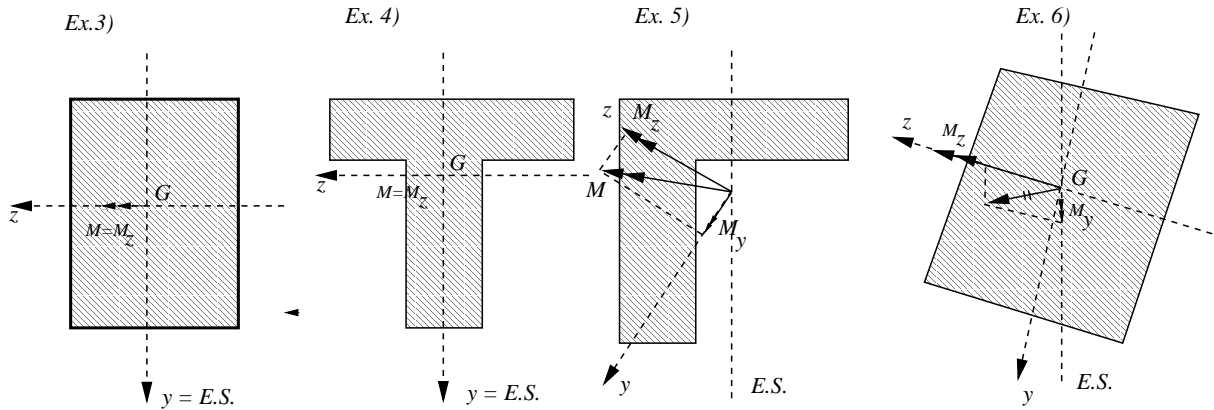


Figura 3.45: Direções de Momentos Fletores e de eixos de solicitações

### 3.3.2 Cálculo das Tensões Normais

1. Flexão Pura e Reta

Para vigas horizontais ou com pequena inclinação, admitindo-se pequenas deformações elásticas e proporcionais, sendo válida portanto a Lei de Hooke:  $\sigma_x = E\epsilon_x$

Seja a viga AB do ex.1 anterior, fazendo  $M_0 = M (M > 0)$

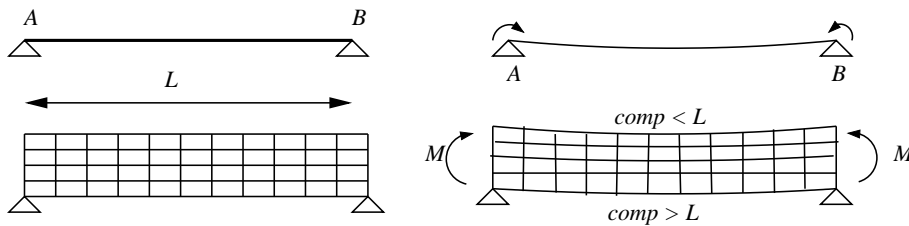


Figura 3.46: Configurações inicial e deformada de uma viga bi-apoiada sob flexão pura.

- Linhas longitudinais (fibras longitudinais ao eixo) assumem o aspecto curvo. O eixo deformado à flexão é a linha elástica .
- Linhas transversais (seções transversais) permanecem retas (planas) e  $\perp$ s ao eixo deformado. Sofrem um rotação em torno do eixo-z local.
- Uma camada de fibras situadas em um plano horizontal na configuração inicial mantém o comprimento L ( $\epsilon_x = 0 \rightarrow \sigma_x = 0$ ). É designada por superfície neutra e sua interseção com a seção transversal é a linha neutra (LN).

$$M > 0 \begin{cases} \text{Fibras superiores à LN são comprimidas / encurtadas} \\ \text{Fibras inferiores à LN são tracionadas / alongadas} \end{cases}$$

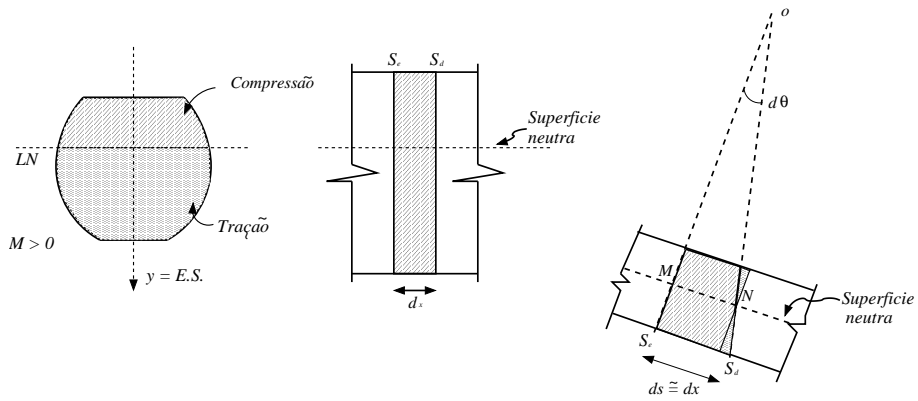


Figura 3.47: Elemento de volume sob flexão

Seja o elemento de volume genérico, limitado pelas seções  $S_e$  e  $S_d$ , de comprimento elementar  $dx$ .

Na configuração deformada,  $d\theta$  é o ângulo entre  $S_e$  e  $S_d$ , o ponto O é o centro de curvatura e  $OM = ON = \rho$  é o raio de curvatura da linha elástica na superfície neutra. A curvatura é:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \simeq \frac{d\theta}{dx}$$

Considerando  $ds \simeq dx$  para vigas horizontais ou de pequena inclinação e para pequenas deformações.

Uma paralela a "S<sub>e</sub>" pelo ponto N mostra (sombreado) os encurtamentos das fibras superiores e os alongamentos das fibras inferiores à superfície neutra. Estas deformações longitudinais são mostradas na fig(3.48b). As figs 3.48(c) e 3.48(d) mostram as correspondentes deformações específicas  $\epsilon_x$  e tensões normais  $\sigma_x$ .

Seja uma camada de fibras genérica, paralela à superfície neutra, de ordenada  $y$  em relação à LN ( $-ds \leq y \leq di$ ).

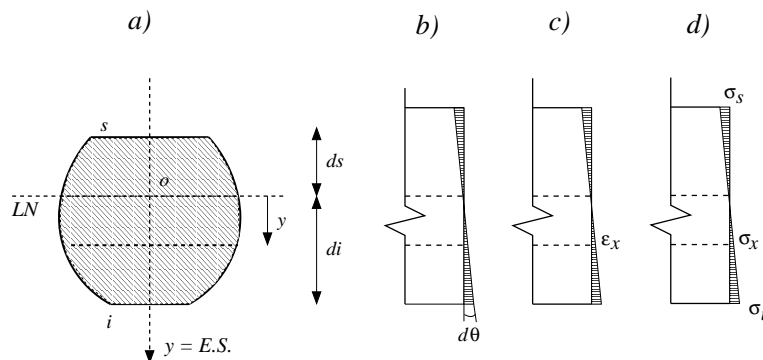


Figura 3.48: Diagramas de deformação longitudinal, específica e tensões

$$\begin{aligned}
 du &= d\theta y \\
 \epsilon_x &= \frac{du}{dx} = \frac{d\theta}{dx} y \\
 \sigma_x &= E\epsilon_x = E \frac{d\theta}{dx} y
 \end{aligned}$$

Funções Diretamente proporcionais a  $y$  (variação linear), sendo  $\sigma_x = K y$ , e  $K = E \frac{d\theta}{dx} = K$ . E para calcular a constante  $K$  e determinar a posição da LN, lembramos da seção 3:

Esforço normal

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA = \int_A K y dA = K \int_A y dA = 0 \\
 \text{para valores arbitrários de } K, &\text{ temos } \int_A y dA = 0
 \end{aligned}$$

A ordenada do baricentro em relação à LN:

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{A} = 0$$

Concluimos que a LN passa pelo baricentro da seção.

Momento fletor  $M_z = \int_A y \sigma_x dA = \int_A y K y dA = K \int_A y^2 dA = M$ ,  
 onde:  $\int_A y^2 dA = I$  (momento de inércia da seção em relação à LN)  
 então:  $K I = M \rightarrow K = M/I \rightarrow$

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \tag{3.77}$$

( $I = I_z = J = J_z \rightarrow$  dimensional  $L^4$ , unidade  $\text{mm}^4$  ou  $\text{cm}^4$ )



Observação:

- O diagrama de tensões da fig3.48(d) é a vista longitudinal do sólido de tensões (fig3.49 para um seção retangular). Nas aplicações, o diagrama de tensões é suficiente para representar a variação das tensões normais na seção transversal.

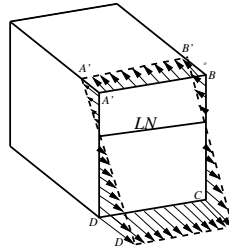


Figura 3.49: Sólido de tensões

- Cálculo das Tensões Extremas (Máximas)

$$y = -ds \rightarrow \sigma_s = \frac{M}{I}(-ds) = -\frac{M}{I/ds}$$

$$y = di \rightarrow \sigma_i = \frac{M}{I}(di) = \frac{M}{I/di}$$

Fazendo  $I/ds = W_s$ ,  $I/di = W_i$  - Módulos de resistência à flexão (dimensional  $L^3$ ),

Obtemos  $\sigma_s = -M/W_s$  e  $\sigma = M/W_i \rightarrow \sigma_{max} = M/W$  em valor absoluto.

$$M > 0 \begin{cases} \sigma_s = \text{Max. Tensão de compressão} \\ \sigma_i = \text{Max. Tensão de tração} \end{cases}$$

$$M < 0 \begin{cases} \sigma_s = \text{Max. Tensão de tração} \\ \sigma_i = \text{Max. Tensão de compressão} \end{cases}$$

## 2. Tensões Normais na Flexão Simples e Reta

São válidas as mesmas propriedades da flexão pura e reta. Como o momento fletor é variável, nas aplicações é necessário analisar 2 seções críticas: momentos fletor máximo positivo(+) e negativo(-). Caso particular: seção simétrica em relação à LN →basta analisar uma seção crítica (momento fletor máximo absoluto).

### 3.3.3 Exercícios

1. A viga representada na fig3.50 tem seção constante, circular com diâmetro 0,25 m. Dados  $L = 1,5$  m;  $a = 0,35$  m e  $P = 120$  kN, calcular  $\sigma_{max}$ . Resposta: 27,38 MPa.

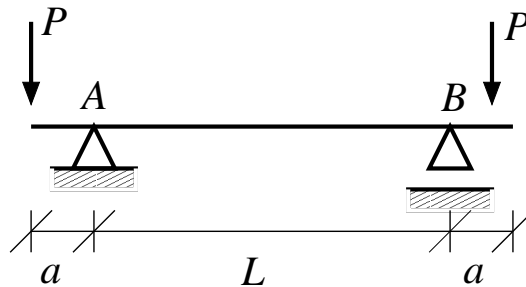


Figura 3.50: Exercício 1

2. A viga representada na fig3.51 tem seção constante, retangular com  $h = 2b$ . Calcular as dimensões  $h$  e  $b$  para as tensões admissíveis 12 MPa à tração e 10 MPa à compressão, de um certa qualidade de madeira. Resposta: mínimo 132 x 264 mm.

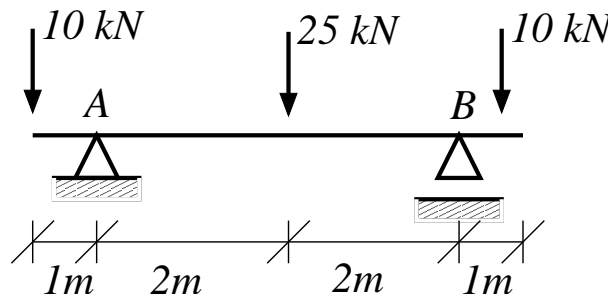


Figura 3.51: Exercício 2

3. Calcular o valor máximo admissível de  $q$  na viga da fig3.52, para tensões admissíveis 140 MPa à tração e 84 MPa à compressão, sendo a seção transversal constante mostrada (dimensões em cm). Resposta: 21,3 kN/m

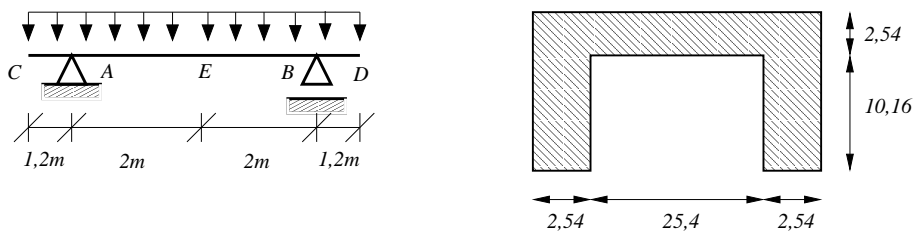


Figura 3.52: Exercício 3

4. A viga da fig3.53 tem seção constante em duplo T assimétrico (mom. de inércia em relação à LN  $7570$  cm<sup>4</sup>), que pode ser colocado na posição 1 ( T ) ou 2 ( L ). Dados  $\bar{\sigma}_t = 150$  MPa e  $\bar{\sigma}_c = 120$  MPa, calcular  $q_{adm}$  na posição mais eficiente (aquela que suporta maior carga). Resposta: 18,55 kN/m na posição 2.
5. Dimensionar um eixo de aço ( $\bar{\sigma} = 120$  MPa,  $E = 210$  GPa ) de seção circular cheia para suportar um momento flexão de 60 kNm. Calcular o ângulo de rotação específica da seção. Resposta: Diâmetro 172 mm; Rotação 0,00665 rd/m.

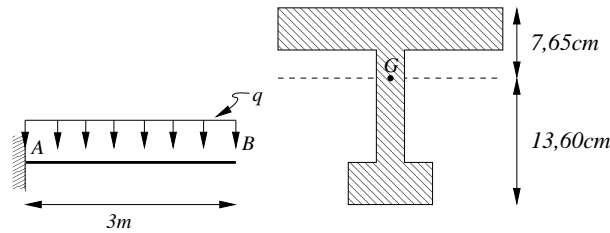


Figura 3.53: Exercício 4

6. Em uma seção anular (coroa circular) a razão entre os diâmetros externo interno é  $D/d = 1,5$ . Pede-se dimensiona-la para suportar um momento fletor de 32 kNm, para uma tensão admissível de 80 MPa. Resposta:  $D = 172$  mm.
7. Uma viga tem momento fletor máximo 18 kNm. Para ama seção transversal constante e retangular  $\mathbf{a \times 2a}$ , vazada por um retângulo  $\mathbf{0,6 a \times a}$  (conservada a simetria), dimensioná-la para uma tensão admissível 10MPa. Resposta:  $a = 143$  mm
8. Calcular as tensões normais extremas da viga abaixo, dado  $P = 7$  kN, representada a seção transversal constante. Resposta: comp. 153,2 MPa nas fibras sup; tração 88,7 nas fibras inf.

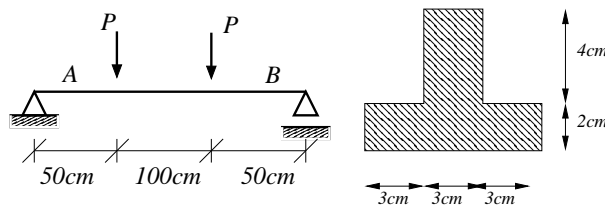


Figura 3.54: Exercício 8

9. Calcular o valor mínimo de  $a$  na seção transversal da viga da fig3.55/ para  $\bar{\sigma}_t = 100$ MPa e  $\bar{\sigma}_c = 60$  MPa. Resposta:  $a = 41$  mm.

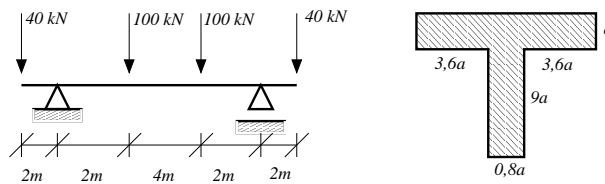


Figura 3.55: Exercício 9

10. A viga abaixo é constituída por duas peças de madeira de seção 300 mm x 100 mm, conforme mostra a figura. Dadas as tensões admissíveis 12 MPa à compressão e 18 MPa à tração, calcular  $P_{adm}$  e representar o diagrama de tensões da seção E. Resposta:  $P = 102 \text{ kN}$ .

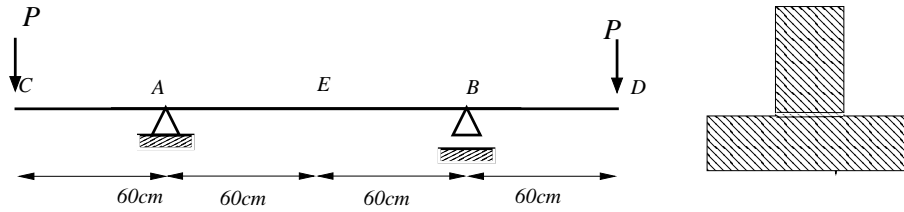


Figura 3.56: Exercício 10

11. Dimensionar a viga abaixo à flexão ( $a=?$ ) e representar o diagrama de tensões da seção C. A viga tem seção constante de ferro fundido com tensões admissível 35 MPa à tração e 140 MPa à compressão. Escolher a mais favorável entre as posições 1 (T) e (L) da seção. Resposta:  $a = 4,2 \text{ cm}$ , posição 2

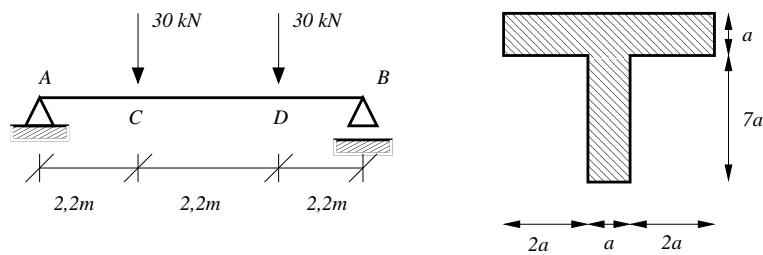


Figura 3.57: Exercício 11

### 3.3.4 Várias formas da seção transversal

#### Seções simétricas ou assimétricas em relação à LN

Com o objetivo de obter maior eficiência (na avaliação) ou maior economia (no dimensionamento) devemos projetar com  $\sigma_{max} = \bar{\sigma}$ , onde  $\sigma_{max}$  é a tensão máxima na seção e  $\bar{\sigma}$  é a tensão máxima admissível(propriedade do material).

Levando-se em conta que

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_i} = \frac{d_s}{d_i}$$

há dois casos a considerar:

1. Se o material é tal que  $\bar{\sigma}_s \neq \bar{\sigma}_i$  então é indicada a forma assimétrica em relação à LN, ficando esta mais próxima da fibra de menor  $\bar{\sigma}$ , sendo ideal  $\frac{d_s}{d_i} = \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_i}$ , pois neste caso podemos projetar  $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$  e  $\sigma_i = \bar{\sigma}_i$  por exemplo, para  $M > 0$  e  $\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = 0,5$ , o ideal é  $\frac{d_s}{d_i} = 0,5$

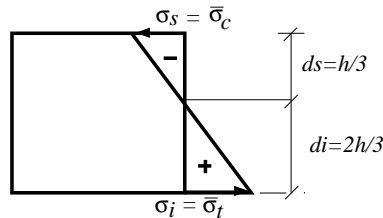


Figura 3.58:

2. Se o material é tal que  $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_t$ , então é indicada a seção simétrica em relação a LN:  $d_s = d_i = h/2$ . O projeto pode contemplar a situação ideal:  $\sigma_{max} = \bar{\sigma}$  (tração ou compressão).

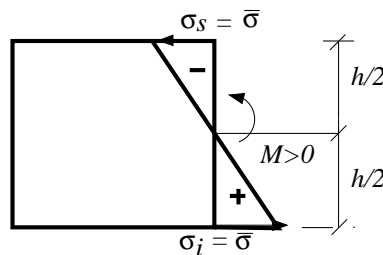


Figura 3.59:

#### Seções simétricas à LN - Seções I

Maior área  $A$  da seção transversal **não** significa maior módulo de resistência a flexão  $W$ , pois este depende da **forma** da seção.

1. Entre duas seções de mesma  $W$ , a mais **econômica** é a de menor  $A$
2. Entre duas seções de mesma  $A$ , a mais **eficiente** é a de maior  $W$

Sejam várias seções simétricas à LN, **com a mesma área  $A$** .

- Retângular  $b \times h$ :  $W = bh^2/6$  e  $A = bh \rightarrow W = Ah/6 = 0,167Ah$ . (seções retangulares de mesma área  $\rightarrow$  maior eficiência = maior  $h$ )

- Circular, diâmetro  $D$ :  $W = \pi D^3/32$  e  $A = \pi D^2/4 \rightarrow W = AD/8 = 0,125AD$ .
- Quadrada, lado  $L$  (mesma área  $L^2 = \pi D^2/4 \rightarrow L = 0,886D$ ):  
 $W = 0,167AL = 0,167 A 0,886D \rightarrow W = 0,148 A D$

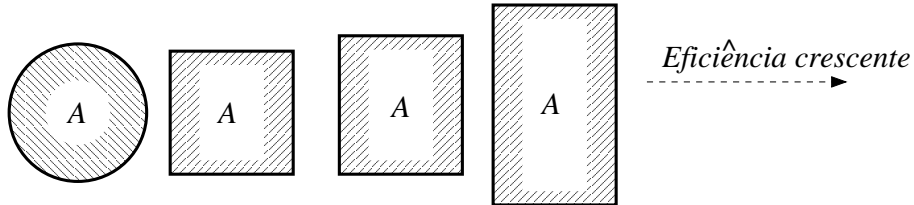


Figura 3.60:

Concluimos que, para obter maior eficiência, devemos dispor a maior massa do material (área de seção) o mais afastado possível da LN.

A situação ideal é mostrada na figura 3.61

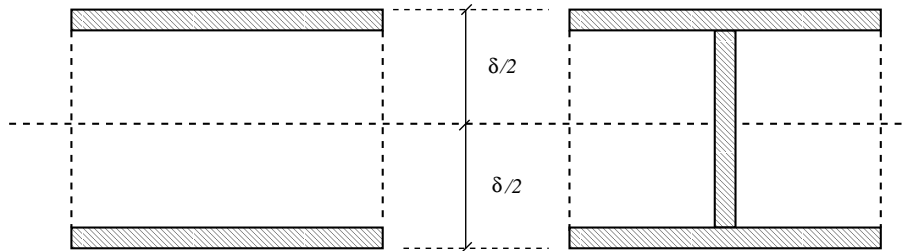


Figura 3.61:

- Perfis I ou S têm altura bem maior que a largura.
- Perfis H ou WF (abas largas) têm largura mais próxima da altura.

Os produtores de perfis fornecem tabelas com as características geométricas (dimensões, área, momento de inércia...) necessárias ao projeto. Na Resistência dos Materiais I vamos usar as tabelas do livro “Resistência dos Materiais” de *Beer e Johnston*, que estão reproduzidas em anexo.

Os perfis são designados pela letra S(perfil I) ou W(perfil H) seguida da altura nominal (mm) e da sua massa em kg por metro (kg/m). Encontram-se em ordem decrescente de altura e, em cada grupo de mesma altura, em ordem decrescente de peso.

### 3.3.5 Exercícios

1. Calcular o valor máximo admissível da carga  $P$ , na viga na figura 3.62 para uma  $\bar{\sigma} = 140\text{Mpa}$ , se a viga é um perfil  $W150 \times 37,1$ . Não desprezar o peso próprio do perfil.

Resposta: 14,88 kN

2. Escolher o perfil I mais econômico para a viga da figura 3.63, para  $\bar{\sigma} = 140\text{Mpa}$

Resposta: S 510  $\times$  97,3

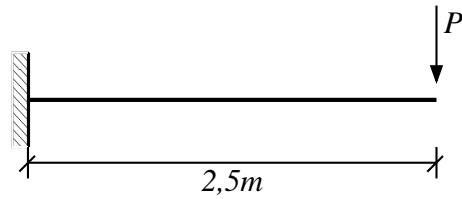


Figura 3.62: Exercício 1

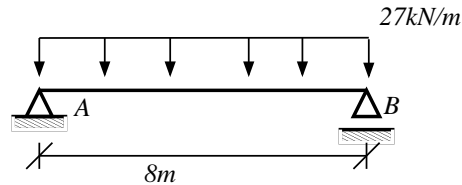


Figura 3.63: Exercício 2

3. Duplicando a carga da viga do exercício 2 ( $q' = 54 \text{ kN/m}$ ) e conservando o perfil adotado, para se obter resistência são soldados duas chapas (mesma  $\bar{\sigma} = 140 \text{ MPa}$ ) sobre as mesas, de espessura do reforço igual a espessura da mesa. Determine a largura das chapas e o trecho da viga em que é necessário usá-las. Desprezar os pesos próprios.

Resposta: largura 121 mm, reforço nos 5,0 m centrais da viga

4. A viga da figura 3.64 é contituida de um perfil W 200  $\times$  86, de aço com  $\bar{\sigma} = 130 \text{ MPa}$ ). Calcular o valor máximo admissível de P desprezando o peso próprio.

Resposta: 59,57 kN/m

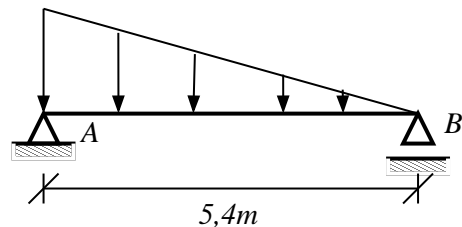


Figura 3.64: Exercício 4

5. Calcular as tensões extremas na viga da figura 3.65, indicando a seção onde ocorrem. A viga é constituída por um perfil W130  $\times$  28, 1. Considerar o efeito do peso próprio, além da sobrecarga.

Resposta:  $\pm 66,1 \text{ MPa}$

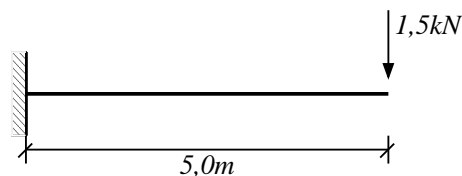


Figura 3.65: Exercício 5

6. Idem para a viga da figura 3.66 constituída por um perfil  $W150x37, 1$   
 Resposta:  $\pm 10,77 \text{ MPa}$

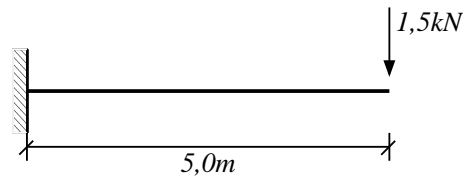


Figura 3.66: Exercício 6

7. Escolher o perfil mais econômico (I ou W, conforme indicado) para cada uma da figura 3.67, desconsiderando o efeito do peso próprio, além da sobrecarga representada. A tensão admissível é dada.

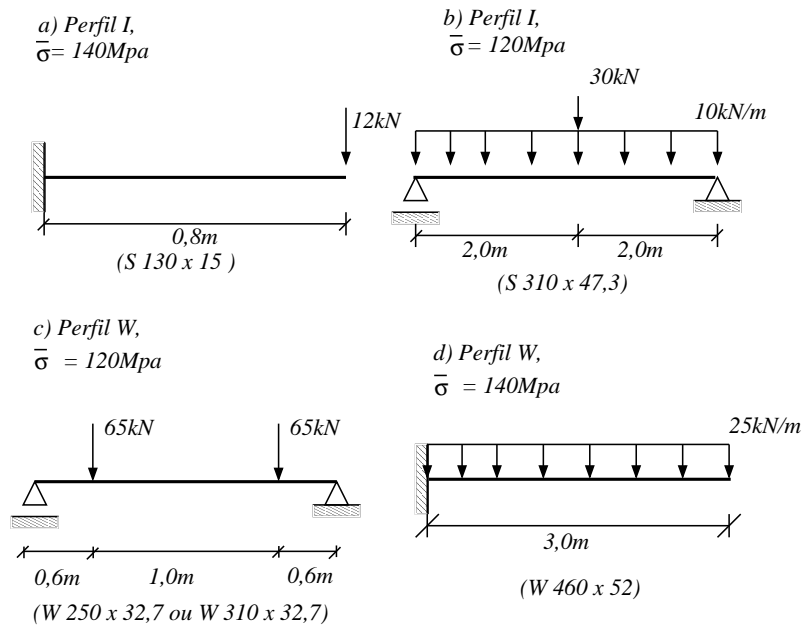


Figura 3.67: Exercício 7

8. Para uma tensão admissível de  $150 \text{ MPa}$ , calcular o valor máximo admissível de  $q$  na viga da figura 3.68, constituída por duas chapas de aço,  $200 \text{ mm}$  de largura e  $12 \text{ mm}$  de espessura, soldadas a dois perfis I ( $S 180 \times 30$ ), conforme indicado na figura 3.68. Resposta:  $q = 27,05 \text{ kN/m}$

### 3.3.6 Vigas de dois materiais

São vigas de madeira reforçadas por cintas metálicas, vigas de concreto reforçadas com barras de aço (concreto armado), vigas-sanduiche, etc, genericamente designadas por vigas armadas.

Estas vigas são constituídas por elementos longitudinais (camadas) de materiais diferentes, seguramente aderentes de modo a ter necessária resistência às tensões tangenciais longitudinais

São admitidas as mesmas hipóteses da flexão em vigas de um só material. Portanto, para um momento fletor  $M_z = M$ , as seções permanecem planas e normais ao eixo e a



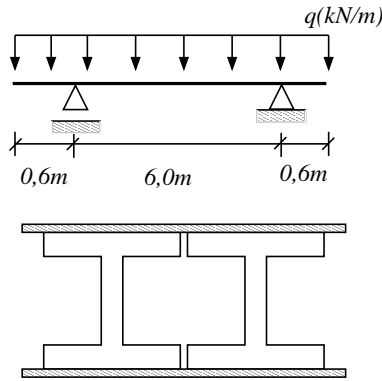


Figura 3.68: Exercício 8

deformaç ao específica em uma camada de ordenada  $y$  em relação a LN (linha neutra) é  $\epsilon_x = ky$  ( $k$  constante)

A figura 3.69 representam a seção transversal, o diagrama de deformações específicas e o diagrama de tensões de uma viga constituída de dois materiais com áreas de seção  $A_1$  e  $A_2$  e módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente. Nestas figuras admitimos  $E_1 < E_2$  e a LN situada acima da superfície de contato entre os materiais, mas as conclusões são genéricas.

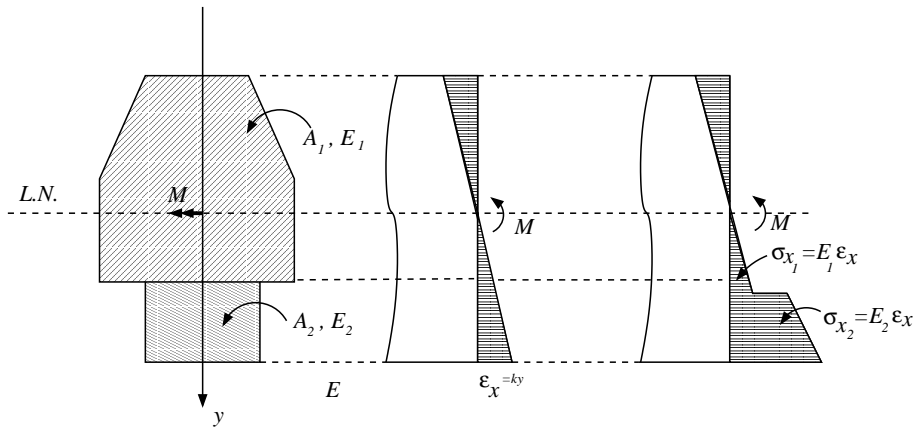


Figura 3.69: Viga de dois materiais

Na camada de contato entre os dois materiais há uma descontinuidade no diagrama de tensões, com valores  $\sigma_{x_1} = E_1\epsilon_x$  para o material 1 e  $\sigma_{x_2} = E_2\epsilon_x$  para o material 2.

A posição da LN e o valor da constante  $k$  serão determinados pelas mesmas equações do item 3.3.4 isto é:

- esforço normal

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0$$

- momento fletor

$$M_z = \int_A y\sigma_x dA = M$$

Sejam  $I_1$  e  $I_2$  os momentos de inércia em relação à LN das áreas  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente. Seja a razão entre os módulos de elasticidade  $n = E_2/E_1$ . Obtém-se:

$$N = \int_{A_1} \sigma_{x_1} dA_1 + \int_{A_2} \sigma_{x_2} dA_2 = \int_{A_1} E_1\epsilon_x dA_1 + \int_{A_2} E_2\epsilon_{x_2} dA_2 = 0 \quad (3.78)$$

Como  $E_2 = nE_1$  e  $\epsilon_x = ky$  tem-se

$$N = kE_1 \left[ \int_{A_1} y dA_1 + \int_{A_2} ny dA_2 \right] = 0$$

e a equação 3.78 fornece a expressão que define a posição da LN:

$$\underbrace{\int_{A_1} y dA_1 + \int_{A_2} y(ndA_2)}_{\text{define a posição da LN}} = 0 \quad (3.79)$$

Desenvolvendo a equação de  $M$ :

$$M_z = M = \int_{A_1} y \sigma_{x_1} dA_1 + \int_{A_2} y \sigma_{x_2} dA_2 = \int_{A_1} y E_1 \epsilon_x dA_1 + \int_{A_2} y E_2 \epsilon_x dA_2 \quad (3.80)$$

Como  $E_2 = nE_1$  e  $\epsilon_x = ky$  tem-se então:

$$M = kE_1 \left[ \underbrace{\int_{A_1} y^2 dA_1}_{I_1} + n \underbrace{\int_{A_2} y^2 dA_2}_{I_2} \right]$$

$$M = kE_1(I_1 + nI_2) \longrightarrow k = \frac{M}{E_1(I_1 + nI_2)}$$

A maneira mais prática de usar estas equações é o chamado “**método da seção equivalente**” (ou seção homogeneizada): uma seção constituída somente de material 1, obtida multiplicando-se por  $n$  as dimensões paralelas à LN de cada elemento da área  $A_2$ , conservando-se as ordenadas destes elementos (ver figura 3.70).

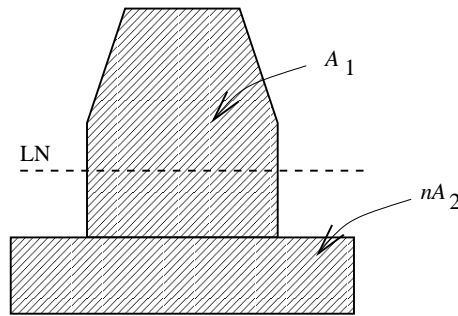


Figura 3.70: Método da seção equivalente

A LN, passando pelo baricentro da seção equivalente, é a mesma da seção real, uma vez que:

$$\int_A y dA = \int_{A_1} y dA_1 + \int_{A_2} y(ndA_2) = 0$$

O momento de inércia da seção equivalente em relação à LN é  $I = I_1 + nI_2$ . Então o valor da constante  $k$  é:

$$k = \frac{M}{E_1 I}$$

e as tensões na seção real são:

- No material 1:

$$\sigma_{x_1} = E_1 ky = \frac{M}{I} y \quad (3.81)$$

- No material 2:

$$\sigma_{x_1} = E_2 ky = E_2 \frac{M}{E_1 I} y = n \frac{M}{I} y \quad (3.82)$$

### Observações

1. Nas aplicações, pode ser adotada a alternativa de um seção equivalente constituída somente do material 2, de maior módulo de elasticidade ( $n = \frac{E_2}{E_1} \rightarrow n > 1$ )

Neste caso, a seção equivalente é obtida dividindo-se por  $n$  as dimensões da área  $A_1$  paralelas à LN.

A LN da seção real é a mesma da seção equivalente sendo as tensões:  $\sigma_x = \frac{M}{I} y$  na seção equivalente e  $\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x}{n}$ ,  $\sigma_{x_2} = \sigma_x$  na seção real.

2. Nas aplicações, além de resolver cada problema, represente o diagrama de tensões em cada um deles.
3. Para as aplicações 7 a 10 (seções de concreto armado), vamos admitir que o concreto não resiste à tração (somente tensões de compressão no concreto) e que o esforço normal de tração em cada barra de aço é uma força centrada no seu baricentro.

O diagrama de tensões será bem diferente do usual (figura 3.71). Veja orientação na aula ou nos livros indicados.

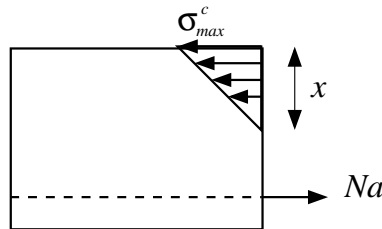


Figura 3.71: Diagrama de tensões para o concreto

### 3.3.7 Exercícios

1. A figura 3.72 representa a seção transversal (dimensões em mm) de uma viga de madeira reforçada com uma lamina de aço. Os módulos de elasticidade são  $E_m = 10$  GPa e  $E_a = 200$  GPa. Se esta viga for submetida a um momento fletor de 30 kNm em relação ao eixo horizontal, quais as tensões máximas no aço e na madeira?  
(Resposta: 97,09 MPa e 11,5 MPa)

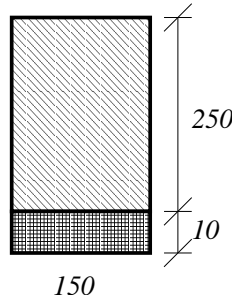


Figura 3.72: Figura do exercício 1

2. Uma Viga de madeira de 100 mm de largura por 200 mm de altura tem uma placa de liga de alumínio de 90 mm por 15 mm de altura presa a sua face inferior. Determine o momento resistente máximo admissível para a viga, sendo as tensões admissíveis 8 MPa e 100MPa e os módulos de elasticidades 8,75MPa e 70 GPa, respectivamente da madeira e do alumínio.  
(Resposta: 8,59 kNm)
3. Calcular as tensões máximas na madeira (núcleo) e no alumínio (chapas laterais) da viga da figura 3.73, dado  $P = 10$  kN, dimensões da seção em mm, módulos de elasticidades.  $E_m = 7$  GPa e  $E_a = 70$  GPa.  
(Resposta: 8,82 MPa e 88,2MPa)

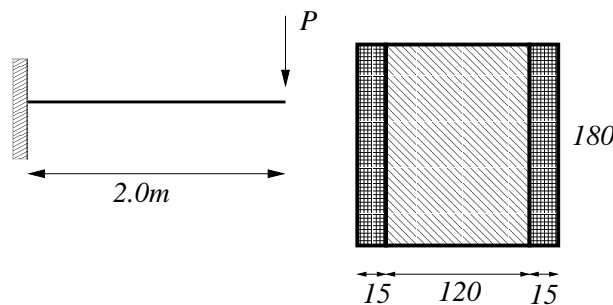


Figura 3.73: Figura do Exercício 3

4. Uma viga de madeira de 100 mm de largura por 300 mm de altura e 5,0 m de comprimento é armada com placas de aço de 75 mm de largura por 15 mm de altura nas faces superior e inferior. A viga é simplesmente apoiada (bi-apoiada) e suporta uma carga uniforme distribuída de 20 kN/m em todo o seu comprimento. Determinar a tensão longitudinal máxima na madeira e no aço, sendo seus módulos de elasticidade iguais a 10 GPa e 210 GPa, respectivamente.  
(Resposta: 6,71 MPa e 154,9 MPa)

5. Duas chapas de latão são firmemente coladas a uma barra de alumínio, como indica a figura 3.74 (dimensões em mm). Dados  $E_{al} = 70$  GPa,  $E_{la} = 105$  GPa,  $\bar{\sigma}_{al} = 100$  MPa e  $\bar{\sigma}_{la} = 150$  MPa, calcular o momento máximo quando a peça composta é flexionada em torno de um eixo

- (a) horizontal  
(b) vertical

(Resposta: 1,162 kNm e 720 Nm)

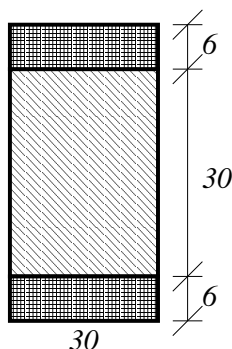


Figura 3.74: Figura do Exercício 5

6. Calcular o momento fletor admissível em relação ao eixo neutro horizontal para uma viga composta de madeira de aço, com seção transversal:
- (a) de madeira 200 mm de largura por 300 mm de altura, reforçada por uma chapa de aço superior de 50 mm de largura por 10 mm de altura e outra inferior de 150 mm de largura por 10 mm de altura
- (b) de madeira 200 mm de largura por 300 mm de altura, reforçada por chapas de aço laterais de 10 mm de largura por 300 mm de altura.

Dados  $E_m = 8.3$  GPa,  $E_a = 200$  GPa,  $\bar{\sigma}_m = 8.3$  MPa,  $\bar{\sigma}_a = 140$  MPa

Resposta: (a)  $M = 44,18$  kNm; (b)  $M = 59,43$  kNm

7. Determinar as tensões máximas no aço e no concreto em uma viga de concreto armado sujeita a um momento fletor positivo de 70 kNm. A figura 3.75 que representa a seção transversal, as dimensões estão indicadas em mm. Cada uma das barras de aço tem  $700\text{mm}^2$  de área. Admitir  $E_a/E_c = n = 15$ .

Resposta:  $\sigma_a = 117$  MPa e  $\sigma_c = 6.02$  MPa

8. Uma viga bi-apoiada de concreto armado suporta uma carga uniformemente distribuída de 25kN/m em um vão de 5m. A viga tem seção circular de 300mm de largura por 550mm de altura e a armadura de aço tem área total de  $1250\text{mm}^2$ , com os centros das barras colocados a 70mm da face inferior da viga. Calcular as tensões máximas no concreto e média no aço, dados  $E_c = 20$ Gpa e  $E_a = 210$ Gpa.

Admitir que o concreto não resiste à tração

(Resposta: 7,4Mpa e 147,2Mpa)

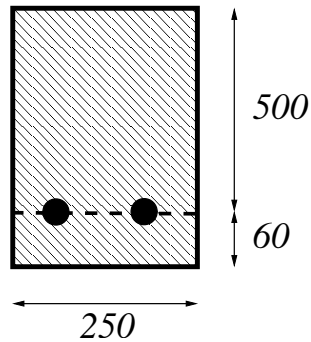


Figura 3.75: Figura do Exercício 7

9. Uma viga de concreto armado tem seção retangular  $200 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ . A armadura é constituída por três barras de aço de  $22 \text{ mm}$  de diâmetro, cujos centros estão a  $50 \text{ mm}$  da face inferior da viga. Calcular o momento fletor positivo máximo que a viga pode suportar, dados:  $E_c = 21 \text{ GPa}$ ,  $E_a = 210 \text{ GPa}$ ,  $\bar{\sigma}_c = 9.3 \text{ MPa}$ ,  $\bar{\sigma}_a = 138 \text{ MPa}$  (Resposta:  $42,03 \text{ kNm}$ )
10. A figura 3.76 representa um trecho de uma laje de concreto armado, com armadura longitudinal de barras de aço de  $16 \text{ mm}$  de diâmetro a cada  $150 \text{ mm}$ . Calcular a tensão máxima no concreto e a tensão média no aço para um momento fletor positivo de  $4 \text{ kNm}$  a cada  $300 \text{ mm}$  de largura da laje. Dados:  $E_c = 21 \text{ GPa}$ ,  $E_a = 210 \text{ GPa}$ , (Resposta:  $7,65 \text{ MPa}$  e  $114,8 \text{ MPa}$ )

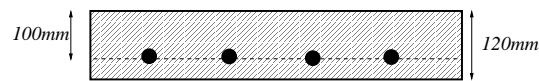


Figura 3.76: Figura do Exercício 10

11. Uma laje de concreto com  $150 \text{ mm}$  de espessura é reforçada longitudinalmente com barras de aço de  $25 \text{ mm}$  de diâmetro a cada  $80 \text{ mm}$  de largura, cujos centros estão a  $10 \text{ mm}$  da face inferior da laje. Determinar o momento fletor máximo admissível por metro da laje.  
Adotar  $n = 12$  e tensões admissíveis  $150 \text{ MPa}$  para o aço e  $8 \text{ MPa}$  para o concreto. (Resposta:  $37,1 \text{ kNm/m}$ )

### 3.3.8 Flexão Inelástica

Referência a **R.C. HIBBELER**. Resistência dos Materiais. 5º Edição

As equações para determinar a tensão normal provocada pela flexão, desenvolvidas anteriormente, são válidas apenas se o material comporta-se de maneira linear-elástica. Se o momento aplicado provocar escoamento do material, deve-se então usar uma análise plástica para determinar a distribuição de tensão. No entanto, as três condições para flexão de elementos retos, (exemplo: vigas, colunas), tanto no caso elástico como no plástico, devem ser satisfeitas.

1. *Distribuição da Deformação Normal Linear -  $\epsilon_x$* . Com base em condições geométricas, mostramos na seção anterior que as deformações normais que se desenvolvem no material variam sempre linearmente, de zero, no eixo neutro da seção transversal, até o máximo no ponto mais afastado deste eixo neutro.
2. *O Esforço Normal é Nulo*. Como somente o momento interno resultante atua sobre a seção transversal, a força resultante provocada pela distribuição de tensão deve ser nula. E, uma vez que  $\sigma_x$  cria uma força sobre a área  $dA$  de  $dF = \sigma_x dA$  (figura 3.77), para toda área da seção transversal  $A$  temos:

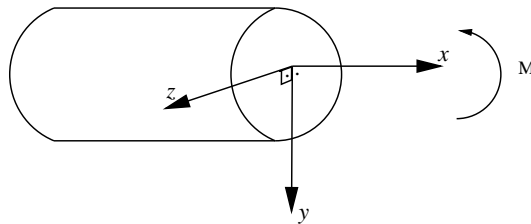


Figura 3.77:

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (3.83)$$

A equação 3.83 nos permite obter a localização do eixo neutro.

3. *Momento Resultante*. O momento resultante na seção deve equivaler ao momento provocado pela distribuição de tensão em torno do eixo neutro. Como o momento da força  $dF_x = \sigma_x dA$  em torno do eixo neutro é  $dM_z = y(\sigma_x dA)$  o somatório dos resultados em toda a seção transversal será:

$$M_z = \int_A y \sigma dA \quad (3.84)$$

Essas condições de geometria e carregamento serão usadas agora para mostrar como determinar a distribuição de tensão em uma viga submetida a um momento interno resultante que provoca escoamento do material. Suporemos, ao longo da discursão, que o material tem o mesmo diagrama tensão-deformação tanto sob tração como sob compressão. Para simplificar, começaremos considerando que a viga tenha área de seção transversal com dois eixos de simetria; nesse caso, um retângulo de altura  $h$  e largura  $b$ , como o mostrado na figura 3.78. Serão considerados três casos de carregamento que têm interesse especial. São eles: *Momento Elástico Máximo*; *Momento Plástico* e *Momento Resistente*.

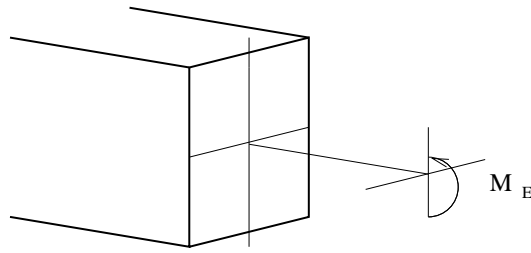


Figura 3.78:

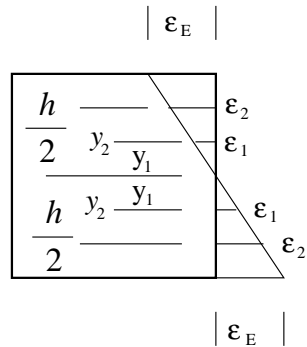


Figura 3.79: Diagrama de deformação

### Momento Elástico Máximo.

Suponhamos que o momento aplicado  $M_z = M_E$  seja suficiente apenas para produzir deformações de escoamento nas fibras superiores e inferiores da viga, conforme mostra a figura 3.79. Como a distribuição de deformação é linear, podemos determinar a distribuição de tensão correspondente usando o diagrama tensão-deformação (figura 3.80). Vemos aqui que a deformação de escoamento  $\epsilon_E$  causa o limite de escoamento  $\sigma_E$ , enquanto as deformações intermediárias  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  provocam as tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente. Quando essas tensões, e outras como elas, têm seus gráficos montados nos pontos  $y = h/2$ ,  $y = y_1$ ,  $y = y_2$ , etc., tem-se a distribuição de tensão da figura 3.81 ou 3.82. Evidentemente, a linearidade de tensão é consequência da Lei de Hooke.

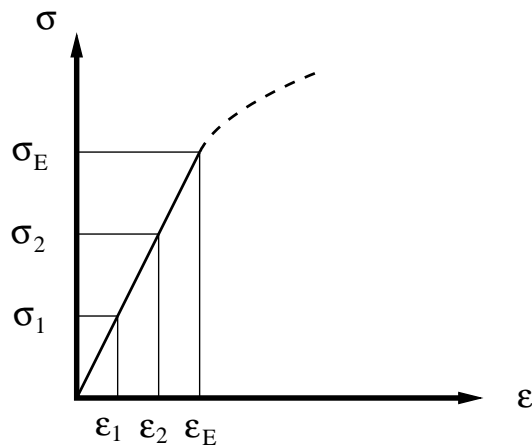


Figura 3.80: Diagrama tensão-deformação

Agora que a distribuição de tensão foi estabelecida, podemos verificar se a equação 3.83 foi satisfeita. Para isso, calculemos primeiro a força resultante de cada uma das duas partes da distribuição de tensão (figura 3.82). Geometricamente, isso equivale a



calcular os volumes de dois blocos triangulares. Como mostrado, a seção transversal superior do elemento está submetida à compressão, enquanto a seção transversal inferior está submetida à tração.

Temos:

$$T = C = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} \sigma_E \right) b = \frac{1}{4} bh \sigma_E \quad (3.85)$$

Como  $T$  é igual mas oposta a  $C$ , a equação 3.83 é satisfeita e, de fato, o eixo neutro passa através do centróide da área da seção transversal.

O momento elástico máximo  $M_E$  é determinado pela equação 3.84, que o declara equivalente ao momento da tensão de distribuição em torno de um eixo neutro. Para aplicar essa equação geometricamente, temos de determinar os momentos criados por  $T$  e  $C$  em torno do eixo neutro (figura 3.82). Como cada força atua através do centróide do volume do seu bloco de tensão triangular associado, temos:

$$\begin{aligned} M_E &= C \left( \frac{2}{3} \right) \frac{h}{2} + T \left( \frac{2}{3} \right) \frac{h}{2} \\ M_E &= 2 \left( \frac{1}{4} \right) bh \sigma_E \left( \frac{2}{3} \right) \frac{h}{2} \\ M_E &= \frac{1}{6} bh^2 \sigma_E \end{aligned} \quad (3.86)$$

Naturalmente, esse mesmo resultado pode ser obtido de maneira mais direta pela fórmula da flexão, ou seja,  $\sigma_E = M_E(h/2)/[bh^3/12]$ , ou  $M_E = bh^2\sigma_E/6$

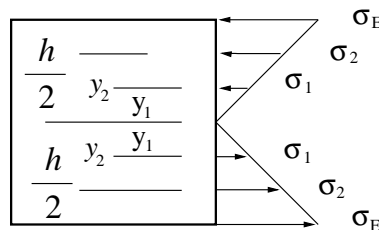


Figura 3.81: Diagrama de tensão

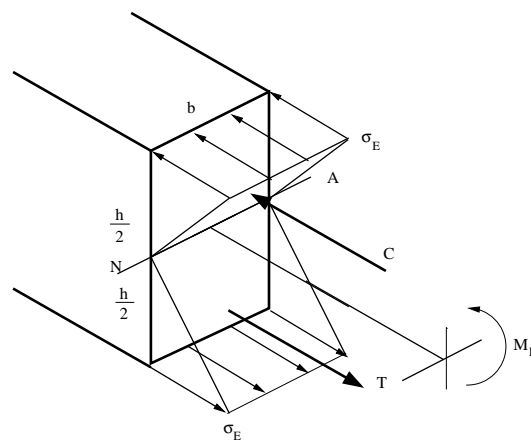


Figura 3.82:

### Momento Plástico

Alguns materiais, tais como aço, tendem a exibir comportamento elástico perfeitamente plástico quando a tensão no material exceder  $\sigma_E$ . Consideraremos, por exemplo, o elemento da figura 3.83. Se o momento interno  $M > M_E$ , o material começa a escoar nas partes superior e inferior da viga, o que causa uma redistribuição de tensão sobre a seção transversal até que o momento interno  $M$  de equilíbrio seja desenvolvido. Se a distribuição da deformação normal assim produzida for como a mostrada na figura 3.79, a distribuição de tensão normal correspondente será determinada pelo diagrama tensão-deformação da mesma maneira que no caso elástico. Usando esse diagrama para material mostrado na figura 3.84, temos que as deformações  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_E$ ,  $\epsilon_2$  correspondem, respectivamente, às tensões  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_E$ ,  $\sigma_E$  (essas e outras tensões são mostradas na figura 3.85 ou na 3.86). Nesse caso, os sólido de tensões de esforços de compressão e tração são parte retangulares e parte triangulares, observa-se na figura 3.86:

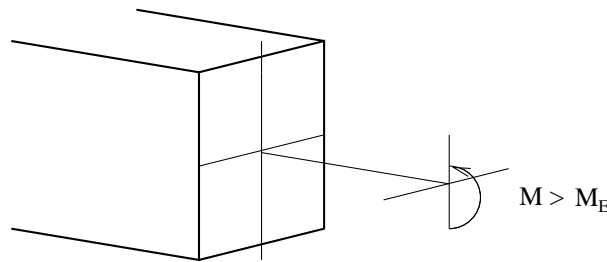


Figura 3.83:

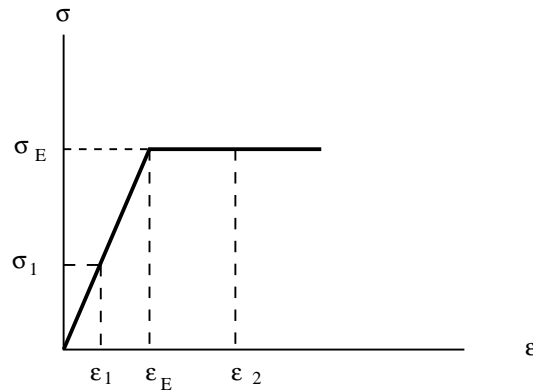


Figura 3.84:

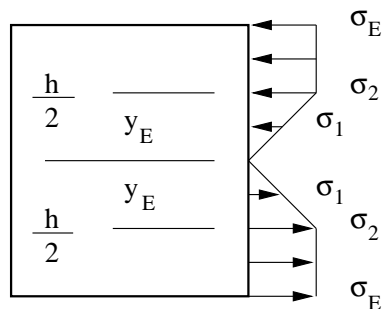


Figura 3.85: Diagrama de tensão

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2}y_E\sigma_E b \quad (3.87)$$

$$T_2 = C_2 = \left(\frac{h}{2} - y_E\right)\sigma_E b \quad (3.88)$$

Devido à simetria, a equação 3.83 é satisfeita e o eixo neutro passa através do centróide da seção transversal como mostrado. O momento aplicado  $M$  pode ser relacionado ao limite de escoamento  $\sigma_E$  por meio da equação 3.84. Pela figura 3.86, requer-se que:

$$\begin{aligned} M &= T_1 \left(\frac{2}{3}y_E\right) + C_1 \left(\frac{2}{3}y_E\right) + T_2 \left[y_E + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\right] + C_2 \left[y_E + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\right] \\ M &= 2\left(\frac{1}{2}y_E\sigma_E b\right)\left(\frac{2}{3}y_E\right) + 2\left[\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\sigma_E b\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y_E\right)\right] \\ M &= \frac{1}{4}b.h^2\sigma_E\left(1 - \frac{4}{3}\frac{y_E^2}{h^2}\right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Ou, usando a equação 3.86:

$$M = \frac{3}{2}M_E\left(1 - \frac{4}{3}\frac{y_E^2}{h^2}\right) \quad (3.90)$$

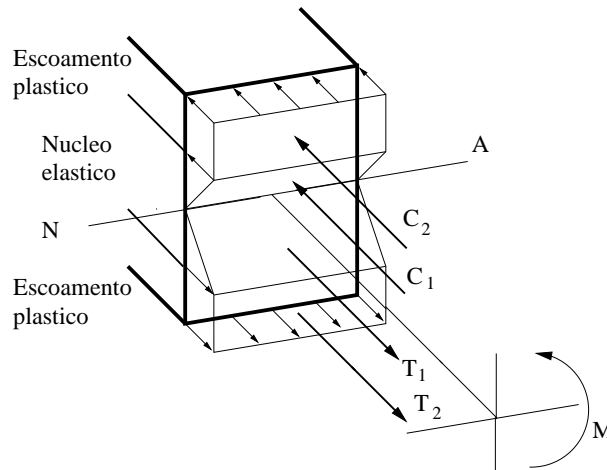


Figura 3.86:

A análise da figura 3.86 revela que  $M$  produz duas zonas de escoamento plástico e um núcleo elástico no elemento. A fronteira entre eles está a uma distância  $\pm y_E$  do eixo neutro. À medida que  $M$  cresce em intensidade,  $y_E$  tende a zero. Isso tornaria o material inteiramente plástico, caso em que a distribuição de tensão teria a aparência mostrada na figura 3.87. Pela equação 3.90 com  $y_E = 0$ , ou determinando os momentos dos sólidos de tensão em torno do eixo neutro, podemos escrever o valor limitante como:

$$M_P = \frac{1}{4}.b.h^2\sigma_E \quad (3.91)$$

Usando a equação 3.86, temos:

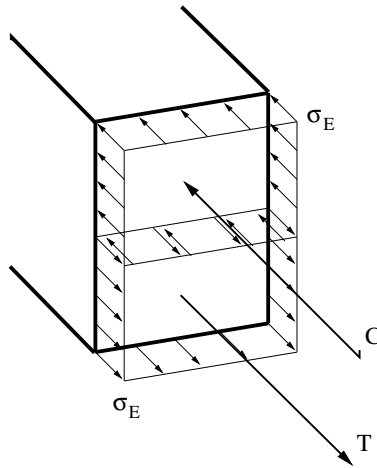


Figura 3.87: Momento plástico

$$M_P = \frac{3}{2}M_E \quad (3.92)$$

Esse momento é denominado momento plástico. Seu valor é único apenas para a seção retangular mostrada na figura 3.87, visto que a análise depende da geometria da seção transversal.

As vigas usadas em estruturas metálicas às vezes são projetadas para resistir a um momento plástico. Nesse caso, os códigos em geral relacionam uma propriedade de projeto da viga chamada fator forma. O fator forma é definido como a relação

$$k = \frac{M_P}{M_E} \quad (3.93)$$

Esse valor especifica a quantidade adicional de momento que uma viga pode suportar além de seu momento elástico máximo. Por exemplo: pela equação 3.92, uma viga de seção transversal retangular tem fator  $k = 1,5$ . Podemos, portanto, concluir que a seção suportará 50% mais momento fletor além de seu momento elástico máximo quando se tornará totalmente plástica.

### Momento Resistente.

Consideremos o caso mais geral de uma viga com seção transversal simétrica apenas em relação ao eixo vertical, na qual o momento é aplicado em torno do eixo horizontal. Supondo-se que o material apresenta endurecimento por deformação (encruamento) e que seus diagramas tensão-deformação de tração e compressão sejam diferentes (figura 3.88).

Se o momento  $M$  produz escoamento da viga, o difícil será determinar a localização do eixo neutro e a deformação máxima produzida na viga. Isso porque a seção transversal é assimétrica em torno do eixo horizontal e o comportamento tensão-deformação do material é assimétrico na tração e na compressão. Para resolver o problema, usa-se um método de tentativa e erro que requer os seguintes passos:

1. Para um dado momento  $M$ , supor a localização do eixo neutro e o declive da distribuição de deformação 'linear' (figura 3.89 - seções planas).
2. Estabelecer graficamente a distribuição de tensão na seção transversal do elemento, usando a curva  $\sigma$ - $\epsilon$  para representar os valores da tensão correspondente aos valores

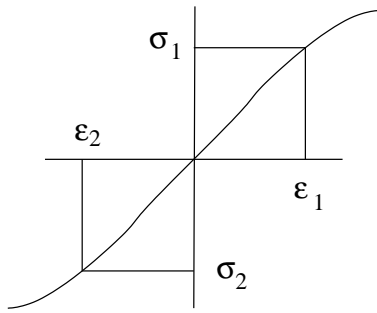


Figura 3.88: Momento plástico

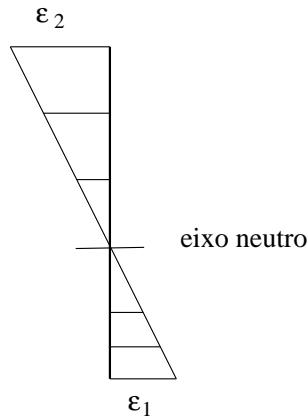


Figura 3.89: Diagrama de deformação

da deformação. A distribuição de tensão resultante (figura 3.90) terá a mesma forma da curva  $\sigma-\epsilon$ .

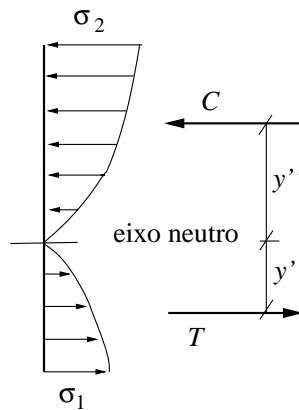


Figura 3.90: Diagrama de tensão

3. Determinar os volumes compreendidos pelos sólidos de tensão de tração e compressão (Como aproximação, isso pode exigir a divisão de cada sólido em regiões compostas). A equação 3.83 exige que os volumes dos sólidos sejam iguais, uma vez que representam a força de tração resultante  $T$  e a força de compressão resultante  $C$  na seção (figura 3.87). Se tais forças forem desiguais deve ser feito um ajuste da localização do eixo neutro (ponto de deformação nula) e o processo repetido até que a equação 3.83 seja satisfeita ( $T = C$ ).
4. Uma vez que  $T = C$ , os momentos produzidos por  $T$  e  $C$  podem ser calculados em

torno do eixo neutro. Nesse caso os braços de momento de  $T$  e  $C$  são medidos do eixo neutro para os centróides dos volumes definidos pelas distribuições de tensão (figura 3.87). A equação 3.84 exige que  $M = Ty' + Cy''$ . Se ela não for satisfeita, o declive da distribuição de deformação deve ser ajustado e os cálculos de  $T$  e  $C$  e do momento repetidos até que se obtenha concordância aproximada.

Como era de esperar, esse processo de cálculo é cansativo. Felizmente não acontece com muita frequência na prática da engenharia pois a maioria das vigas é simétrica em relação a dois eixos e feita de materiais que, supõe-se, têm diagramas de tensão-deformação de tração e compressão similares. Quando isso ocorre, o eixo neutro passa através do centróide da seção transversal e o processo para relacionar a distribuição de tensão ao momento resultante é, portanto, simplificado.

### Pontos Importantes

- A *distribuição de deformação normal* ( $\epsilon_x$ ) na seção transversal de uma viga baseia-se somente em considerações geométricas e sabe-se que é sempre linear, independentemente da carga aplicada. A distribuição de tensão normal, no entanto, deve ser determinada pelo comportamento do material ou pelo diagrama tensão-deformação, uma vez estabelecida a distribuição de deformação.

- A *localização do eixo neutro* é determinada pela condição de que a força resultante normal na seção transversal seja nula.

- O momento interno resultante sobre a seção transversal deve ser igual ao momento da distribuição de tensão em torno do eixo neutro.

- O comportamento perfeitamente plástico supõe que a distribuição de tensão normal é constante sobre a seção transversal e, assim, a viga continua a fletir-se mesmo que o momento não aumente. Esse momento é chamado de *momento plástico*.

### Exemplos

1. A viga em duplo T tem as dimensões mostradas na figura 3.91. Supondo que seja feita de material elástico perfeitamente plástico com limite de escoamento de tração e compressão  $\sigma_E = 248,2$  MPa, determine o fator forma da viga.

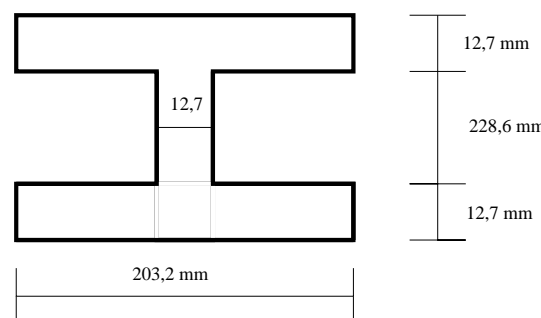


Figura 3.91:

### Solução:

A fim de determinar o fator forma, primeiro é necessário calcular o momento elástico máximo  $M_E$  e o momento plástico  $M_P$ .

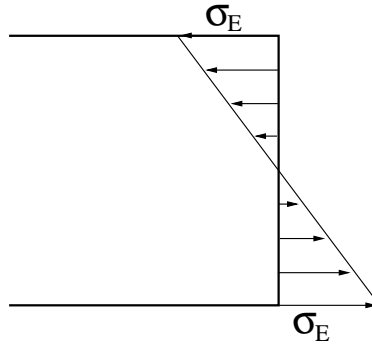


Figura 3.92:

*Momento Elástico Máximo.* A distribuição de tensão normal do momento elástico máximo é mostrada na figura 3.92.

O momento de inércia em torno do eixo neutro é:

$$I_z = \left[ \frac{1}{12} (12,7) (228,6)^3 \right] + 2 \left[ \frac{1}{12} (203,2) (12,7)^3 + (203,2) (12,7) (114,3)^2 \right]$$

$$I_z = 87,84 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Aplicando a fórmula da flexão, temos:

$$\sigma_E = \frac{M_E y}{I_z}$$

$$248,2 = \frac{M_E(127)}{87,84 \times 10^6}$$

$$M_E = 171,67 \text{ kN}$$

*Momento Plástico.* O momento plástico provoca escoamento do aço em toda a seção transversal da viga, de modo que a distribuição de tensão normal fica com a aparência mostrada na figura 3.93. Devido à simetria da área da seção transversal e como os diagramas tensão-deformação de tração e compressão são os mesmos, o eixo neutro passa pelo centróide da seção transversal. Para determinar o momento plástico, dividimos a distribuição de tensão em quatro sólidos retangulares compostos, sendo o volume de cada sólido igual à força por ele produzida. Portanto, temos:

$$C_1 = T_1 = 248,2 \times 12,7 \times 114,3 = 360 \text{ kN}$$

$$C_2 = T_2 = 248,2 \times 12,7 \times 203,2 = 641 \text{ kN}$$

Essas forças atuam através do centróide do volume de cada sólido. Calculando os momentos dessas forças em torno do eixo neutro, obtemos o momento plástico:

$$M_P = 2 [(57,2) (360)] + 2 [(120,7) (641)] = 195,92 \text{ kNm}$$

*Fator Forma* Aplicando a equação 3.93, temos:

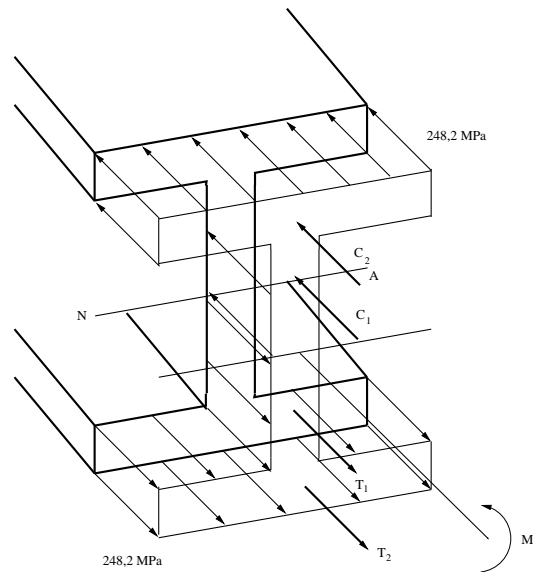


Figura 3.93:

$$k = \frac{M_P}{M_E} = \frac{195,92}{171,67} = 1,14$$

Esse valor indica que a viga em T oferece uma seção eficiente para resistir a um momento elástico. A maior parte do momento é desenvolvida nas abas da viga, isto é, nos seguimentos superior e inferior, enquanto a alma ou seguimento vertical contribui muito pouco. Nesse caso particular, apenas 14% de momento adicional pode ser suportado pela viga além do que pode ser suportado elásticamente.

2. Uma viga em T tem as dimensões mostradas na figura 3.94. Supondo que seja feita de material elástico perfeitamente plástico com limites de escoamento de tração e compressão  $\sigma_E = 250$  MPa, determinar o momento plástico a que ela pode resistir.

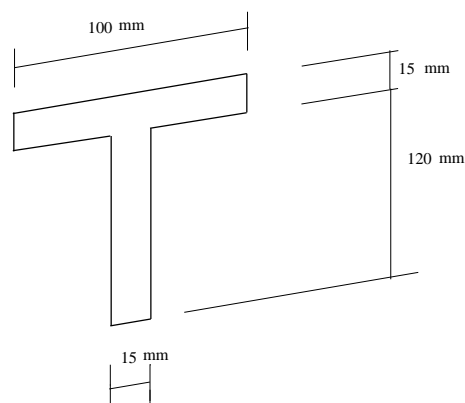


Figura 3.94:

### Solução

A distribuição de tensão plástica que atua sobre a área da seção transversal é mostrada na figura 3.95. Nesse caso, a seção transversal não é simétrica em relação a um eixo horizontal e, conseqüentemente, o eixo neutro não passa pelo centróide



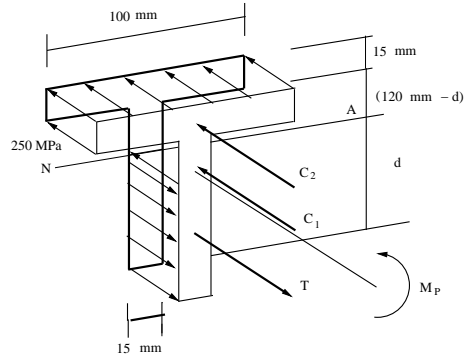


Figura 3.95:

dela. Para que possamos determinar a localização do eixo neutro  $d$ , é preciso que a distribuição de tensão produza uma força resultante nula na seção transversal. Supondo que  $d \ll 120$  mm, temos:

$$\int_A \sigma_x dA = 0$$

$$T - C_1 - C_2 = 0$$

$$\begin{aligned} 250 \times (0,015) \times (d) - 250 \times (0,015) \times (0,120 - d) \\ - 250 \times (0,015) \times (0,100) &= 0 \\ d = 0,110m < 0,120m & \quad OK \end{aligned}$$

De acordo com esse resultado, as forças que atuam em cada seguimento são positivas, assim:

$$T = 250 \times (0,015) \times (0,110) = 412,5 \text{ kN}$$

$$C_1 = 250 \times (0,015) \times (0,010) = 37,5 \text{ kN}$$

$$C_2 = 250 \times (0,015) \times (0,100) = 375 \text{ kN}$$

Então, o momento plástico em torno do eixo neutro é:

$$M_p = 412,5 \times \left(\frac{0,110}{2}\right) + 37,5 \times \left(\frac{0,001}{2}\right) + 375 \times \left(0,01 + \frac{0,015}{2}\right)$$

$$M_p = 29,4 \text{ kN.m}$$

## Exercícios

1. A viga em  $U$  é feito de um material elástico perfeitamente plástico para o qual  $\sigma_E = 250MPa$ . Determinar o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Ver figura 3.96.

Resp.  $M_E = 13,8 \text{ kNm}$ ;  $M_P = 25,6 \text{ kNm}$

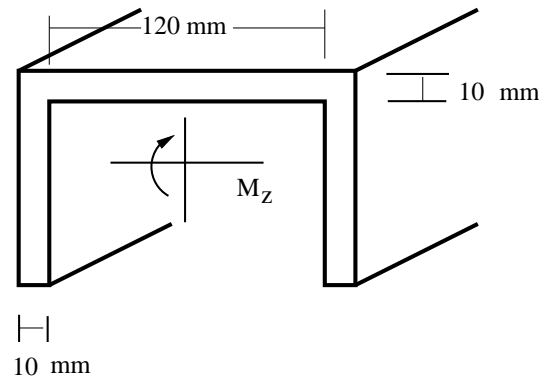


Figura 3.96:

2. Uma barra da aço A-36 retangular tem largura de 25,4 mm e altura de 76,2 mm. Determine o momento aplicado em torno do eixo horizontal que provoca escoamento de metade da barra.

Resp.  $M = 8,55 \text{ kNm}$

3. Determinar o fator forma da seção transversal da viga.(figura 3.97).

Resp.  $k = 1,27$

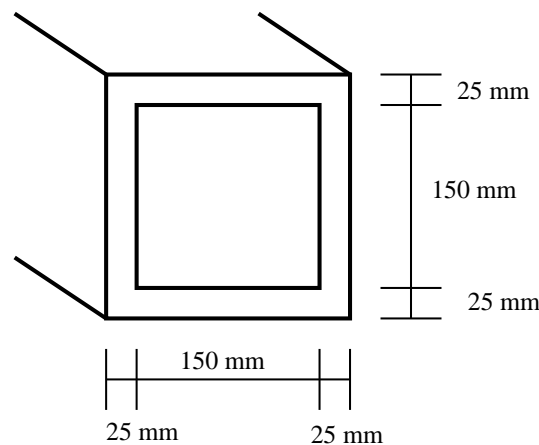


Figura 3.97:

4. A viga em  $T$  é feita de um material elástico perfeitamente plástico. Determinar o momento elástico máximo que pode ser aplicado à seção transversal.  $\sigma_E = 248,2 \text{ MPa}$  (figura 3.99)

Resp.  $M_E = 443,3 \text{ kNm}$

5. Determinar o fator forma da seção transversal da viga em  $H$ . (figura 3.98).

Resp.  $k = 1,57$

6. Determinar o fator forma de sua seção transversal. (figura 3.99)

Resp.  $k = 1,77$

7. Determinar o fator forma do elemento, que tem seção transversal caixão. (figura 3.100)

Resp.  $k = 1,4$

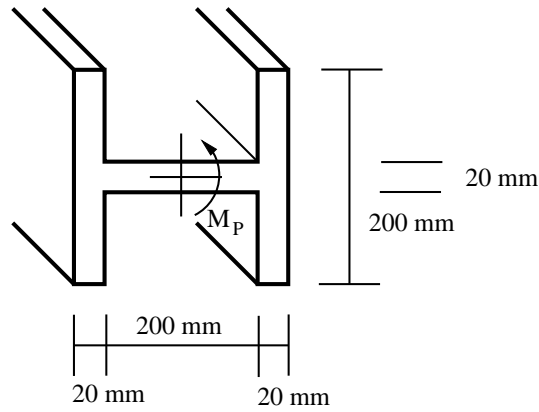


Figura 3.98:

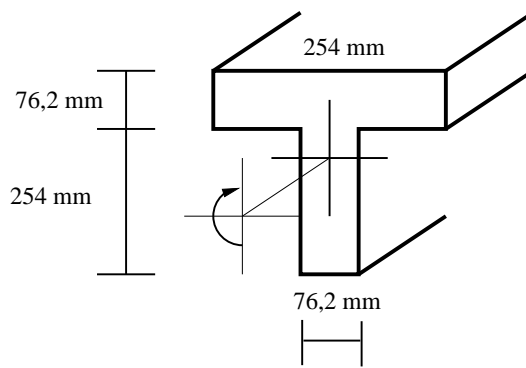


Figura 3.99:

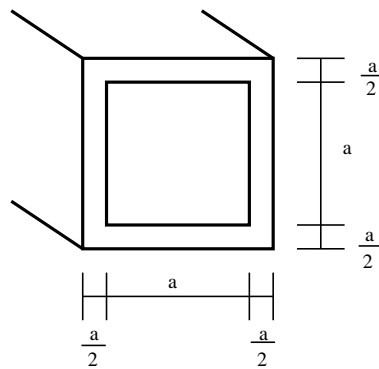


Figura 3.100:

8. A viga-caixão é feita de material elástico perfeitamente plástico. Determinar o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Adotar  $a = 100$  mm e  $\sigma_E = 250$  MPa (figura 3.100).

Resp.  $M_E = 312,5$  kN.m e  $M_P = 437,5$  kNm

9. Determinar o fator forma da seção transversal. (figura 3.101).

Resp.  $k = 1,71$

10. A viga é feita de material elástico perfeitamente plástico. Determine o momento plástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Adotar  $a = 50,8$  mm e  $\sigma_E = 248,2$  MPa (figura 3.101).

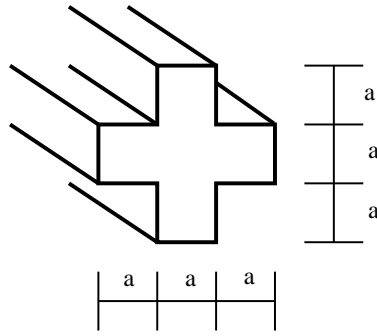


Figura 3.101:

Resp.  $M_E = 52,47 \text{ kN.m}$  e  $M_P = 89,48 \text{ kNm}$

11. Determinar o fator forma do elemento, que tem seção transversal tubular. (figura 3.102)

Resp.  $k = 1,61$

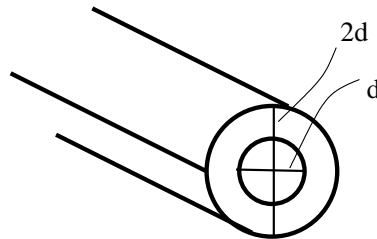


Figura 3.102:

## 3.4 Solicitação por Esforço Cortante

### 3.4.1 Introdução

**Exercício preliminar:** seja uma seção retângular  $b \times h$  (veja figura 3.103). Seja uma camada de fibras  $AB // LN$ , de ordenada  $y_1$  em relação a  $LN$ . Sejam as áreas  $A_i$  e  $A_s$ , respectivamente inferior e superior a  $AB$ . Sejam  $M_{A_i}$  e  $M_{A_s}$  seus respectivos momentos estáticos (momento de 1<sup>o</sup> ordem) em relação à  $LN$ . Demonstre que:

$$|M_{A_s}| = M_{A_i} = \frac{b}{2} \left[ y_1^2 - \frac{h^2}{2} \right]$$

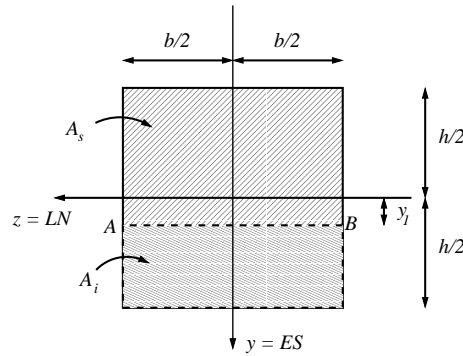


Figura 3.103: figura do exercício preliminar

**Demonstração:** Seja  $dA = b \cdot dy$  (veja figura 3.104)

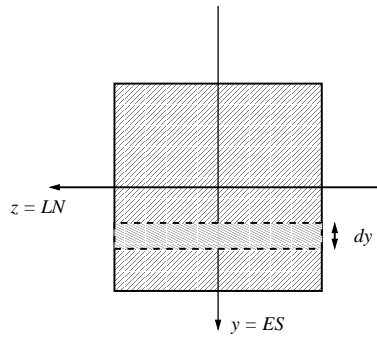


Figura 3.104: Demonstração

$$M_{A_i} = \int_{A_i} y dA = \int_{y_1}^{h/2} y b dy = b \frac{y^2}{2} \Big|_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y_1^2 \right] \quad (3.94)$$

$$M_{A_s} = \int_{A_s} y dA = \int_{-h/2}^{y_1} y b dy = b \frac{y^2}{2} \Big|_{-h/2}^{y_1} = \frac{b}{2} \left[ y_1^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] = -M_{A_i} \quad (3.95)$$

**Comentário:**  $M_{A_i} > 0$  e  $M_{A_s} < 0$  tais que  $M_{A_s} = -M_{A_i}$  então  $M_{A_s} + M_{A_i} = M_A = 0$  (o momento estático da área total em relação a um eixo baricêntrico é igual a zero)

**Observações:**

1. A partir deste ponto do texto, o valor absoluto do momento estático de  $A_i$  ou de  $A_s$  em relação à LN passa a ser indicado por:

$$M_s = M_{Ai} = |M_{As}| = \frac{b}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y_1^2 \right] \quad (3.96)$$

2. Quando  $y_1$  varia  $(-\frac{h}{2} \leq y_1 \leq \frac{h}{2})$  então  $M_s = f(y_1)$  é uma parábola de 2º grau (veja figura 3.105), sendo:

$$M_s^{max} = \frac{bh^2}{8}$$

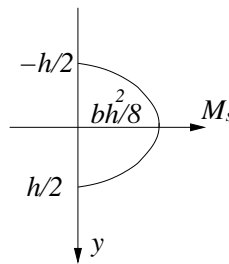


Figura 3.105: Variação do Momento Estático

### 3.4.2 Tensões de Cisalhamento em Vigas de Seção Retangular Constante

Sejam conhecidos o DMF e o DEC da viga. Na figura 3.106 representamos uma viga bi-apoiada, mas o sistema de apoios poderia ser qualquer.

O elemento de volume de comprimento elementar  $dx$ , limitado pelas seções de abscissas  $x$  e  $x + dx$  e o elemento de área  $dy \times dz$  em torno de um ponto P( $y, z$ ) genérico da seção determinam um elemento de volume  $dx \times dy \times dz$ .

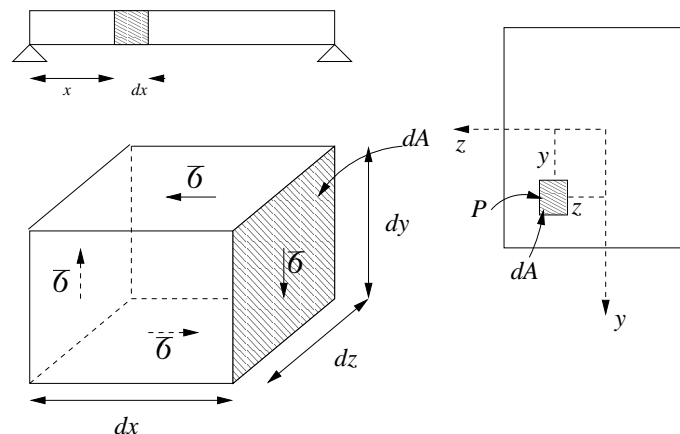


Figura 3.106: Viga bi-apoiada

Nas faces direita e esquerda,  $\tau_{xy} = \tau$  é a tensão tangencial na seção transversal.

Nas faces superior e inferior,  $\tau_{yx} = \tau$  é a tensão tangencial nos planos longitudinais.

A existência de tensões de cisalhamento em planos longitudinais é verificada em vigas constituídas de elementos longitudinais, conforme a figura 3.107.

Para o cálculo das tensões de cisalhamento, além das hipóteses admitidas na análise das tensões normais de flexão, admitimos a seguinte hipótese básica

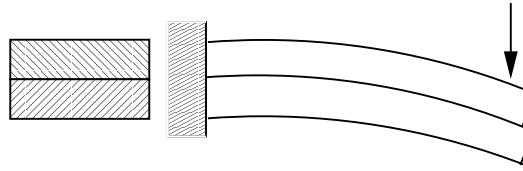


Figura 3.107: Viga constituída de elementos longitudinais

- A tensão de cisalhamento  $\tau$  é constante na largura da seção.

Portanto  $\tau = \tau(y)$  somente, isto é,  $\tau$  não depende de  $z$ .

Seja uma camada de fibras AB//LN, de ordenada  $y$ , isto é, uma camada de fibras longitudinais // à superfície neutra conforme destaca figura 3.108.

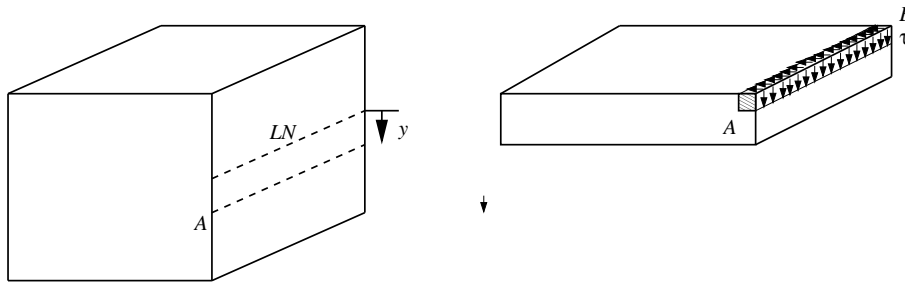


Figura 3.108: Tensão tangencial constante na largura da viga

Nas figuras 3.109 e 3.110 destacamos a porção da viga, superior a esta camada, para mostrar a tensão tangencial (transversal e longitudinal) em uma seção S, sendo  $\tau$  constante de A até B.

A resultante na direção longitudinal nas duas faces da figura 3.109 fornece:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{A_i} \sigma_x dA \Rightarrow \text{é a resultante das tensões normais na face esquerda.} \\
 F + dF &= \int_{A_i} (\sigma_x + d\sigma_x) dA \Rightarrow \text{é a resultante das tensões normais na face direita.}
 \end{aligned}
 \tag{3.97}$$

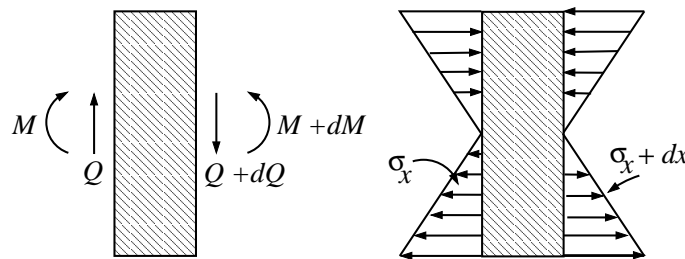


Figura 3.109: Tensões normais na flexão

A condição de equilíbrio é a existência da força  $dF$  no plano longitudinal superior, de área  $bdx$ . Portanto:

$$dF = \tau_{xy} b dx = \int_{A_i} d\sigma_x dA = \int_{A_i} \frac{dM}{I} y dA
 \tag{3.98}$$

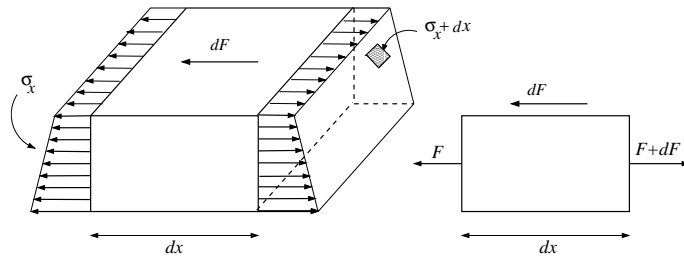


Figura 3.110: Equilíbrio de forças

obtem -se:

$$\tau_{xy} = \tau = \frac{1}{I_z b} \frac{dM}{dx} \underbrace{\int_{A_i} y dA}_{M_s} \quad (3.99)$$

lembrando que  $\frac{dM}{dx} = Q$  (esforço cortante  $Q = Q_y$ ) tem-se então:

$$\tau = \tau_{xy} = \frac{QM_s}{I_z b} \quad (3.100)$$

Do exercício preliminar:  $M_s = f(y) = \frac{b}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$  parábola de 2º, então a variação de  $\tau = \tau(y)$  é também uma parábola do 2º grau.

Numa seção retangular então tem-se

$$y = 0 \Rightarrow M_s^{max} = \frac{bh^2}{8} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Qbh^2/8}{bbh^3/12} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \quad (3.101)$$

Isto é:

$$\tau_{max} = 1,5 \frac{Q}{A}$$

onde  $A = bh$  é a área da seção.

Observe que  $\tau_{max} = 1,5\tau_{med}$  (50% maior que  $\tau_{med} = \frac{Q}{A}$ )

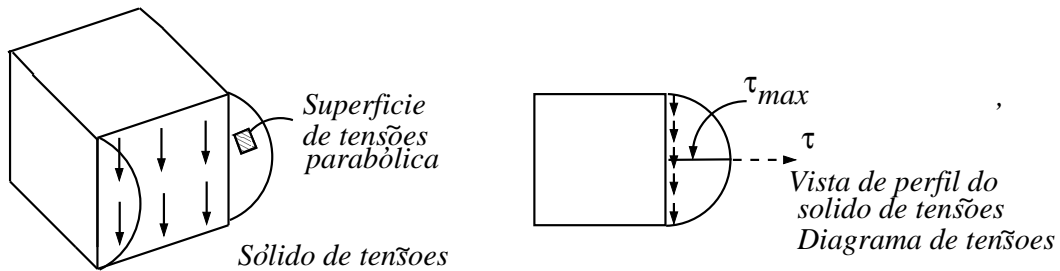


Figura 3.111: Sólido de tensões

**Exercício** Verificar a propriedade:  $Q = \int_A \tau dA$ , que não foi usada para calcular a tensão de cisalhamento  $\tau$ .

Faça

$$\tau = \frac{Q}{I_z b} \frac{b}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

e

$$dA = bdy$$

para calcular a integral, ou calcule o volume do sólido de tensões usando a fórmula da área do segmento de parábola.



## Observações

1. Demonstra-se da Teoria da Elasticidade (Mecânica dos sólidos I) que a tensão de cisalhamento não é exatamente constante na largura da seção, conforme a hipótese básica. Então a tensão calculada é a tensão média na largura, enquanto que a tensão máxima é calculada na teoria da elasticidade.  $\tau_{med} = \frac{QM_s}{I_z b}$

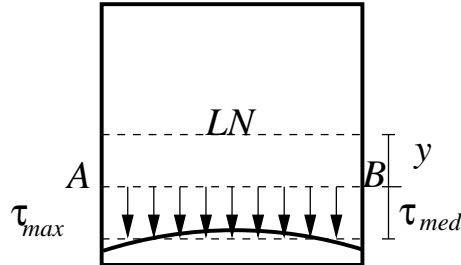


Figura 3.112: Tensões cisalhante média

A tabela abaixo (Beer-Johnstom, pág 276) ,mostra que o erro cometido varia com a razão  $\frac{b}{h}$

b/h	1/4	1/2	1	2	4
$\tau_{max}/\tau_{med}$	1,008	1,033	1,126	1,396	1,988
diferença percentual	0,8%	3,3%	12,6%	39,6%	98,8%

2. Na realidade as seções permanecem planas, mas “empenadas”, pois a deformação específica no cisalhamento é a distorção angular  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ .  
Nos bordos livres (superior e inferior):  $\tau = 0 \rightarrow \gamma = 0$

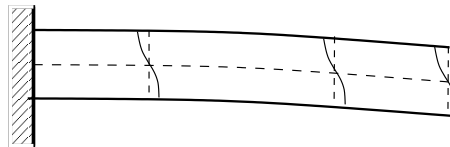


Figura 3.113: Deformação cisalhante específica nas bordas

Na Linha Neutra:  $\tau_{max} \rightarrow \gamma_{max}$

Esta deformação, em um cálculo mais rigoroso, altera a análise de tensões e deformações na flexão simples. No entanto, este efeito é desprezado, pois o erro cometido é muito pequeno, exceto na região de aplicação de cargas concentradas.

### 3.4.3 Tensões de Cisalhamento em Vigas de Seção de Diferentes Formas

Admite-se a mesma hipótese básica da seção retangular, isto é,  $\tau$  constante na largura da seção. Obtém-se as propriedades:

**Tensão de cisalhamento:**

$$\tau = \frac{QM_s}{I_z t}$$

sendo  $t = t(y)$  é a largura (espessura) da camada considerada.

## Seções T, I, caixão, etc... (lados paralelos ou perpendiculares à LN)

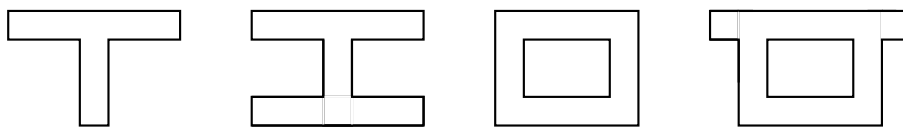


Figura 3.114: Tipos de seções

### 1. Exemplos de seção T e I.

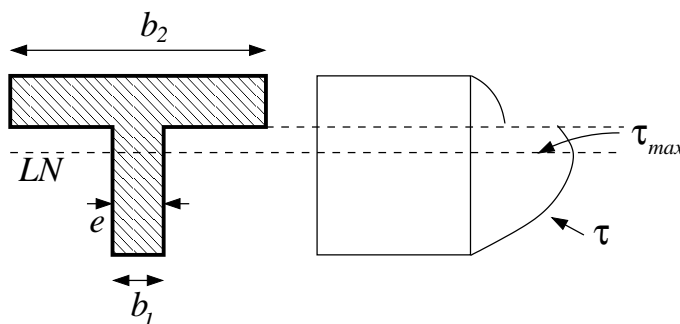


Figura 3.115: Seção T

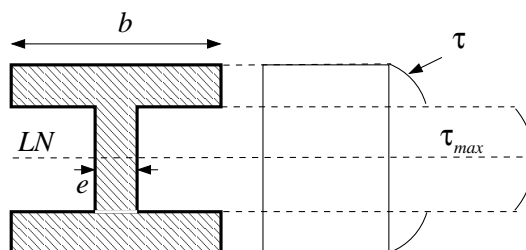


Figura 3.116: Seção I

- Na mesa: O cálculo de  $\tau$  está sujeito a erro considerável ( $\frac{b}{h}$  grande), mas de qualquer forma são tensões pequenas.
  - Na alma: O cálculo de  $\tau$  produz resultados confiáveis,  $\tau_{max}$  na LN.
  - Na transição mesa-alma: descontinuidade no diagrama de tensões.
2. Exemplo da figura 3.117. Seção retangular vazada (seção caixão), análise semelhante a seções I, mas com  $\tau = \frac{QM_s}{I_z(2e)}$  nas “almas”.

### 3.4.4 Exercícios

1. Uma viga simplesmente apoiada em seus extremos tem 200 mm de largura por 400 mm de altura e 4 m de comprimento e suporta uma carga uniformemente distribuída sobre todo seu comprimento. A tensão longitudinal admissível é 12 MPa (tração e compressão) e a tensão tangencial horizontal admissível é de 0,8 MPa. Determine o valor máximo admissível da carga por unidade de comprimento.

Resposta:  $q = 21,4 \text{ kN/m}$

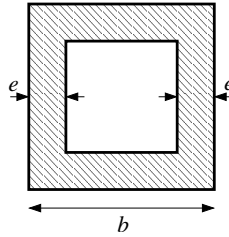


Figura 3.117: Exemplo 2

2. Calcular o valor máximo admissível de  $P$  na viga da figura 3.118 (dimensões em m), de seção retangular  $100 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ , de madeira com  $\bar{\sigma}_{\text{tração e comp.}} = 10 \text{ MPa}$  e  $\bar{\tau} = 1,4 \text{ MPa}$

Resposta:  $P = 8,333 \text{ kN}$

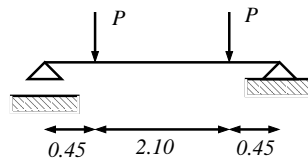


Figura 3.118: Figura do exercício 2

3. Calcular o valor máximo admissível de uma carga  $P$  na extremidade livre de uma viga em balanço (figura 3.119) de  $0,9 \text{ m}$ , constituída por três tábuas de madeira de seção  $100 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ , se a  $\bar{\tau}_{\text{uniao}} = 350 \text{ kPa}$ , e calcular o valor de  $\sigma$ .

Resposta:  $P = 3937,5 \text{ N}$  e  $\sigma = 9,45 \text{ MPa}$

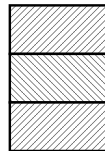


Figura 3.119: Figura do exercício 3

4. Calcular os valores máximos da tensão normal e da tensão tangencial na viga da figura 3.120 conhecida sua seção transversal (dimensões em mm).

Resposta:  $\sigma = 7,872 \text{ MPa}$  e  $\tau = 929,6 \text{ kPa}$

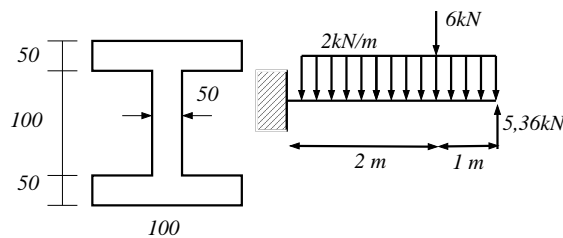


Figura 3.120: Figura do exercício 4

5. A figura 3.121 (dimensões em mm) mostra a seção transversal de uma viga de  $4 \text{ m}$  de comprimento, simplesmente apoiada nos extremos, que suporta uma carga

uniformemente distribuída de 4 kNm sobre todo seu comprimento. Em uma seção a 0,5 m da extremidade esquerda e em um ponto desta seção a 40 mm abaixo da superfícies neutras, calcular a tensão normal e a tensão tangencial.

Resposta:  $\sigma = 1,402$  MPa, tração;  $\tau = 925,5$  kPa

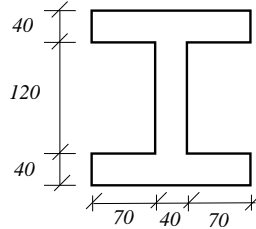


Figura 3.121: Figura do exercício 5

6. A figura 3.122 (dimensões em mm) mostra a seção transversal de um trecho de uma viga. Na seção A o momento fletor é - 4 kNm e o esforço cortante é 5 kN. Calcular a tensão normal e a tensão de cisalhamento na camada situada 40 mm da LN, na seção B.

Resposta:  $\sigma = -3,505$  MPa e  $\tau = 1,084$  MPa

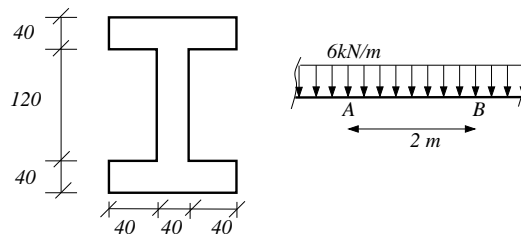


Figura 3.122: Figura do exercício 6

7. Calcular os tensões máximas de tração, compressão e cisalhamento em uma viga engastada e livre de comprimento 0,38 m que suporta uma carga concentrada transversal de 6,7 kN na extremidade livre. A figura 3.123 mostra a seção transversal da viga (dimensões em mm).

Resposta:  $\sigma_t = 92,58$  MPa;  $\sigma_c = 277,75$  MPa e  $\tau = 16,45$  MPa

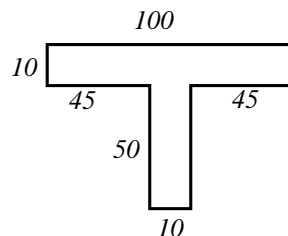


Figura 3.123: Figura do exercício 7

8. Uma viga de seção “ T ” (dimensões em mm). Suporta cargas indicadas. Calcular a tensão:

(a) tangencial máxima.

- (b) normal de flexão máxima de compressão.
- (c) tangencial vertical a 3,4 m da extremidade esquerda e 60 mm acima da base.
- (d) normal de flexão a 1,5 m da extremidade direita e 50 mm acima da base.

Resposta: 8a) 694 kPa; 8b) 11,73 MPa de compressão; 8c) 148,1 kPa e 8d) 6,17MPa de tração

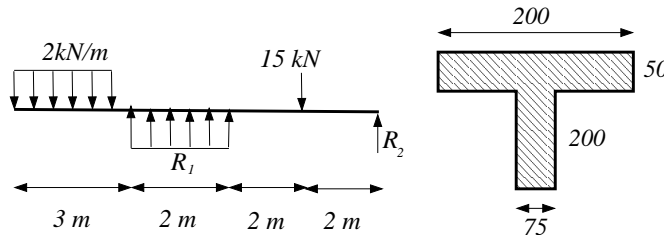


Figura 3.124: Figura do exercício 8

9. Verificar a estabilidade da viga 3.125 (dimensões em mm na seção transversal). Para  $\bar{\sigma}_{\text{tração}} = 160\text{MPa}$ ,  $\bar{\sigma}_{\text{compressão}} = 110\text{MPa}$  e  $\bar{\tau} = 14\text{MPa}$ .

Resposta: As tensões máximas são 15,35 MPa; 9,43 MPa e 1,27 MPa

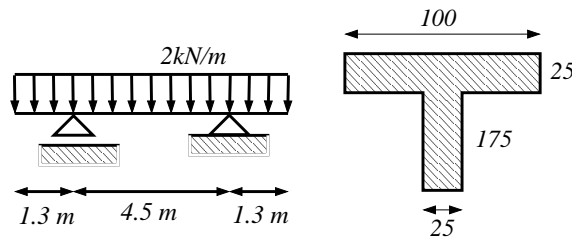


Figura 3.125: Figura do exercício 9

10. Calcular os valores máximo admissível da carga  $q$  na viga da figura 3.126, seção “T” constituída por suas peças de madeira 40 mm  $\times$  120 mm, para  $\bar{\sigma} = 9\text{ MPa}$  (de flexão, tração ou compressão) e  $\bar{\tau} = 0,7\text{ MPa}$  (tangencial horizontal).

Resposta:  $q = 1,741\text{ kN/m}$ ;  $\tau_{\text{max}} = 0,6\text{ MPa}$ ;  $\sigma^T_{\text{max}} = 9,0\text{ MPa}$  e  $\sigma^c_{\text{max}} = 5,4\text{ MPa}$ .

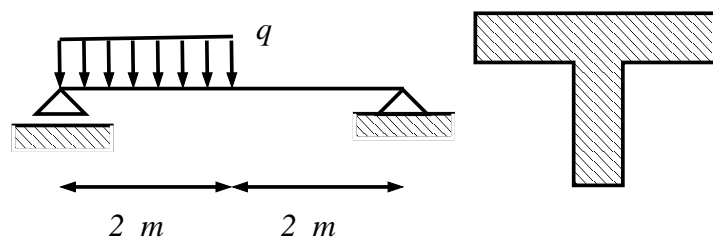


Figura 3.126: Figura do exercício 10

11. Calcular os valores máximo admissível da carga  $P$  na viga da figura 3.127, de modo que a seção longitudinal de tração não exceda 12 MPa e a tensão tangencial horizontal não ultrapasse 0,7 MPa. Na figura as dimensões são dadas em mm.

Resposta: 14,58 kN

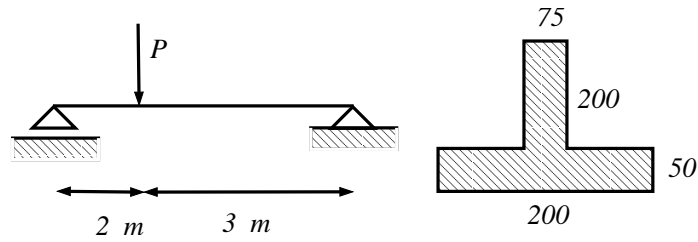


Figura 3.127: Figura do exercício 11

12. Uma viga bi-apoiada nos extremos, de 6 m de comprimento, suporta uma carga uniformemente distribuída de 5 kN/m em todo o seu comprimento. A seção transversal é mostrada na figura 3.128 (dimensões em mm)

- (a) a tensão tangencial horizontal máxima, indicando onde ela ocorre na seção transversal.
- (b) a tensão tangencial vertical a 0,5 m da extremidade direita e a 100 mm abaixo do topo.

Resposta: 931 kPa e 751 kPa

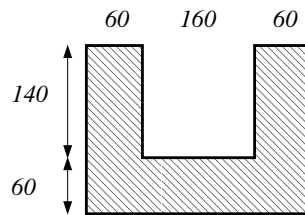


Figura 3.128: Figura do exercício 12

### 3.4.5 Fluxo de cisalhamento

Seja a figura 3.129 uma peça constituída de dois vários elementos (viga em madeira no caso).

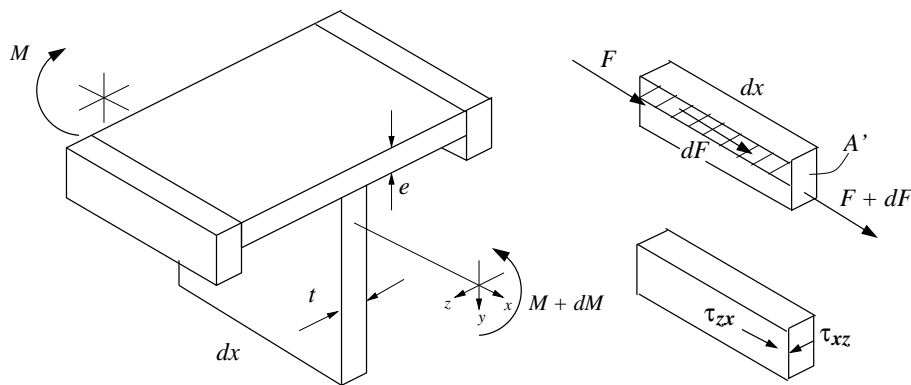


Figura 3.129: Viga de madeira composta por vários elementos

Analisando-se o equilíbrio do elemento destacado na figura tem-se uma situação análoga à estudada no item anterior, considerando  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  constante na espessura  $e$ :

Portanto:

$$dF = \tau_{xz} e dx = \int_{A_i} d\sigma_x dA' = \int_{A_i} \frac{dM}{I} y dA' \quad (3.102)$$

obtem-se:

$$\tau_{xz} = \tau = \frac{1}{I_z e} \frac{dM}{dx} \underbrace{\int_{A'} y dA'}_{M_s} \quad (3.103)$$

lembrando que  $\frac{dM}{dx} = Q$  (esforço cortante  $Q = Q_y$ ) tem-se então:

$$\tau_{xz} = \frac{QM_s}{I_z e} \quad (3.104)$$

A equação 3.104 mostra que é possível se calcular tensões longitudinais (direção  $x$ ) num plano paralelo ao plano  $xz$  em vigas sujeitas a flexão ( $\tau_{xz}$ ) com a mesma equação que vem sendo usada até o momento no cálculo das tensões longitudinais no plano  $xy$  ( $\tau_{xy}$ ), calculando-se o momento estático para a área  $A'$  e substituindo-se a espessura “ $t$ ” por “ $e$ ”.

Definindo o fluxo de cisalhamento “ $f$ ” como sendo o valor da força  $dF$  por unidade de comprimento, ou seja:

$$f = \frac{dF}{dx} = \frac{\tau_{xz} e dx}{dx} = \frac{QM_s}{I_z} \quad (3.105)$$

Conseqüentemente,

$$\tau_{xy} = \frac{f}{t} \quad (3.106)$$

e

$$\tau_{xz} = \frac{f}{e} \quad (3.107)$$

A força  $F$  a ser transmitida de um elemento para outro fica então:

$$F = fL = \frac{QM_s}{I_z} L \quad (3.108)$$

onde  $L$  é o comprimento da viga da direção longitudinal.

A aplicação destas últimas equações segue então um procedimento bastante parecido com o exposto no item anterior. Deve-se ter bastante atenção no cálculo do momento estático, identificando corretamente qual a área a ser considerada no seu cálculo. Obviamente a aplicação destas equações podem ser extendidas a vigas de um só elemento.

Observa-se que das equações 3.106 e 3.107 que o fluxo de cisalhamento é uma grandeza vetorial e define a direção das tensões as tensões

Observa-se também que na aba do perfil o fluxo de cisalhamento na direção vertical provoca tensões  $\tau_{xy}$  de baixa magnitude pois a espessura  $t$  é relativamente grande. Por um outro lado o fluxo de cisalhamento na direção horizontal provoca tensões de cisalhamento  $\tau_{xz}$  de altas magnitudes pois a espessura  $e$  é relativamente pequena. Assim sendo, é comum analisarmos o fluxo de cisalhamento somente nas direções paralelas aos lados da seção: direção horizontal na(s) aba(s) e direção vertical na alma.

O sentido do fluxo de cisalhamento e, conseqüentemente das tensões cisalhantes, nas abas são mostrados na figura 3.130 e são obtidos pela simetria do tensor de tensões (equações de equilíbrio). Já na alma a direção do fluxo é a mesma direção do cortante atuante na seção.

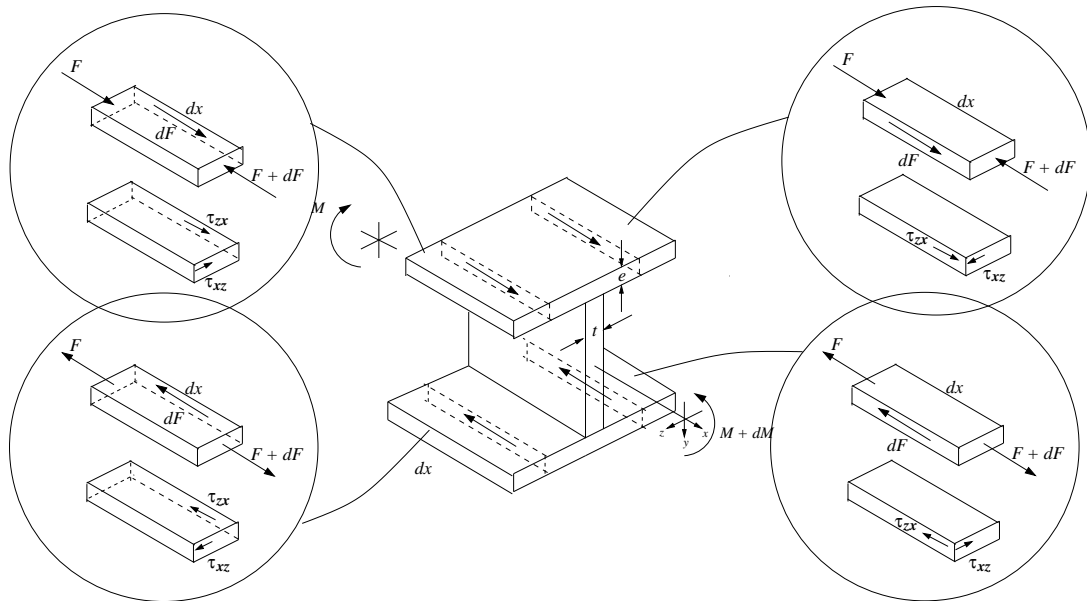


Figura 3.130: Fluxo de cisalhamento num perfil I

A figura 3.131 resume as direções de fluxo de cisalhamento considerados na análise de uma viga I, bem como suas intensidades. Estas últimas serão discutidas logo a seguir.

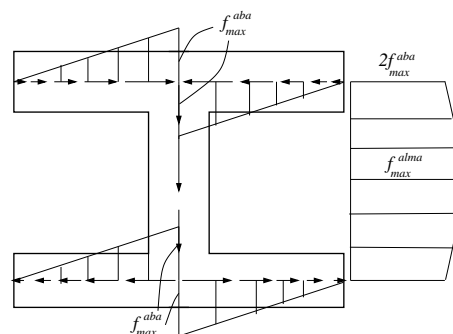


Figura 3.131: Fluxo de cisalhamento num perfil I

No que se refere à intensidade do fluxo de cisalhamento tem-se para uma viga I, tem-se:

- Para as abas do perfil: (ver figura 3.132)

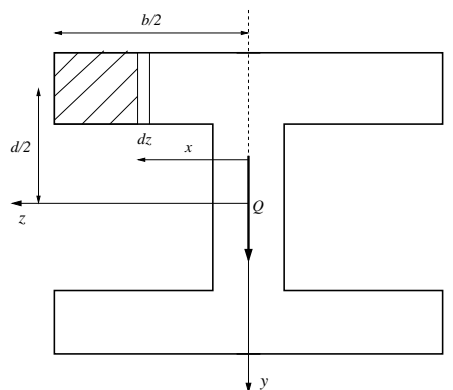


Figura 3.132: Fluxo de cisalhamento nas abas de um perfil I



$$f = \frac{QM_s}{I} = \frac{Q\frac{d}{2}\left(\frac{b}{2} - z\right)e}{I} = \frac{Qed}{2I} \left(\frac{b}{2} - z\right) \quad (3.109)$$

Verifica-se que o fluxo de cisalhamento varia linearmente com  $z$  conforme mostra figura 3.131.

A força total desenvolvida em cada trecho das abas pode ser obtida pela integração que segue e as resultantes são mostradas na figura 3.133

$$F_{aba} = \int dF = \int f dz = \int_0^{b/2} b/2 \frac{Qed}{2I} \left(\frac{b}{2} - z\right) dz = \frac{Qedb^2}{16I} \quad (3.110)$$

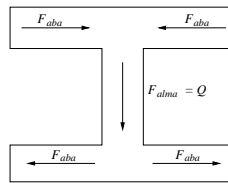


Figura 3.133: Resultantes do fluxo de cisalhamento num perfil I

Observa-se facilmente que a resultante de forças na horizontal é nula, como era de se esperar já que para o caso analisado só existe cortante na direção  $y$ .

- Para a alma do perfil: (ver figura 3.134)  
 Similarmente, observando figura 3.134 faz-se a análise da alma.

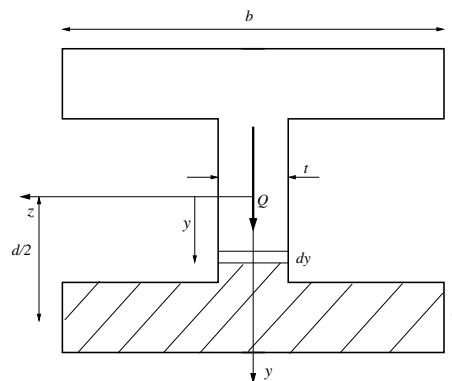


Figura 3.134: Fluxo de cisalhamento na alma de um perfil I

Pode-se escrever para o cálculo do momento estático na alma:

$$M_s = bed/2 + t(d/2 - e/2 - y)(d/2 - e/2 - y)1/2 \quad (3.111)$$

Considerando que  $d/2 \gg e/2$  (paredes finas), pode-se simplificar a equação 3.111 por:

$$M_s \simeq bed/2 + t(d/2 - y)(d/2 - y)1/2 = bed/2 + t/2(d^2/4 - y^2) \quad (3.112)$$

Resultando para o fluxo de cisalhamento, para o caso de  $t = e$ :

$$f = \frac{QM_s}{I} = \frac{Qt}{I} \left[ \frac{db}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \right] \quad (3.113)$$

Neste caso, conforme mostrado na figura 3.131 o fluxo de cisalhamento varia de modo parabólico, de  $f = 2f_{max}^{aba} = Qtdb/(2I)$  em  $y = d/2$  ao máximo de  $f = f_{max}^{alma} = (Qtd/I)(b/2 + d/8)$  em  $y = 0$ .

A força total desenvolvida na alma pode ser obtida pela integração que segue e a resultante é mostrada na figura 3.133

$$F_{alma} = \int dF = \int f dy \quad (3.114)$$

Desenvolvendo a integral da equação 3.114, sendo o valor do fluxo de cisalhamento dado por 3.113, pode-se mostrar que:

$$F_{alma} = \int dF = \int_{-d/2}^{d/2} f dy = Q \quad (3.115)$$

ou seja, que a resultante vertical é igual ao cortante que atua na seção, conforme era esperado. (ver figura 3.133)

### 3.4.6 Exercícios

1. Um esforço cortante vertical de 18 kN atua na seção transversal de uma viga constituída de quatro peças de madeira 50 mm × 200 mm (veja figura 3.135 Determinar:
  - (a) a tensão tangencial horizontal máxima, indicando onde ela ocorre na seção transversal.
  - (b) a tensão tangencial vertical a 80 mm abaixo do topo.

Resposta: 821,7 kPa e 706,7 kPa

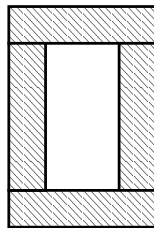


Figura 3.135: Figura do exercício 1

2. Uma viga caixa é formada por quatro tábuas de madeira 25 mm × 150 mm, unidas com parafusos. O esforço cortante de 4 kN é constante ao longo do comprimento. Calcular o espaçamento entre os parafusos, no comprimento, se cada um suporta uma força de cisalhamento de 1 kN.

Resposta: 110 mm, no máximo.

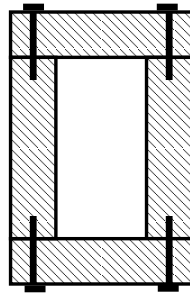


Figura 3.136: Figura do exercício 2

3. Uma viga caixão de madeira seção quadrada  $250\text{mm} \times 250\text{mm}$  externamente, espessura de  $50\text{mm}$ , é formada por quatro peças de madeira pregadas de uma das três formas indicadas. O esforço cortante de  $3,02\text{ kN}$  ao longo do comprimento e cada prego resiste a uma força cortante de  $240\text{ N}$ . escolher a solução que exige menor número de pregos e calcular o espaçamento entre os pregos para esta solução.

Resposta: (b)  $60\text{ mm}$  (para (a)  $36\text{ mm}$  e para (c)  $45\text{ mm}$ )

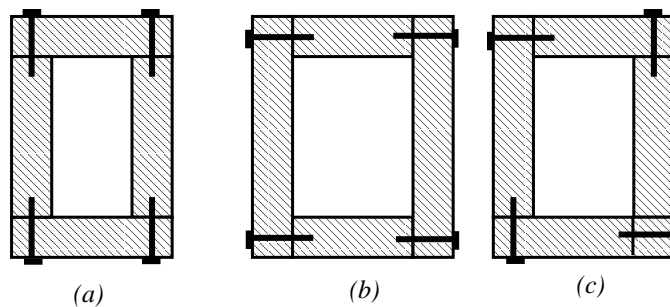


Figura 3.137: Figura do exercício 3

4. A seção transversal AB da viga da figura 3.138, é constituída por várias peças de madeira (dimensões em  $\text{mm}$ ), conforme a figura 3.138. O momento de inércia em relação à LN é igual a  $2360 \times 10^6\text{ mm}^4$ . Cada parafuso representado é capaz de resistir a uma força de cisalhamento longitudinal de  $2\text{ kN}$ . Pedese o espaçamento, ao longo do comprimento, dos parafusos necessários à ligação:

(a) nos trechos AC e DB.

(b) no trecho CD.

Resposta:  $120\text{ mm}$  e  $240\text{mm}$

### 3.4.7 Centro de cisalhamento

Seja uma seção com perfil U como a mostrada na figura 3.139. que está em balanço em um apoio fixo e submetida à força  $\mathbf{P}$ . Se a força for aplicada ao longo do eixo vertical assimétrico que passa pelo *centróide*  $C$  da área da seção transversal, o perfil U não só se fletirá para baixo *como também torcerá* no sentido horário como mostrado.

Para entender porque o elemento torce, é preciso estudar a distribuição do fluxo de cisalhamento ao longo das abas e da alma do perfil em U (Figura 3.140). Quando a distribuição é integrada nas áreas das abas e da alma, fornece forças resultantes de  $F_{aba}$

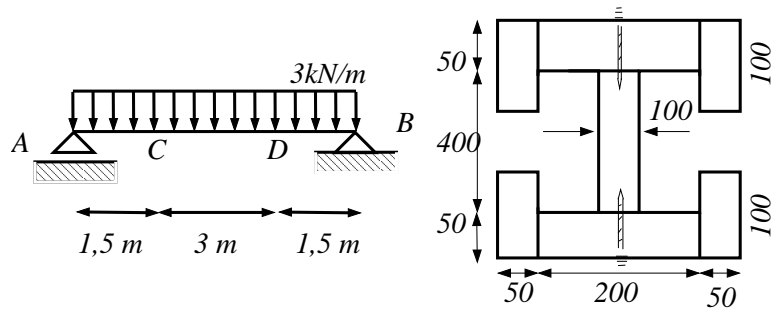


Figura 3.138: Figura do exercício 4

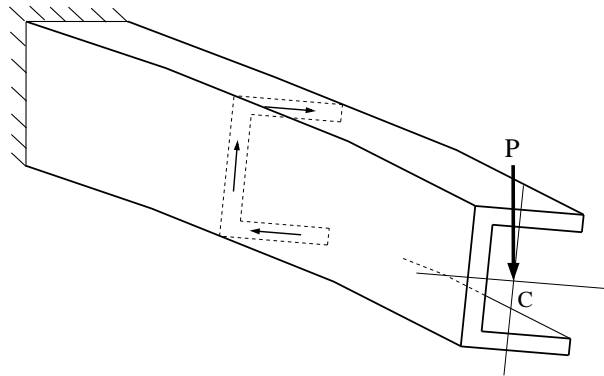


Figura 3.139: Flexão e Torção

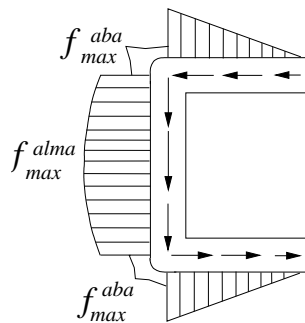


Figura 3.140: Distribuição do fluxo de cisalhamento

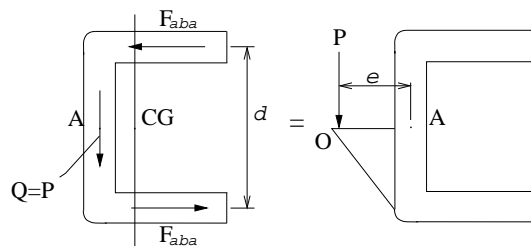


Figura 3.141: Momento para combater o binário resultante do fluxo de cisalhamento nas abas

em cada aba e uma força  $Q = P$  na alma (Figuras 3.141). Se somarmos os momentos dessas forças em torno do ponto A, veremos que o binário criado pelas forças das abas é responsável pela torção do elemento. O sentido real da torção é horário quando visto a partir da frente da viga, como mostra a Figura 3.139, uma vez que as forças de “equilíbrio” interno de reação  $F_{aba}$  provocam a torção. A fim de impedir a torção é

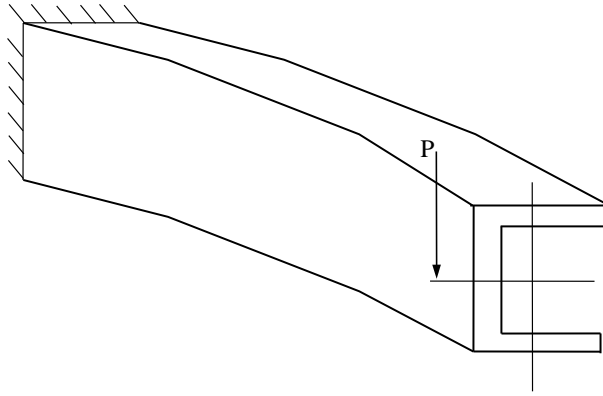


Figura 3.142: Flexão sem torção

necessário aplicar  $\mathbf{P}$  em um ponto  $O$  localizado a uma distância  $e$  da alma do perfil em  $U$  (Figuras 3.141 ). É preciso que  $\sum M_A = F_{aba}d = Pe$  ou:

$$e = \frac{F_{aba}d}{P} \quad (3.116)$$

Usando a teoria discutida no tópico *Fluxo de Cisalhamento*, avalia-se  $F_{aba}$  em termos de  $P = (Q)$  e das dimensões das abas e da alma. Uma vez feito isso,  $P$  será cancelada após a substituição na equação 3.116 e será possível, então, expressar  $e$  simplesmente em função da geometria da seção transversal e *não* em função de  $P$  ou de sua localização ao longo do comprimento da viga. O ponto  $O$  localizado é chamado **centro de cisalhamento** ou **centro de flexão**. Quando  $P$  é aplicada nesse centro de cisalhamento, a viga flete sem torção, como mostra a figura 3.142. Os manuais de projeto relacionam a localização desse ponto para uma variedade de seções transversais de vigas de paredes finas, usadas comumente na prática.

Ao proceder à análise, deve-se observar que o **centro de cisalhamento localiza-se sempre em um eixo de simetria** da área da seção transversal do elemento. Por exemplo: se o perfil em  $U$  da Figura 3.139 for girado  $90^\circ$  e  $P$  for aplicada em  $A$  (Figura 3.139), não ocorrerá torção, uma vez que o fluxo de cisalhamento na alma e nas abas é *simétrico* nesse caso e, portanto, as forças resultantes nesses elementos criam momentos nulos em torno de  $A$  (Figura 3.140). Obviamente, se um elemento tiver uma seção transversal com *dois* eixos de simetria, como no caso de uma viga em duplo  $T$ , o centro de cisalhamento coincidirá com a interseção desses eixos (o centróide).

**Exemplo:**

Determinar a localização do centro de cisalhamento da seção do perfil em  $U$ , que tem paredes finas e as dimensões mostradas na Figura 3.143.

- Resultantes do Fluxo de Cisalhamento

O cortante vertical para baixo  $\mathbf{Q}$  aplicado à seção faz o cisalhamento fluir através das abas e da alma como mostra a Figura 3.144.

Isso provoca as forças resultantes  $F_{aba}$  e  $Q$  nas abas e na alma como mostra a Figura 3.145. Calcularemos os momentos em torno do ponto  $A$ , de modo que somente a força  $F_{aba}$  tenha de ser determinada.

A área da seção transversal pode ser dividida em três retângulos componentes - uma alma e duas abas. Como se admite que cada componente seja fino, o momento de inércia da área em torno do eixo neutro é:

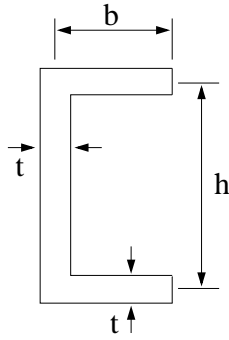


Figura 3.143: Figura do exemplo com viga U

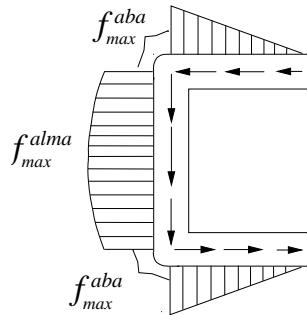


Figura 3.144:

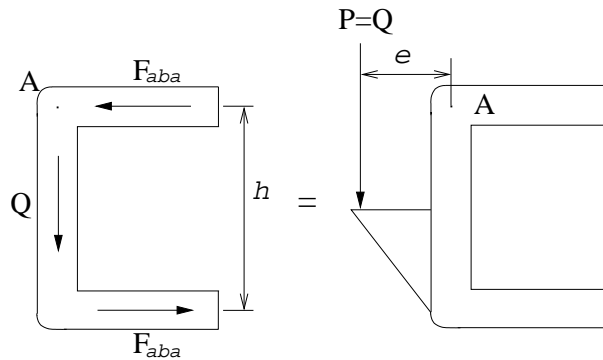


Figura 3.145:

$$I = \frac{1}{12}th^3 + 2 \left[ bt \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] = \frac{th^2}{2} \left( \frac{h}{6} + b \right) \quad (3.117)$$

Pela Figura 3.146,  $q$  em uma posição arbitrária  $x$  é:

$$f = \frac{QM_s}{I} = \frac{Q(h/2)[b-x]t}{(th^2/2)[(h/6) + b]} = \frac{Q(b-x)}{h[(h/6) + b]} \quad (3.118)$$

Então, a força  $F_{aba}$  é:

$$F_{aba} = \int_0^b q dx = \frac{Q}{h[(h/6) + b]} \int_0^b (b-x) dx = \frac{Qb^2}{2h[(h/6) + b]} \quad (3.119)$$

Obviamente este resultado poderia ser obtido encontrado primeiro  $f_{max}^{aba}$  (Figura

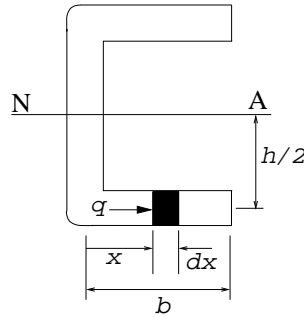


Figura 3.146:

3.144) e depois calculando a área triangular  $F_{aba} = b/2 f_{max}^{aba}$ .

- Centro de Cisalhamento.

Somando os momentos em torno do ponto A (Figura 3.145), requer-se que:

$$Qe = F_{aba}h = \frac{Qb^2h}{2h[(h/6) + b]} \quad (3.120)$$

Assim:

$$e = \frac{b^2}{[(h/3) + 2b]} \quad (3.121)$$

Como mencionamos anteriormente,  $e$  depende apenas da geometria da seção transversal.

### 3.4.8 Exercícios

1. O conjunto da figura 3.147 está submetido a um cisalhamento vertical  $Q=31,14mm$ . Determinar o fluxo de cisalhamento nos pontos A e B e o seu valor mínimo na seção transversal.  
(Resp.:  $f_a = 34,31$  N/mm;  $f_b = 79,26$  N/mm;  $f_{max} = 112,47$  N/mm)
2. Determinar a localização  $e$  do centro de cisalhamento, ponto O, do elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada na figura 3.148. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura  $t$ .  
(Resp.:  $e = 27,19$  mm)
3. Determinar a localização  $e$  do centro de cisalhamento, ponto O, do membro de paredes finas com uma fenda ao longo de sua lateral mostrado na figura 3.149. Cada elemento tem espessura constante  $t$ .  
(Resp.:  $e = 7a/10$ )

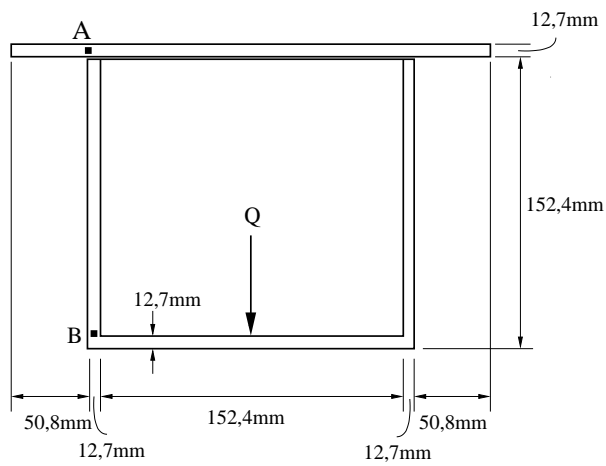


Figura 3.147: Figura do exercício 1

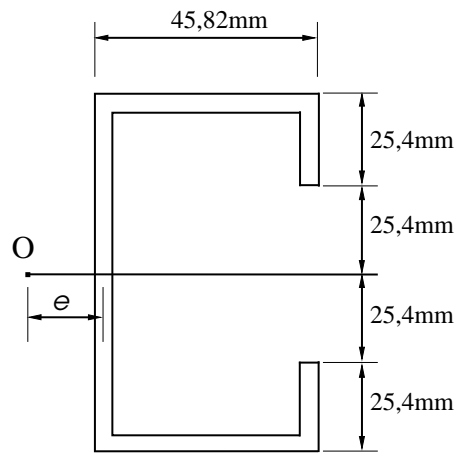


Figura 3.148: Figura do exercício 2

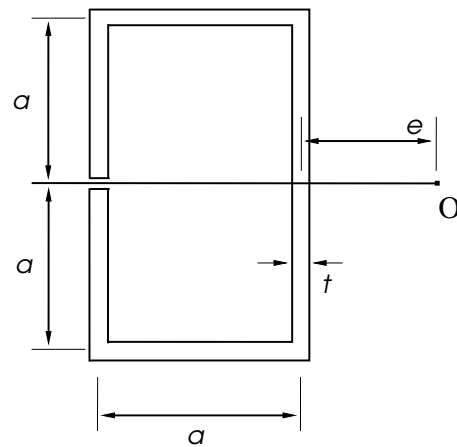


Figura 3.149: Figura do exercício 3



# Capítulo 4

## Tópicos complementares

### 4.1 Linha elástica de vigas sujeitas à flexão

#### 4.1.1 Definição

A linha elástica (LE) na flexão é a curva que representa o eixo de uma viga deformada à flexão pura ou simples (desprezando o efeito do cortante).

#### 4.1.2 Ângulo de curvatura

Para a determinação da equação da LE de vigas sujeitas à flexão, considere a barra de eixo originalmente reto que, mediante a atuação de um momento fletor  $M$ , se torna curvo, de acordo com a figura 4.1.

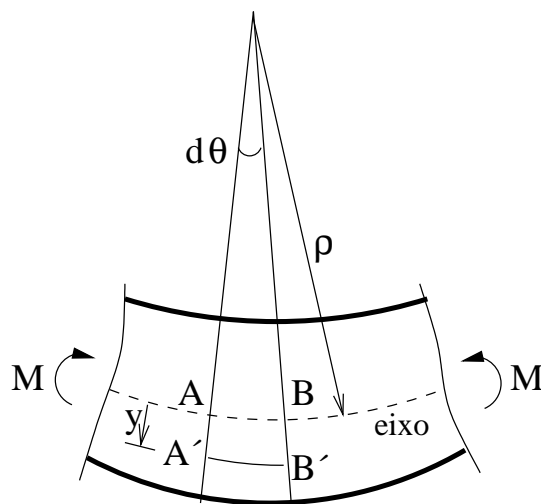


Figura 4.1: Trecho de uma barra sujeita à flexão pura

Na figura 4.1 tem-se:

- seções  $A$  e  $B$ : duas seções adjacentes da viga. Antes da aplicação do carregamento estas seções estavam paralelas e distantes entre si  $dx$ .
- $ds = AB$ : o comprimento do trecho do eixo compreendido entre  $A$  e  $B$
- $A'B'$ : um segmento de reta paralelo ao eixo e de comprimento  $ds + ds \varepsilon_x = ds(1 + \varepsilon_x)$

- $y$ : A distância entre  $A$  e  $A'$ ,  $BeB'$
- $\rho$ : o raio de curvatura do trecho  $AB$  do eixo da barra após a atuação de  $M$ ;
- $d\theta$ : o ângulo de curvatura do trecho do eixo entre  $AB$  que, por consequência, também é o ângulo de curvatura de  $A'B'$

De acordo com o que foi apresentado na seção de solicitação por momento fletor (3.3) vista anteriormente, as tensões normais na flexão se relacionam com o momento fletor atuante nela da seguinte forma:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (4.1)$$

e a deformação correspondente é

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_z}{EI_z} y \quad (4.2)$$

O comprimento de  $AB$  após atuação do carregamento é  $ds$  pode ser relacionado com  $R$  e  $d\theta$  da seguinte forma:

$$ds = \rho d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (4.3)$$

Como visto na seção 3.3, a curvatura  $\kappa$  da barra é expressa como:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\epsilon_x}{y} \quad (4.4)$$

Para pequenas deformações, podemos fazer a seguinte simplificação:

$$ds \approx dx \quad (4.5)$$

Logo, o ângulo de curvatura pode ser obtido através da seguinte equação:

$$\frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (4.6)$$

A equação 4.6 é aplicável a barras retas com pequena curvatura.

### 4.1.3 Equação diferencial da LE

Seja a barra de eixo originalmente reto submetida ao carregamento  $q(x)$  da figura 4.2. Nesta figura tem-se o eixo na configuração indeformada representado pela linha cheia, a LE representada pela linha tracejada, S e T seções adjacentes originalmente verticais na configuração indeformada e S' e T' suas correspondentes na configuração deformada.

A figura 4.3 representa o trecho da barra nas proximidades de S e T com maior nível de detalhes. Nesta figura  $d\phi$  é o incremento de inclinação correspondente à diferença entre as tangentes em T e S, respectivamente e, graficamente, verificamos que é equivalente à  $d\theta$ :

$$d\phi = d\theta \Rightarrow \phi = \theta \quad (4.7)$$

Sendo  $\tan \phi$  o coeficiente angular da reta tangente à LE  $y$  numa posição  $x$  e considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e deformações tem-se:

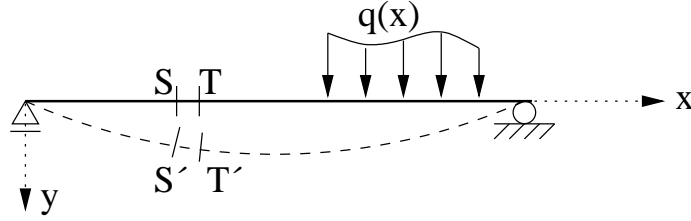


Figura 4.2: Viga sujeita a carregamento  $q(x)$

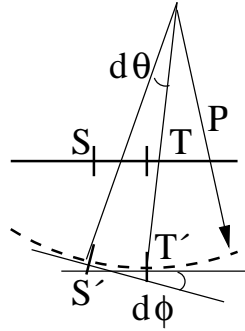


Figura 4.3: Detalhe da região que contém as seções S e T

$$\tan\phi \approx \phi(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (4.8)$$

Com isso, considerando equações 4.6, 4.7 e 4.8, tem-se que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (4.9)$$

A equação 4.9 é a equação diferencial da LE partindo-se dos momentos fletores, que resolvida resultará em uma função  $y(x)$  que representará a configuração deformada do eixo da barra sujeita ao momento  $M_z(x)$ .

Para adequar a equação 4.9 com o referencial de sinais que adota flecha positiva para baixo e rotações positivas no sentido horário e considerando a convenção de momento fletor positivo tracionado as fibras situadas abaixo da linha neutra, faz-se necessário a inclusão do sinal negativo na equação do momento fletor:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (4.10)$$

Observações:

Derivando-se a equação 4.10 com relação à  $x$ , tem-se:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{EI_z} \frac{dM_z}{dx} = -\frac{Q_y}{EI_z} \quad (4.11)$$

que é a equação diferencial da LE partindo-se dos esforços cortantes  $Q_y(x)$ .

Derivando-se uma vez a equação 4.10 com relação à  $x$  duas vezes, tem-se

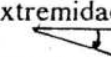
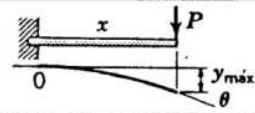
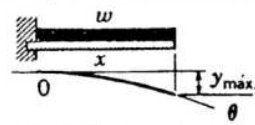
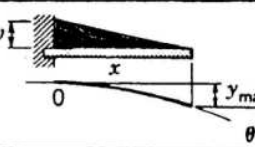
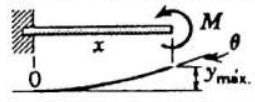
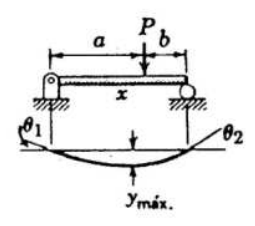
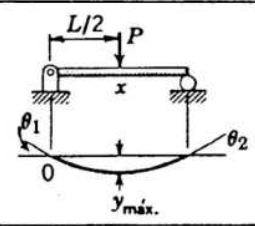
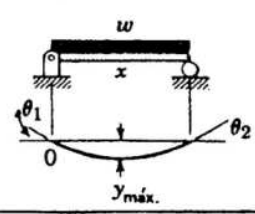
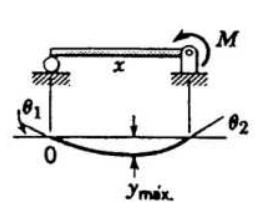
$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1}{EI_z} \frac{dQ_y}{dx} = \frac{q(x)}{EI_z} \quad (4.12)$$

que é a equação diferencial da LE partindo-se do carregamento  $q(x)$

#### 4.1.4 Método da integração direta

Para se determinar  $y(x)$ , basta resolver uma das equações diferenciais apresentadas. As constantes de integração são determinadas a partir da consideração das condições de contorno (apoios) do problema. A tabela anexa resume alguns casos resolvidos.

**TABELA DE DEFLEXÕES E ROTAÇÕES  
EM VIGAS**

Caso	Carga e apoios (Comprimento $L$ )	Rotação na extremidade (+  )	Deflexão máxima (+ para baixo)
1		$\theta = + \frac{PL^2}{2EI}$ para $x = L$	$y_{\text{máx.}} = + \frac{PL^3}{3EI}$ para $x = L$
2		$\theta = + \frac{wL^3}{6EI}$ para $x = L$	$y_{\text{máx.}} = + \frac{wL^4}{8EI}$ para $x = L$
3		$\theta = + \frac{wL^3}{24EI}$ para $x = L$	$y_{\text{máx.}} = + \frac{wL^4}{30EI}$ para $x = L$
4		$\theta = - \frac{ML}{EI}$ para $x = L$	$y_{\text{máx.}} = - \frac{ML^2}{2EI}$ para $x = L$
5		$\theta_1 = + \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI}$ para $x = 0$ $\theta_2 = - \frac{Pa(L^2 - a^2)}{6LEI}$ para $x = L$	$y_{\text{máx.}} = + \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$ para $x = \sqrt{(L^2 - b^2)}/3$ $y_{\text{centro}} = + \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$ não máximo $a > b$
6		$\theta_1 = + \frac{PL^2}{16EI}$ para $x = 0$ $\theta_2 = - \frac{PL^2}{16EI}$ para $x = L$	$y_{\text{máx.}} = + \frac{PL^3}{48EI}$ para $x = L/2$
7		$\theta_1 = + \frac{wL^3}{24EI}$ para $x = 0$ $\theta_2 = - \frac{wL^3}{24EI}$ para $x = L$	$y_{\text{máx.}} = + \frac{5wL^4}{384EI}$ para $x = L/2$
8		$\theta_1 = + \frac{ML}{6EI}$ para $x = 0$ $\theta_2 = - \frac{ML}{3EI}$ para $x = L$	$y_{\text{máx.}} = + \frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$ para $x = L/\sqrt{3}$ $y_{\text{centro}} = + \frac{ML^2}{16EI}$ não máximo

### 4.1.5 Exercícios

1. Demonstrar as propriedades da tabela referida anteriormente através do método da integração direta.
2. Calcular o ângulo de rotação e a flecha na extremidade livre da viga do exercício 3.3.5.7-a, adotado o perfil de aço  $S130 \times 15$ , e na viga do exercício 3.3.5.7-d, adotado o perfil de aço  $W460 \times 52$ . Dado  $E = 210$  GPa.

Resposta: a) 0,003571 rad e 1,905 mm; d) 0,002527 rad e 5,686 mm

3. Calcular a flecha máxima (no meio do vão) e os ângulos de rotação nos apoios da viga do exercício 3.3.5.7-b, adotado o perfil de aço  $S310 \times 47,3$ . Resolva pelo método da integração direta ou pela tabela, fazendo-se a superposição de efeitos. Dado  $E = 210$  GPa.

Resposta: 0,002975 rad e 3,85 mm

4. Dados  $I = 20 \cdot 10^6$  mm<sup>4</sup> e  $E = 210$  GPa, calcular a flecha em B na viga da figura 4.4 (por integração ou pela tabela).

Resposta: 7,62 mm

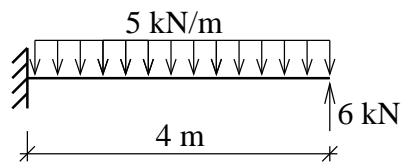


Figura 4.4: Figura do exercício 4

5. Dimensionar uma viga em balanço com uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ao longo de seu comprimento de 4 m. A viga tem seção retangular  $A \times 2A$ . Calcular  $A$  em número inteiro de centímetros. Dados  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $\bar{\sigma} = 120$  MPa e  $\bar{y} = 12$  cm.

Resposta:  $A = 10$  cm,  $\sigma_{max} = 120$  MPa e  $y_{max} = 11,574$  mm

6. Demonstrar que a flecha no meio do vão da viga da figura 4.5 é  $\frac{5M_o L^2}{16EI}$ . Calcule também as rotações nos apoios. Resolva por integração direta e também utilizando a tabela através de superposição de efeitos.

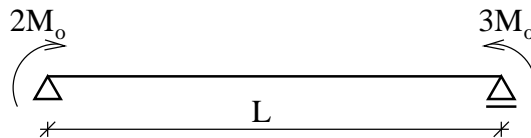


Figura 4.5: Figura do exercício 6

7. Calcular a flechas em  $C$  e  $D$  e as rotações em  $A$ ,  $B$  e  $E$  na viga da figura 4.6 ( $EI$  constante).

Resposta:  $y_C = -y_D = \frac{Pa^3}{6EI}$  e  $\phi_A = \phi_B = -\phi_E = \frac{Pa^2}{4EI}$

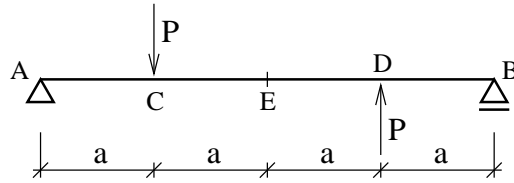


Figura 4.6: Figura do exercício 7

8. Dimensionar a viga do exercício anterior para  $A = 2\text{m}$ ,  $P = 30\text{ kN}$ ,  $E = 110\text{GPa}$ ,  $\bar{\sigma} = 80\text{ MPa}$  e  $\bar{y} = 10\text{mm}$ . Adotar uma seção  $I$  de espessura  $t$  constante, altura total  $8t$  e largura de abas  $5t$ .

Resposta:  $t = 23\text{mm}$

9. Calcular a flecha máxima (no meio do vão) e os ângulos de rotação nos apoios da viga da figura 4.7 ( $EI$  constante)

Resposta:  $y_{max} = \frac{11Pa^3}{6EI}$ ,  $\phi_A = -\phi_B = \frac{3Pa^2}{2EI}$

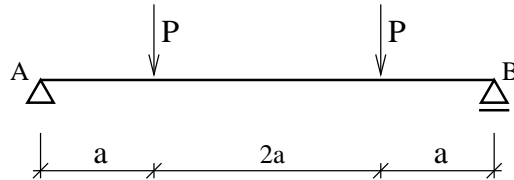


Figura 4.7: Figura do exercício 9

10. Pedir-se um esboço da LE da viga da figura 4.8 ( $EI$  constante) e calcular as rotações e as flechas em  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Resolver pelo método da integração.

Resposta:  $\phi_B = \frac{2M_0a}{EI}$ ,  $\phi_C = \phi_D = \frac{3M_0a}{EI}$ ,  $y_B = \frac{M_0a^2}{EI}$ ,  $y_C = \frac{7M_0a^2}{2EI}$ ,  $y_D = \frac{13M_0a^2}{2EI}$ .

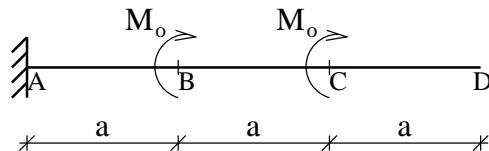


Figura 4.8: Figura do exercício 10

11. Para a figura 4.9, fazer o mesmo que o pedido no exercício anterior. Resolver também usando a tabela de flechas.

Resposta:  $\phi_B = \phi_C = \frac{Pa^2}{2EI}$ ,  $y_B = \frac{Pa^3}{3EI}$ ,  $y_C = \frac{Pa^2}{2EI}(L - \frac{a}{3})$ .

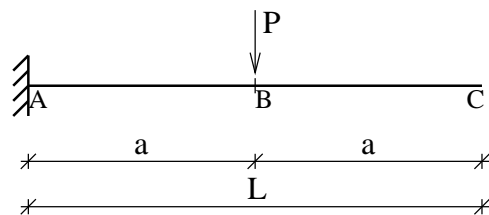


Figura 4.9: Figura do exercício 11

12. Escolher o perfil de aço de abas largas (tipo W) mais econômico para a viga da figura 4.10. Representar os diagramas de tensões das seções das seções A e C e calcular  $y_c$ . Dados  $M = 25\text{kNm}$ ,  $P = 82\text{ kN}$ ,  $\bar{\sigma} = 140\text{ MPa}$  e  $\bar{y} = 5\text{ mm}$ ,  $E = 210\text{ GPa}$ .

Resposta:  $W310 \times 32,7$ ,  $\sigma_{max}^A = 60,24\text{ MPa}$ ,  $\sigma_{max}^C = 137,35\text{ MPa}$  e  $y_C = 4,35\text{ mm}$ .

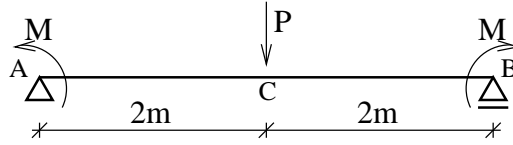


Figura 4.10: Figura do exercício 12

13. Para uma viga em balanço de comprimento  $2,5\text{ m}$  e carga uniformemente distribuída  $q$  em todo o comprimento, dados  $E = 210\text{ GPa}$ ,  $\bar{\sigma} = 140\text{ MPa}$  e  $\bar{y} = 8\text{ mm}$ ,

- Calcular  $q_{adm}$  se a viga é um perfil  $W200 \times 52$ .
- Escolher o perfil W mais econômico se  $q = 28\text{ kN/m}$ .

Resposta:  $q = 18,2\text{ kN/m}$  e  $W410 \times 38,8$ .

14. Calcular  $\phi_A$ ,  $\phi_B$ ,  $y_E$  e  $y_C$  na viga da figura 4.11, dados  $P = 25\text{ kN}$  e  $EI = 11200\text{ kNm}^2$ , constante.

Resposta:  $\phi_A = -0,0015625\text{ rad}$ ,  $\phi_B = 0,003125\text{ rad}$ ,  $y_E = -1,758\text{ mm}$  e  $y_C = 6,417\text{ m}$

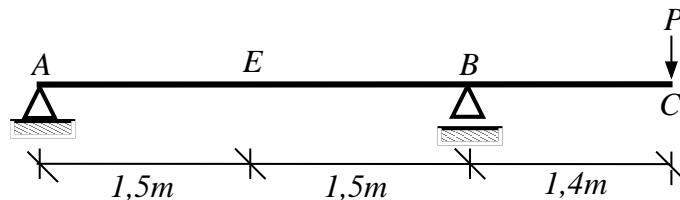


Figura 4.11: Figura do exercícios 14

15. A viga da figura 4.12 é constituída por um perfil  $W310 \times 38,7$ , de aço ( $E = 210\text{ GPa}$ ). Dados  $L = 3,2\text{ m}$ ,  $M_o = 28\text{ kNm}$ ,  $\bar{\sigma} = 160\text{ MPa}$  e  $\bar{y} = 4,6\text{ mm}$ , calcular o valor máximo admissível da taxa de carga  $q$  e os valores correspondentes da tensão máxima e da flecha máxima.

Resposta:  $q = 33,8\text{ kN/m}$ ,  $\sigma = 130\text{ MPa}$ ,  $y = 4,6\text{ mm}$

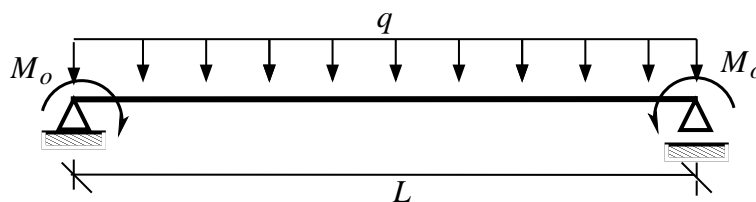


Figura 4.12: Figura do exercícios 15

16. Calcular  $\sigma_{max}$  e as flechas no meio do vão e nas extremidades dos balanços da viga da figura 4.13, de aço ( $E = 210 \text{ GPa}$ ), com seção circular de diâmetro 100 mm.

Resposta:  $\sigma = 101,83 \text{ MPa}$ ,  $y_{meio} = 7,58 \text{ mm}$  e  $y_{balanço} = 15,36 \text{ mm}$

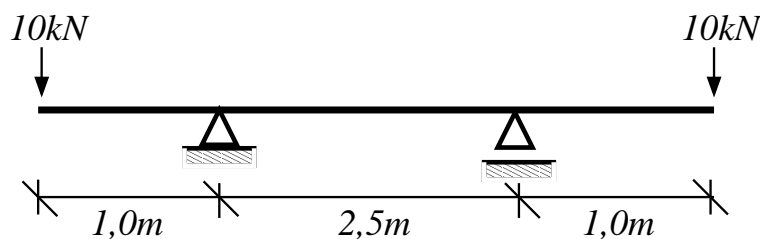


Figura 4.13: Figura do exercícios 16

17. Calcular  $\phi_A$ ,  $\phi_B$ ,  $y_C$  e  $y_D$  para a viga da figura 4.14, dado:  $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ , constante.

Resposta:  $y_C = 3,73 \text{ mm} \downarrow$  e  $y_D = 1,6 \text{ mm} \uparrow$

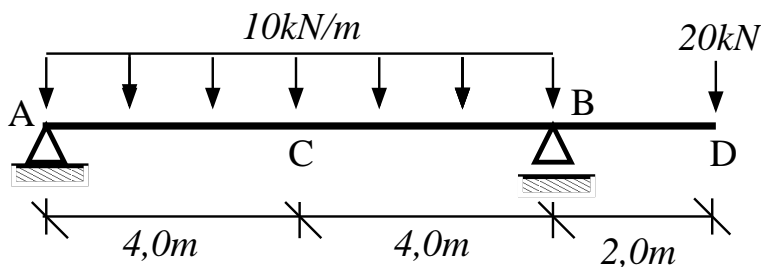


Figura 4.14: Figura do exercícios 17

18. Desenhar a linha elástica da viga da figura 4.15, indicando os valores principais, dado:  $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$

Resposta:  $\phi_A = \phi_B = 0,0012 \text{ rad}$ ;  $y_E = 3,2 \text{ mm}$ ;  $y_C = y_D = -3,6 \text{ mm}$ ;

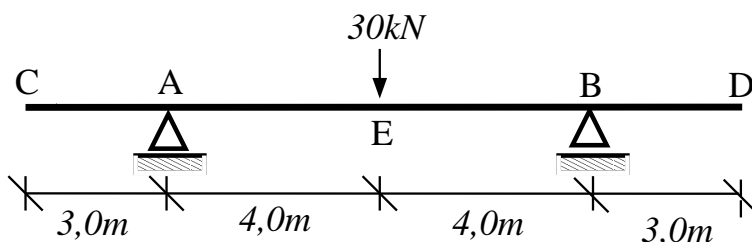


Figura 4.15: Figura do exercícios 18

19. Calcular a flecha no meio do vão da viga da figura 4.16.

Resposta:  $y = \frac{qa^2b^2}{16EI}$

20. Dado  $EI = 7200 \text{ kNm}^2$ , constante, calcule  $\phi_A$ ,  $\phi_B$ ,  $y_D$  e  $y_E$  na viga da figura 4.17.

Resposta:  $\phi_A = -\phi_B = 0,003407 \text{ rad}$ ,  $y_C = y_D = -3,37 \text{ mm}$ ,  $y_E = 5,26 \text{ mm}$ .



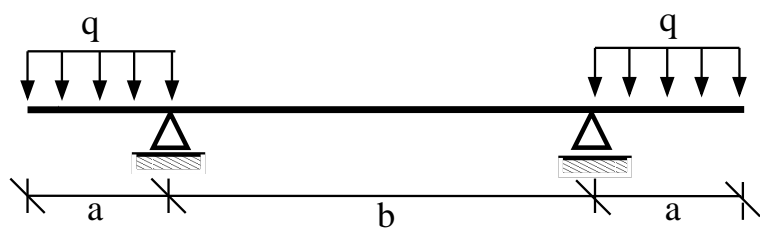


Figura 4.16: Figura do exercícios 19

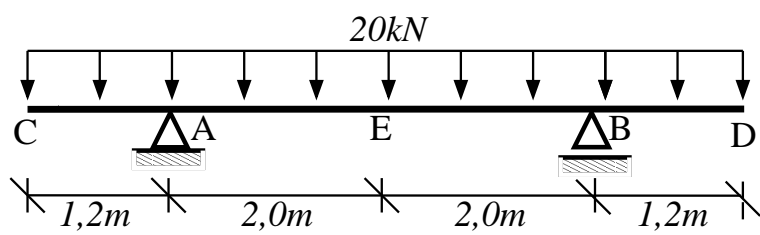


Figura 4.17: Figura do exercícios 20

## 4.2 Problemas estaticamente indeterminados

São estruturas com as quais são necessárias outras equações além das equações de equilíbrio estático para que se possa resolvê-las. Estas equações podem ser equações de compatibilidade de deslocamentos.

### 4.2.1 Exemplos

1. Calcular as reações de apoio na barra bi-engastada representada na figura 4.18, de peso próprio desprezível, sujeita à carga axial  $P$ .

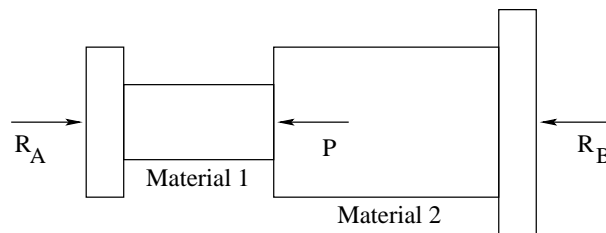


Figura 4.18: Figura do exemplos 1

2. Calcular as reações de apoio na barra representada na figura 4.19, de peso próprio desprezível, sujeita às cargas axiais  $F_1$  e  $F_2$ .

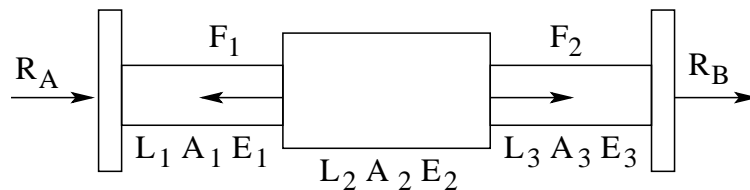


Figura 4.19: Figura do exemplos 2

3. Uma barra AB, de aço, de seção retangular  $40 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$  e de comprimento de  $800,4 \text{ mm}$  é encaixada entre dois apoios fixos distantes entre si e em seguida sofre o aumento de temperatura  $\Delta t = 48^\circ\text{C}$ . Calcular as reações de apoio e a tensão normal na barra. Considerar para o aço  $E = 210000 \text{ MPa}$  e  $\alpha = 12 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$ .

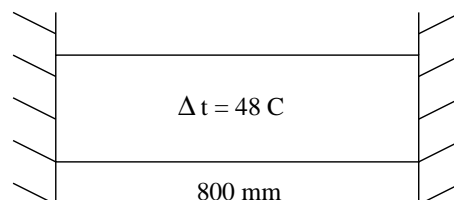


Figura 4.20: Figura do exemplos 3

4. Calcular os esforços normais de tração nos tirantes BC e DE da estrutura da figura 4.21. Todos os pesos próprios são desprezíveis e a barra AB é rígida (não sofre flexão). Dados: BC ( $E_1, A_1, L_1$ ), DE ( $E_2, A_2, L_2$ ).

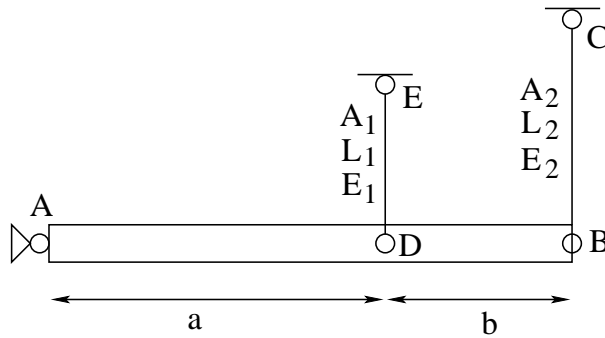


Figura 4.21: Figura do exemplos 4

5. Seja o pilar de concreto armado da figura 4.22 com armadura disposta simetricamente em relação ao eixo, sujeito à carga  $\mathbf{P}$  de compressão. Dados  $E_a, A_a$ , para o aço e  $E_c, A_c$  para o concreto. Calcular as tensões  $\sigma_a$  e  $\sigma_c$  nos materiais. Dados  $\bar{\sigma}_a = 150$  MPa,  $\bar{\sigma}_c = 9$  MPa,  $E_a = 210$  GPa,  $E_c = 14$  GPa,  $A_a = 490$  mm<sup>2</sup>,  $A_c = 40000$  mm<sup>2</sup>.

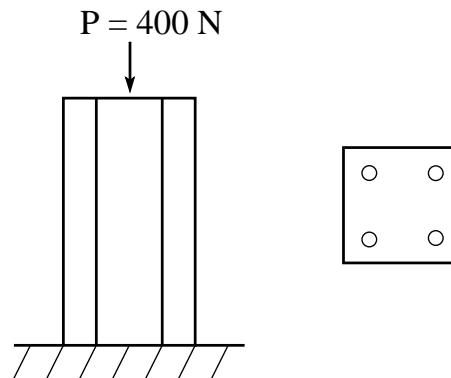


Figura 4.22: Figura do exemplos 5

6. Um eixo é formado por um núcleo de alumínio ( $G_1 = 28$  GPa), diâmetro 50 mm, envolvida por uma coroa de aço de ( $G_2 = 84$  GPa), diâmetro externo 60 mm, sendo rígida a ligação entre materiais. Representar a variação das tensões tangenciais para um torque solicitante de 1,5 kNm.

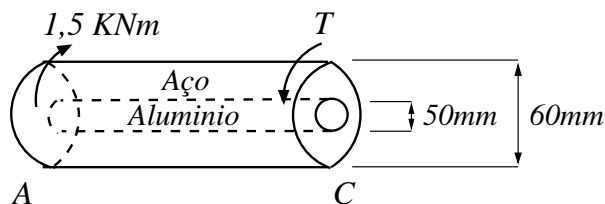


Figura 4.23: Figura do exemplos 6

7. Dados, para o eixo da figura 4.24: o eixo AC  $G_1 = 28$  GPa,  $\bar{\tau}_1 = 30$  MPa, o eixo CB  $G_2 = 84$  GPa,  $\bar{\tau}_2 = 40$  MPa;  $T_o = 3$  kNm e a razão entre os diâmetro  $\frac{D_1}{D_2} = 2$ , pede-se calcular as reações em A e B, dimensionar o eixo e calcular o ângulo de torção em C.
8. Calcular o diagrama de momentos fletores da viga da figura 4.25.
9. Calcular a flexão máxima para a viga da figura 4.26.

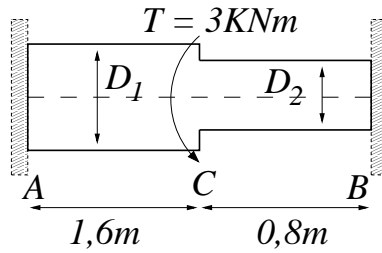


Figura 4.24: Figura do exemplos 7

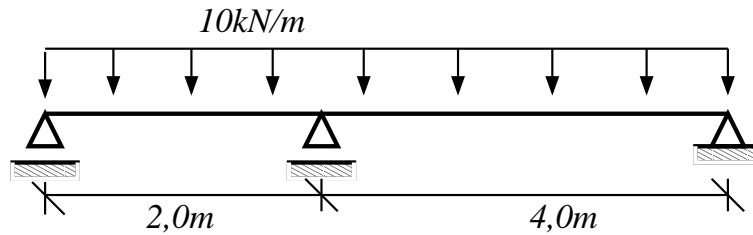


Figura 4.25: Figura do exemplos 8

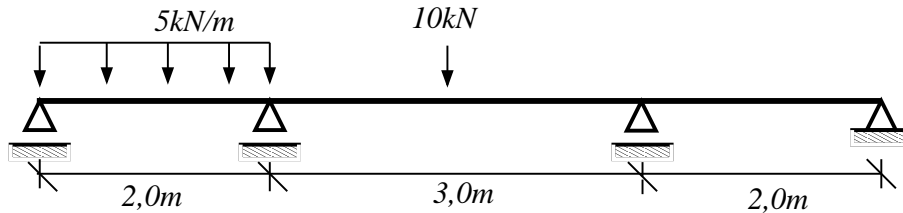


Figura 4.26: Figura do exemplos 9

## 4.2.2 Exercícios

1. Calcular as reações de apoio na barra da figura 4.27, dados  $P_1 = 5 \text{ kN}$  e  $P_2 = 2,5 \text{ kN}$ .

Resposta:  $H_a = 4,25 \text{ kN}$  e  $H_b = 3,25 \text{ kN}$ .

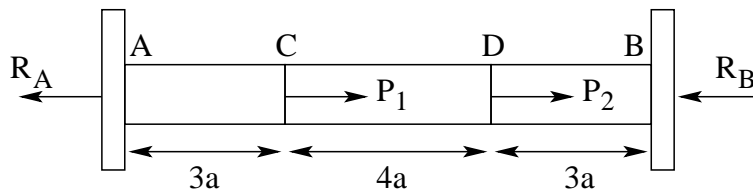


Figura 4.27: Figura do exercícios 1

2. A barra **ABCD** da estrutura representada na figura 4.28 é rígida (não flexiona). Os tirantes **CE** e **DF** são de alumínio com módulo de elasticidade  $7 \times 10^4 \text{ MPa}$  e tem seção de circular com diâmetros de 10 mm **CE** e 12 mm **DF**. As dimensões são dadas (em mm) e a reação vertical no apoio B (em kN). Desprezar os pesos próprios.  $P = 10 \text{ kN}$

Resposta:  $\sigma_{CE} = 145,5 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_{DF} = 194,0 \text{ MPa}$ ;  $\Delta_A = 1,871 \text{ mm}$ ;  $V_B = 65,37 \text{ kN}$ .

3. Os tirantes **1** e **2** da estrutura 4.29 têm áreas de seção  $A_1$  e  $A_2 = 1,5A_1$  e o mesmo comprimento  $L = 1,2 \text{ m}$ . Dados:  $P = 120 \text{ kN}$ ,  $E_1 = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\bar{\sigma}_1 = 180 \text{ MPa}$ ,

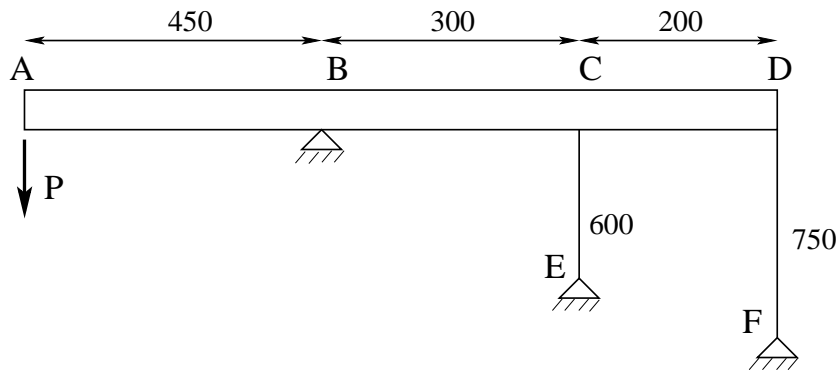


Figura 4.28: Figura do exercícios 2

$E_2 = 1,4 \times 10^5$  MPa,  $\bar{\sigma}_2 = 110$  MPa. Calcular  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\Delta L_B$ .

Resposta:  $394 \text{ mm}^2$ ,  $591 \text{ mm}^2$ ,  $78,74$  MPa e  $1,8$  mm

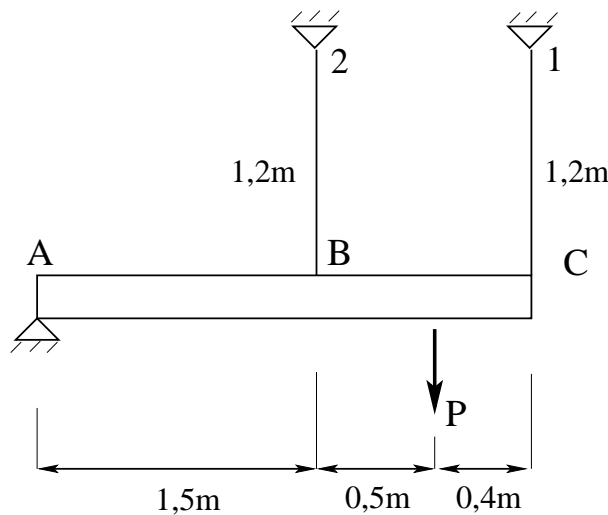


Figura 4.29: Figura do exercícios 3

4. Um pilar de  $2,8$  m de altura, é constituído por um perfil I de aço, cuja área de seção é  $68,5 \text{ cm}^2$ , coberto por concreto, ver figura 4.30. o pilar esta sujeito a uma carga  $\mathbf{P}$  axial de compressão. Os pesos são desprezíveis e as deformações são elásticas proporcionais. São dados:  $\bar{\sigma}_a = 162$  MPa,  $\bar{\sigma}_c = 15$  MPa,  $E_a = 2,1 \times 10^5$  MPa,  $E_c = 1,75 \times 10^4$  MPa. Calcular o valor máximo admissível de  $\mathbf{P}$  e os valores correspondentes das tensões  $\sigma_a$ ,  $\sigma_c$  do encurtamento do pilar.

Resposta:  $P = 3177$  kN,  $\sigma_a = 162$  MPa,  $\sigma_c = 13$  MPa, e  $\Delta L = 2,16$  mm

5. Calcular as tensões no cobre e no alumínio da peça 4.31 para o aumento de temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . Dados  $E_{cu} = 1,2 \times 10^5$  MPa,  $E_a = 0,7 \times 10^5$  MPa,  $\alpha_{cu} = 16,7 \times 10^6 (\text{°C})^{-1}$ ,  $\alpha_a = 23 \times 10^6 (\text{°C})^{-1}$

Resposta:  $\sigma_c = 14,5$  MPa e  $\sigma_a = 54,5$  MPa

6. A peça sujeita à cargas axiais  $P = 30$  kN aplicadas em B e C e a um aumento de temperatura de  $30^\circ$ . Dados  $E = 210$  GPa,  $\alpha = 11,7 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$  e as áreas das seções  $500\text{mm}^2$  em AB e CD, e  $750\text{mm}^2$  em BC, representar a variação do esforço normal e da tensão normal ao longo do comprimento.

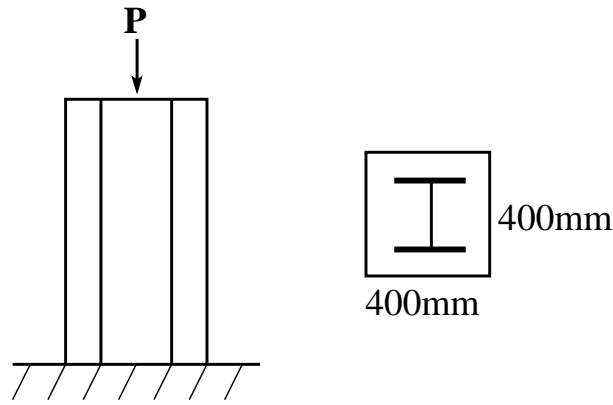


Figura 4.30: Figura do exercícios 4

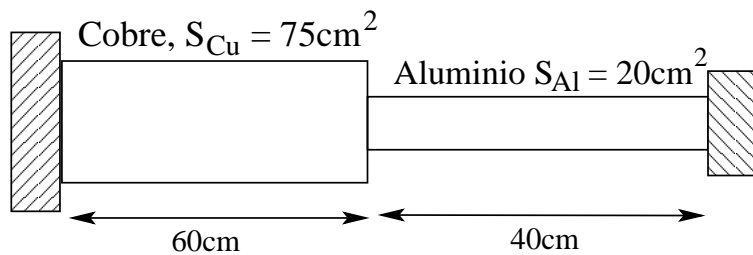


Figura 4.31: Figura do exercícios 5

Resposta: Compressão de 81,43 MPa em BC e de 62,14 MPa em AB e CD.

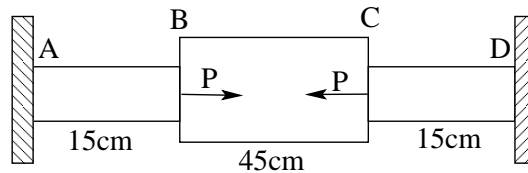


Figura 4.32: Figura do exercícios 6

7. O eixo engastado em A e B, de seção circular constante, está sujeito aos torques  $T_1 = 1,3 \text{ kNm}$  em C e  $T_2 = 2,6 \text{ kNm}$  em D, conforme a figura 4.33. Dado  $\bar{\tau} = 30 \text{ MPa}$ , pede-se calcular as reações em A e B, dimensionar o eixo e calcular os valores correspondentes das tensões máximas em cada trecho.

Resposta:  $T_A = 1,625 \text{ kNm}$  e  $T_B = 2,275 \text{ kNm}$ ,  $\tau_{AB} = 21,3 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{BC} = 4,25 \text{ MPa}$  e  $\tau_{CD} = 29,8 \text{ MPa}$

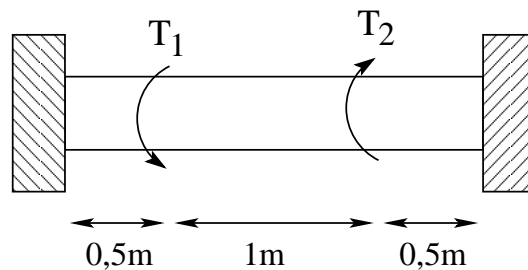


Figura 4.33: Figura do exercícios 7

8. Calcular o ângulo de torção  $C \times A$  e representar a variação das tensões de cisalhamento em cada trecho do eixo. Em BC o núcleo interno (material 1), e a luva (material 2) são rigidamente ligados entre si. Dados  $D_1 = 100$  mm,  $D_2 = 150$  mm,  $G_1 = 70$  GPa,  $G_2 = 105$  GPa e o torque de  $T = 12$  kNm.

Resposta:  $\theta = 0,02115$  rad,  $\tau_1 = 61,11$ ,  $\tau_2 = 19,4$  MPa.

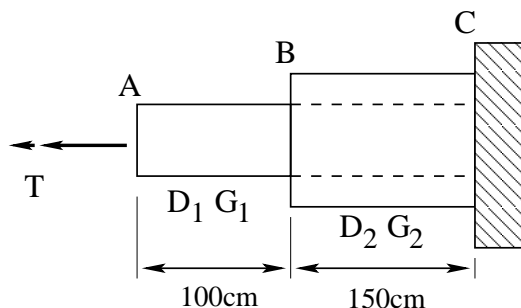


Figura 4.34: Figura do exercícios 8

9. Calcular a flecha máxima para a viga da figura 4.35.

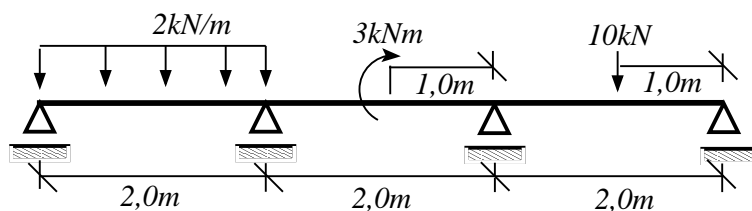


Figura 4.35: Figura do exercícios 9

10. Desenhe o diagrama de momento fletor para a viga da figura 4.36.

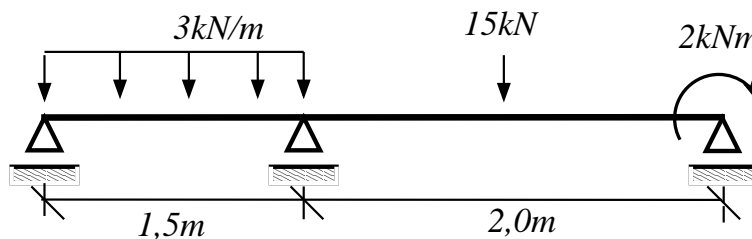


Figura 4.36: Figura do exercícios 10